39-quantum-Hadamard-05.pdf

Quantum Computing

L’operatore di Hadamard

1

l’operatore di Hadamard

- l’operatore più tipico del quantum computing è probabilmente l’operatore di Hadamard
- può avere in input uno o più qubit

2

39-quantum-Hadamard-05.pdf

Hadamard per un qubit

- la matrice di Hadamard per un quibit è $H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
- se applichiamo Hadamard a $|0\rangle$ otteniamo:
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- ciò può essere riscritto come $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle = |+\rangle$, quindi $H_1|0\rangle = |+\rangle$

3

3

Hadamard per un qubit

- la matrice di Hadamard per un quibit è $H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
- se applichiamo Hadamard a $|1\rangle$ otteniamo:
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- può essere riscritto come $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle = |-\rangle$, quindi $H_1|1\rangle = |-\rangle$
- Hadamard pone un qubit in superposition «bilanciata» tra i due stati di base

4

4

39-quantum-Hadamard-05.pdf

Hadamard – verifica

- anche in questo caso dobbiamo verificare che $H_1{}^{\dagger} H_1 = H_1 H_1{}^{\dagger} = I$
- e anche in questo caso $H_1{}^{\dagger} = H_1$ (la coniugata trasposta di H_1 rimane H_1)
- quindi occorre verificare che $H_1{}^2 = I$
- effettivamente abbiamo che

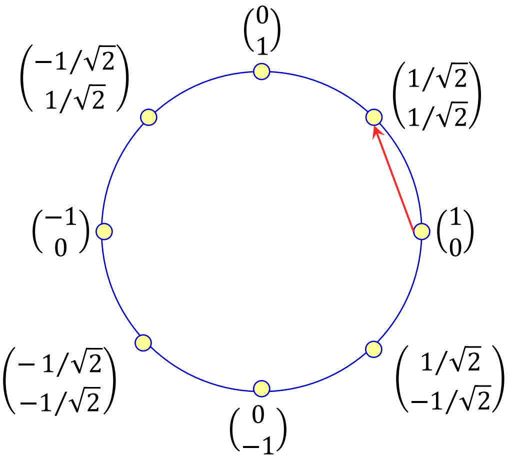
$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5

5

effetto di Hadamard su alcuni stati

- $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

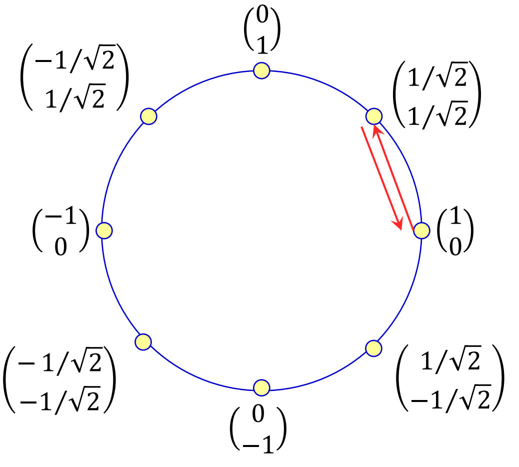


6

6

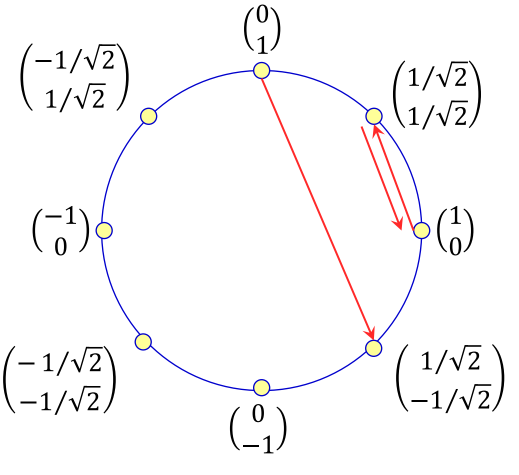
effetto di Hadamard su alcuni stati

- $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



effetto di Hadamard su alcuni stati

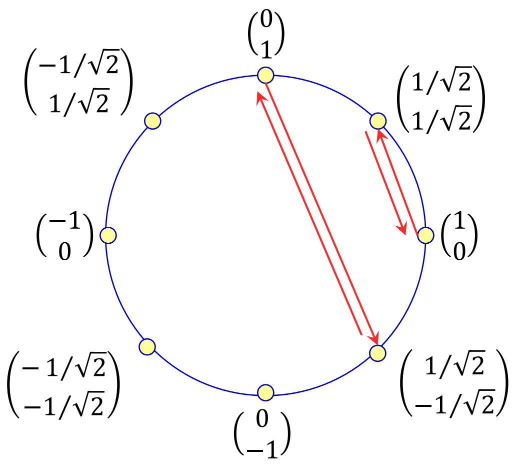
- $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$



