37-quantum-porte-qubit-due-bit-04.pdf

Quantum Computing

Operatori su due qubit

1

1

ricordiamo che

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2

2

37-quantum-porte-qubit-due-bit-04.pdf

operatori su due qubit

- un operatore U su due qubit riceve in ingresso due qubit e *restituisce in output due qubit*
- se l'input è $\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$ l'output sarà, in generale, $\alpha'_{00}|00\rangle + \alpha'_{01}|01\rangle + \alpha'_{10}|10\rangle + \alpha'_{11}|11\rangle$

3

3

operatori su due qubit

- quindi U è una unitary transformation 4×4 con $U\begin{pmatrix}\alpha_{00}\\ \alpha_{01}\\ \alpha_{10}\\ \alpha_{11}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha'_{00}\\ \alpha'_{01}\\ \alpha'_{10}\\ \alpha'_{11}\end{pmatrix}$ e $U^\dagger U = UU^\dagger = I$

4

4

37-quantum-porte-qubit-due-bit-04.pdf

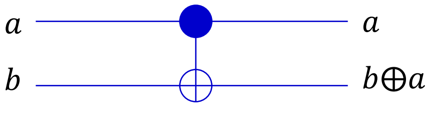
effetto sugli stati di base

- se $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{pmatrix}$
- allora $U|00\rangle = u_{11}|00\rangle + u_{21}|01\rangle + u_{31}|10\rangle + u_{41}|11\rangle$
- analogamente, per calcolare $U|01\rangle$, $U|10\rangle$, $U|11\rangle$, si usano seconda, terza e quarta colonna di U
- inoltre, il fatto che U sia una trasformazione unitaria implica che le colonne siano vettori tra loro ortogonali

5

5

l'operatore $CNOT$



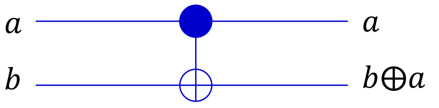
- a è chiamato qubit di *controllo* e b è chiamato qubit *target*
- $CNOT$ è l'abbreviazione di *Controlled* NOT
- pensando in termini di qubit base, $CNOT$ effettua un bit flip su b se e solo se $a = |1\rangle$
  - vedremo come ciò si generalizza per qubit qualunque

6

6

37-quantum-porte-qubit-due-bit-04.pdf

$CNOT$ e gli stati base

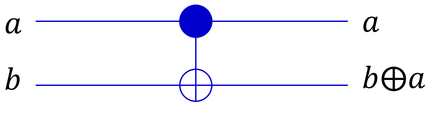


- ancora in termini di stati base
  - $CNOT|00\rangle = |00\rangle$
  - $CNOT|01\rangle = |01\rangle$
  - $CNOT|10\rangle = |11\rangle$
  - $CNOT|11\rangle = |10\rangle$

7

7

$CNOT$ – comportamento generale



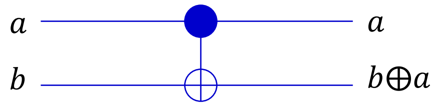
- più in generale se $|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$
- allora $CNOT|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|11\rangle + \alpha_{11}|10\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{11}|10\rangle + \alpha_{10}|11\rangle$

8

8

37-quantum-porte-qubit-due-bit-04.pdf

$CNOT$ è un operatore



- la matrice che descrive l'operatore è la seguente

$$CNOT = CNOT^{\dagger} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

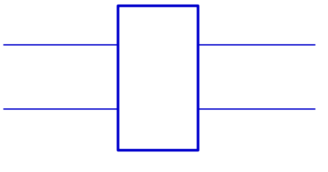
- inoltre $CNOT \times CNOT^{\dagger} = CNOT^2 = I$

9

9

operatori unitari e operatori binari

- cosa succede se per realizzare un operatore binario ne usiamo due unitari?
- ad esempio, supponiamo di voler realizzare questo operatore su due qubit



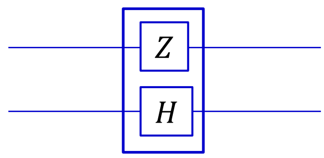
10

10

37-quantum-porte-qubit-due-bit-04.pdf

operatori unitari e operatori binari

- e supponiamo di volerlo fare utilizzando due operatori unitari, ciascuno applicato ad uno dei due qubit

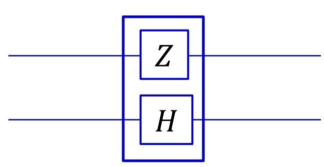


11

11

matrici per operatori unitari e matrici per operatori binari

- cosa accade in questo caso in termini di matrice 4×4 complessiva?



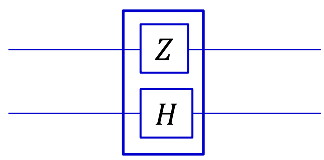
12

12

matrici per operatori unitari e matrici per operatori binari

- supponiamo che i due operatori unitari siano

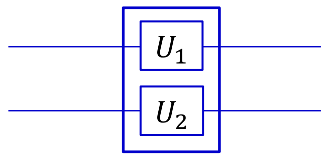
$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$



una regola generale

- affrontiamo la questione in generale e consideriamo due operatori unitari qualunque

$$U_1 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ e } U_2 = \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}$$



37-quantum-porte-qubit-due-bit-04.pdf

una regola generale

- affrontiamo la questione in generale e consideriamo due operatori unitari qualunque $U_1 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ e $U_2 = \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}$
- la matrice complessiva risultante U è composta da quattro sotto-matrici nel modo seguente
- $U = \begin{pmatrix} a\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} & c\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} \\ b\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} & d\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

15

15

effetto su qubit specifici

- per capire perché ciò sia vero proviamo a vedere cosa accade per specifici qubit; proviamo con $|00\rangle$
  - $U_1 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ $U_2 = \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}$
  - $U = \begin{pmatrix} a\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} & c\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} \\ b\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} & d\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} \end{pmatrix}$
- $U_1|0\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ e $U_2|0\rangle = e|0\rangle + f|1\rangle$
- inoltre $(a|0\rangle + b|1\rangle)(e|0\rangle + f|1\rangle) = ae|00\rangle + af|01\rangle + be|10\rangle + bf|11\rangle$

16

16

37-quantum-porte-qubit-due-bit-04.pdf

effetto su qubit specifici

- proviamo ora con $|01\rangle$
  - $U_1 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ $U_2 = \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}$
  - $U = \begin{pmatrix} a\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} & c\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} \\ b\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} & d\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} \end{pmatrix}$
- $U_1|0\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ e $U_2|1\rangle = g|0\rangle + h|1\rangle$
- inoltre $(a|0\rangle + b|1\rangle)(g|0\rangle + h|1\rangle) = ag|00\rangle + ah|01\rangle + bg|10\rangle + bh|11\rangle$

17

17

torniamo all'esempio

- abbiamo
  - $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
  - $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

18

18