38-quantum-tensori-05.pdf

Quantum Computing

Tensori

1

1

ricorda – prodotto tensore

- avevamo detto che $\binom{a}{b} \otimes \binom{c}{d}$ costruisce il vettore $\begin{pmatrix} a\binom{c}{d} \\ b\binom{c}{d} \end{pmatrix}$

2

2

38-quantum-tensori-05.pdf

rappresentazione dello stato di un bit

- un bit tradizionale può trovarsi o nello stato 0 o nello stato 1
- ciò corrisponde ad un punto in uno spazio $\{0,1\}$

3

3

rappresentazione dello stato di due bit

- due bit tradizionali possono trovarsi o nello stato 00 o nello stato 01 o nello stato 10 o nello stato 11
- ciò corrisponde ad un punto in uno spazio $\{0,1\} \times \{0,1\}$
- dove il simbolo $\times$ rappresenta il prodotto cartesiano

4

4

38-quantum-tensori-05.pdf

rappresentazione dello stato di un qubit

- un qubit può trovarsi nello stato $\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$, dove α_0 e α_1 sono numeri complessi
- ciò corrisponde ad un punto in uno spazio $\mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{C}^2$ che è uno *spazio di Hilbert* $\mathcal{H}$

5

5

rappresentazione dello stato di due qubit

- due qubit possono trovarsi singolarmente ciascuno in uno stato $\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ e $\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle$ di due spazi di Hilbert $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$
- ma quando sono assieme il loro stato è descritto in generale da $\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$
- lo spazio risultante è il prodotto tensore dei due spazi di Hilbert ciascuno su $\mathbb{C}^2$ e si indica con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$
- dove il simbolo $\otimes$ rappresenta il prodotto tensore

6

6

38-quantum-tensori-05.pdf

due qubit

- consideriamo $\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ e $\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle$
- possiamo rappresentarli con $\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{pmatrix}$
- abbiamo inoltre che $\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix}\alpha_0\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{pmatrix}\\ \alpha_1\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_0\beta_0\\ \alpha_0\beta_1\\ \alpha_1\beta_0\\ \alpha_1\beta_1\end{pmatrix} = \alpha_0\beta_0|00\rangle +$$

$$\alpha_0\beta_1|01\rangle + \alpha_1\,\beta_0|10\rangle + \alpha_1\,\beta_1|11\rangle$$

7

7

rappresentazione dello stato di due qubit

- quindi per ogni coppia di stati $|u\rangle$ e $|v\rangle$ di due singoli qubit possiamo rappresentare il loro stato complessivo come $|u\rangle\otimes|v\rangle$ o, abbreviando, come $|u\rangle|v\rangle$ o, abbreviando ancora come $|uv\rangle$

8

8

38-quantum-tensori-05.pdf

esempio

- consideriamo due qubit, entrambi nello stato $|0\rangle = \binom{1}{0}$, possiamo descrivere lo stato complessivo come $|0\rangle \otimes |0\rangle = |0\rangle|0\rangle =$ $\binom{1}{0} \otimes \binom{1}{0} = \begin{pmatrix} 1\binom{1}{0} \\ 0\binom{1}{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |00\rangle$

9

9

proprietà del prodotto tensore

- il tensore è un operatore bilineare
- se abbiamo $|u_1\rangle + |u_2\rangle$ e $|v\rangle$ allora $(|u_1\rangle + |u_2\rangle) \otimes |v\rangle = |u_1\rangle \otimes |v\rangle + |u_2\rangle \otimes |v\rangle$
- e se abbiamo $|u\rangle$ e $|v_1\rangle + |v_2\rangle$ allora $|u\rangle \otimes (|v_1\rangle + |v_2\rangle) = |u\rangle \otimes |v_1\rangle + |u\rangle \otimes |v_2\rangle$

- inoltre $(A \cdot A') \otimes (B \cdot B') = (A \otimes B) \cdot (A' \otimes B')$, dove il $\cdot$ rappresenta la moltiplicazione tra matrici

10

10

38-quantum-tensori-05.pdf

esempi: stato di due qubit e tensore

- esplicita lo stato dei seguenti due qubit
  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$
  - $\frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$
- esplicita lo stato dei seguenti due qubit
  $\left(\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle\right)$
  - $\frac{1}{2\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{i}{2\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{i\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}|11\rangle$

11

11

esempi sull'uso di tensori

- esplicita il prodotto tensore $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix}3\\4\\6\\8\end{pmatrix}$
- esplicita il prodotto tensore $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

12

12

38-quantum-tensori-05.pdf

esempi sull'uso di tensori

- esplicita il prodotto tensore $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

  – $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

13

13

entanglement e tensori

- vista la definizione del prodotto tensore possiamo dire che due qubit sono entangled quando non è possibile esprimerli come prodotto tensore di due qubit

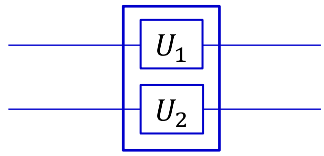
14

14

38-quantum-tensori-05.pdf

composizione di operatori e tensori

- torniamo sulla questione di comporre in parallelo due operatori unitari qualunque $U_1 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ e $U_2 = \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}$



15

15

una regola generale

- ricordando che $U_1 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ e $U_2 = \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}$
- possiamo scrivere la matrice complessiva risultante U come
- $U = U_1 \otimes U_2 = \begin{pmatrix} a\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} & c\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} \\ b\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} & d\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

16

16

38-quantum-tensori-05.pdf

proviamo a riscrivere $CNOT$

- ricordiamo che: $CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- possiamo scriverlo come $CNOT = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X$
- infatti $|0\rangle\langle 0| \otimes I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- e $|1\rangle\langle 1| \otimes X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

17

17

proviamo a riscrivere $CNOT$

- da: $CNOT = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X$
- abbiamo che: $CNOT = |0\rangle\langle 0| \otimes (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) + |1\rangle\langle 1| \otimes (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)$
- quindi: $CNOT = |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 0|$
- da cui: $CNOT = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 11|$

18

18