39-quantum-Hadamard-05.pdf

effetto di Hadamard su alcuni stati

- $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

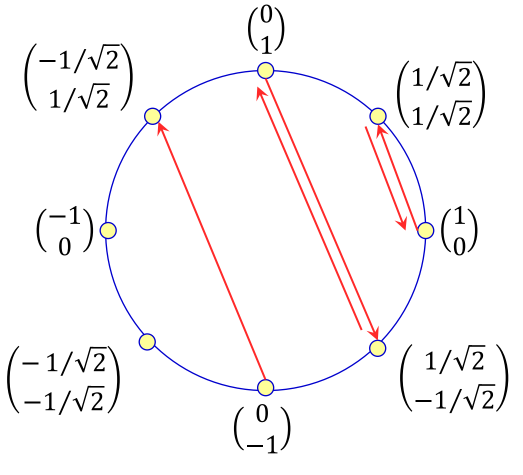


9

9

effetto di Hadamard su alcuni stati

- $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$



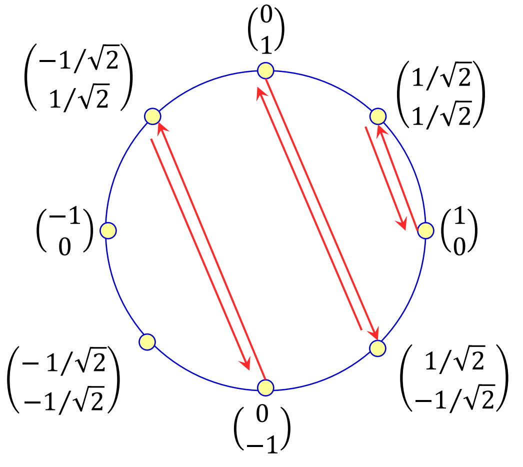
10

10

39-quantum-Hadamard-05.pdf

effetto di Hadamard su alcuni stati

- $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

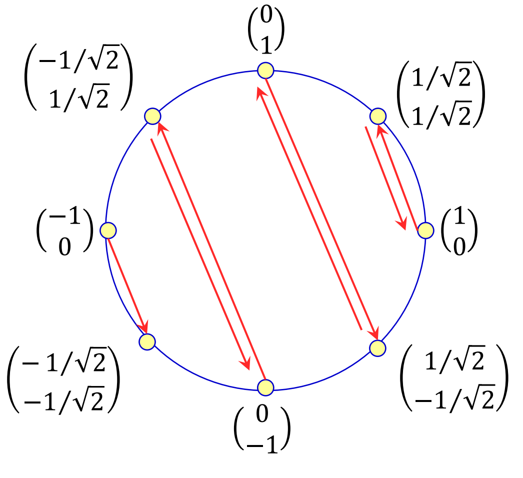


11

11

effetto di Hadamard su alcuni stati

- $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$



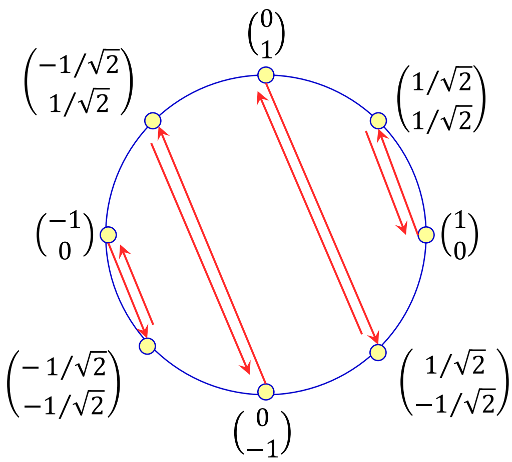
12

12

39-quantum-Hadamard-05.pdf

effetto di Hadamard su alcuni stati

- $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$



13

13

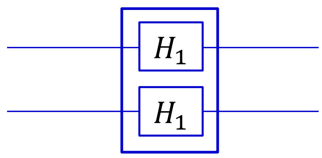
Hadamard e gli altri operatori

- abbiamo inoltre che
  - $H_1|0\rangle = |+\rangle$
  - $H_1|+\rangle = |0\rangle$
  - $H_1|1\rangle = |-\rangle$
  - $H_1|-\rangle = |1\rangle$
- ricordiamo che
  - $X|0\rangle = |1\rangle$
  - $Z|+\rangle = |-\rangle$
- ad esempio, per fare un bit flip possiamo prima applicare Hadamard, poi fare un phase flip e quindi ri-applicare Hadamard

14

14

Hadamard per due qubit



15

15

Hadamard per due qubit

- la matrice di Hadamard per due quibit è $H_2 = H_1 \otimes H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} H_1 & H_1 \\ H_1 & -H_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

16

16

39-quantum-Hadamard-05.pdf

Hadamard per due qubit

- se applichiamo Hadamard a $|00\rangle$ otteniamo:
$H_2|00\rangle = (H_1 \otimes H_1)(|0\rangle \otimes |0\rangle) =$
$(H_1|0\rangle) \otimes (H_1|0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} =$
$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$
- ciò può essere riscritto come $\frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle$

17

17

Hadamard per due qubit

- se applichiamo Hadamard a $|01\rangle$ otteniamo:
$H_2|01\rangle = (H_1 \otimes H_1)(|0\rangle \otimes |1\rangle) =$
$(H_1|0\rangle) \otimes (H_1|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} =$
$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$
- ciò può essere riscritto come $\frac{1}{2}|00\rangle - \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle - \frac{1}{2}|11\rangle$

18

18

39-quantum-Hadamard-05.pdf

Hadamard per due qubit

- se applichiamo Hadamard a $|10\rangle$ otteniamo:
$H_2|10\rangle = (H_1 \otimes H_1)(|1\rangle \otimes |0\rangle) =$
$(H_1|1\rangle) \otimes (H_1|0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$
$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ciò può essere riscritto come $\frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle - \frac{1}{2}|10\rangle - \frac{1}{2}|11\rangle$

19

19

Hadamard per due qubit

- se applichiamo Hadamard a $|11\rangle$ otteniamo:
$H_2|11\rangle = (H_1 \otimes H_1)(|1\rangle \otimes |1\rangle) =$
$(H_1|1\rangle) \otimes (H_1|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$
$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ciò può essere riscritto come $\frac{1}{2}|00\rangle - \frac{1}{2}|01\rangle - \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle$

20

20

39-quantum-Hadamard-05.pdf

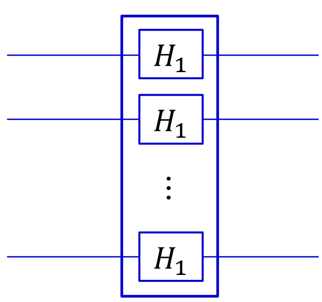
Hadamard per due qubit

- complessivamente abbiamo che
  - $H_2|00\rangle = |++\rangle$
  - $H_2|01\rangle = |+-\rangle$
  - $H_2|10\rangle = |-+\rangle$
  - $H_2|11\rangle = |++\rangle$

21

21

Hadamard per m qubit



22

22

39-quantum-Hadamard-05.pdf

Hadamard per m qubit

- la matrice di Hadamard per m quibit è $H_m = H_1 \otimes H_{m-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} H_{m-1} & H_{m-1} \\ H_{m-1} & -H_{m-1} \end{pmatrix}$
- quando sarà chiaro dal contesto scriveremo H invece di H_m

23

23

Hadamard per m qubit

- in generale, la matrice di Hadamard per m quibit è $H_m = H_1 \otimes H_{m-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} H_{m-1} & H_{m-1} \\ H_{m-1} & -H_{m-1} \end{pmatrix} = H_1{}^{\otimes m}$
- ad esempio $H_m|0 \ldots 0\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \otimes \cdots \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}} \sum_{x \in \{0,1\}^m} |x\rangle$
- attenzione: quando scriviamo $x \in \{0,1\}^m$ denotiamo tutte le possibili stringhe di m bit

24

24

39-quantum-Hadamard-05.pdf

Hadamard per m qubit

- in generale, se $u = |u_1 \ldots u_m\rangle$, allora $H_m|u\rangle = H_1{}^{\otimes m}|u\rangle$
- dove $H_1{}^{\otimes m}|u\rangle = \frac{(-1)^{u\cdot x}}{2^{\frac{m}{2}}} \sum_{x\in\{0,1\}^m} |x\rangle$
- il segno è positivo o negativo in funzione di $u \cdot x$, dove $u \cdot x = (u_1x_1 + \cdots + u_mx_m)$
  - in pratica si conta quante volte i *corrispondenti* qubit di input e output hanno entrambi valore uno e si verifica se tale numero è pari o dispari

25

25

Hadamard per m qubit – esempio

- supponiamo sia $m = 3$ e sia $u = |111\rangle$ l'input
- consideriamo la stringa $x = 1\ 0\ 1$
- abbiamo che $u \cdot x = (1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1) = 2$
- quindi in questo caso abbiamo che $\frac{(-1)^{u\cdot x}}{2^{\frac{m}{2}}} = \frac{(-1)^2}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}$
- questa è l'ampiezza dello stato base $|101\rangle$ in output quando in input abbiamo $|111\rangle$

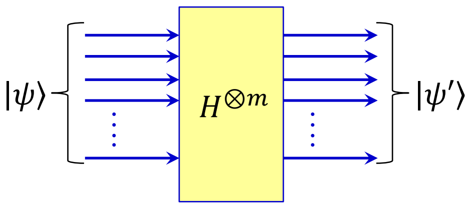
26

26

39-quantum-Hadamard-05.pdf

una primitiva molto interessante

- se abbiamo in input la superposition di u qubit $|\psi\rangle$ e le applichiamo Hadamard otteniamo una nuova superposition $|\psi'\rangle$

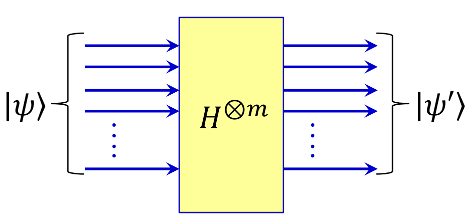


27

27

una primitiva molto interessante

- in generale $|\psi\rangle = \sum_x \alpha_x |x\rangle$ e $|\psi'\rangle = \sum_x \beta_x |x\rangle$

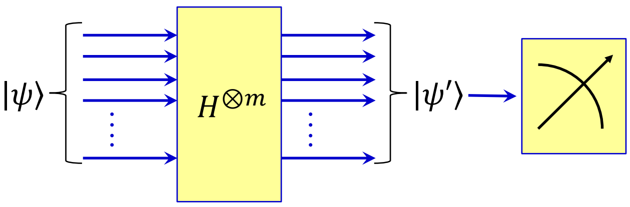


28

28

una primitiva molto interessante

- in generale $|\psi\rangle = \sum_x \alpha_x |x\rangle$ e $|\psi'\rangle = \sum_x \beta_x |x\rangle$
- se effettuiamo una misura sul risultato otteniamo un qualche valore y per gli m qubit con probabilità $|\beta_y|^2$

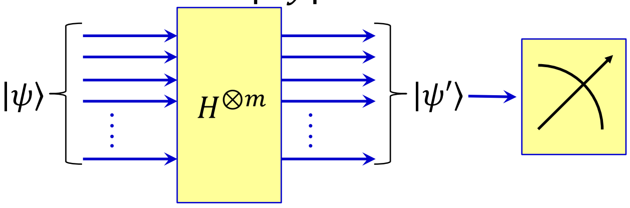


29

29

una primitiva molto interessante

- in generale $|\psi\rangle = \sum_x \alpha_x |x\rangle$ e $|\psi'\rangle = \sum_x \beta_x |x\rangle$
- se effettuiamo una misura sul risultato otteniamo un qualche valore y per gli m qubit con probabilità $|\beta_y|^2$



- in pratica otteniamo, in tempo costante, una certa probabilità di ottenere ogni stringa di qubit

30

30