30-quantum-porte-qubit-un-bit-08

Quantum Computing

Operatori su un qubit

1

1

Unitary Transformation

Un qubit

2

2

30-quantum-porte-qubit-un-bit-08

tre assiomi per i qubit

1. superposition
2. misura
3. unitary transformation

finora ci siamo concentrati sui primi due, ora cominciamo a occuparci anche del terzo

3

3

operatori su un qubit

- come nel caso del calcolo tradizionale, anche per il quantum computing è possibile identificare degli operatori elementari, da comporre per effettuare calcoli più complicati
- un operatore su un qubit riceve in input un qubit e restituisce in output un qubit, eseguendo una *unitary transformation*
- se l'input è un qubit $|\psi\rangle$ e l'operatore che usiamo è un certo U otteniamo come output $U|\psi\rangle$

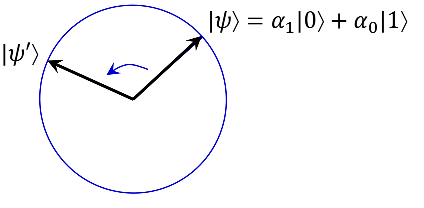
4

4

30-quantum-porte-qubit-un-bit-08

rotazione dello spazio di Hilbert

- ricordiamo che un qubit è un vettore unitario dello spazio di Hilbert
- quando applichiamo una funzione a un qubit $|\psi\rangle$ otteniamo, in generale, un altro qubit
- la meccanica quantistica ci dice che la funzione ha l'effetto di una *rotazione* dello spazio di Hilbert

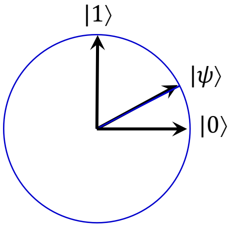


5

5

evoluzione di un qubit

- per semplicità assumiamo che i coefficienti siano reali e consideriamo la base con versori $|0\rangle$ e $|1\rangle$
- più in generale, avendo a che fare con coefficienti complessi occorre immaginare di essere su una sfera, detta *Sfera di Bloch*

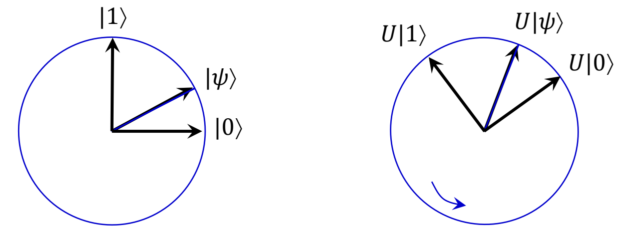


6

6

evoluzione di un qubit

- per semplicità assumiamo che i coefficienti siano reali e consideriamo la base con versori $|0\rangle$ e $|1\rangle$
- se applichiamo un operatore U ciò che otteniamo è la rotazione rappresentata graficamente così

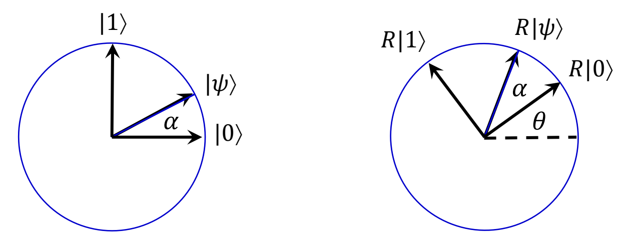


7

7

rotazione rigida

- la rotazione è *rigida*
  - gli angoli tra vettori sono preservati
- ad esempio, eseguiamo una rotazione R di θ



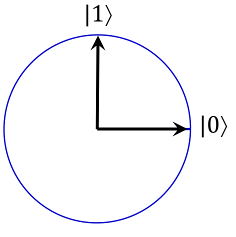
8

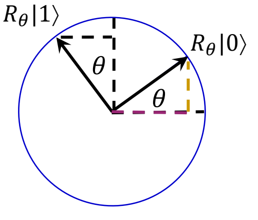
8

30-quantum-porte-qubit-un-bit-08

rappresentazione della rotazione

- la rotazione di θ può essere rappresentata con una matrice R_θ
- la matrice deve muovere $|0\rangle$ in $\cos\theta\,|0\rangle + \sin\theta|1\rangle$ e $|1\rangle$ in $-\sin\theta\,|0\rangle + \cos\theta|1\rangle$
- *quindi* la matrice è $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$



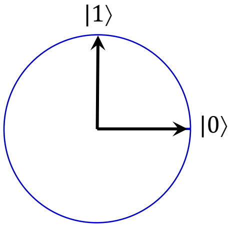


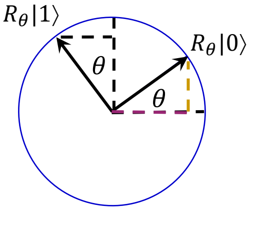
9

9

rappresentazione della rotazione

- infatti se applichiamo R_θ a $|0\rangle$ otteniamo $R_\theta|0\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$
- e se applichiamo R_θ a $|1\rangle$ otteniamo $R_\theta|1\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$





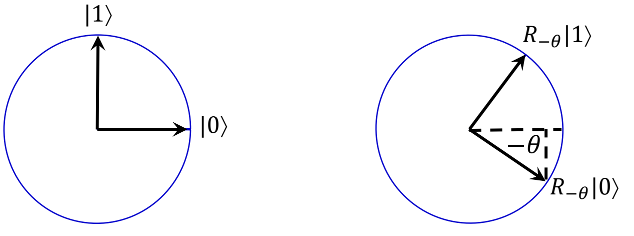
10

10

30-quantum-porte-qubit-un-bit-08

rotazione in senso opposto

- ora consideriamo una rotazione di $-\theta$, che può essere rappresentata con una matrice $R_{-\theta}$ con $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ e $R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
- nota: $R_{-\theta}$ è la trasposta di R_θ, cioè $R_{-\theta} = R_\theta^T$



11

11

ritorno al punto di partenza

- $R_\theta R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$
- $R_{-\theta} R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

12

12

30-quantum-porte-qubit-un-bit-08

ritorno al punto di partenza

- $R_\theta R_{-\theta} = R_{-\theta} R_\theta = I$; dove I è la matrice identità
- se ruotiamo di θ e poi di $-\theta$ torniamo al punto di partenza
- inoltre abbiamo che $R_\theta R_\theta^T = R_\theta^T R_\theta = I$

13

13

generalizzazione

- tutto ciò avviene non solo per trasformazioni che coinvolgono numeri reali, ma anche per trasformazioni che coinvolgono numeri complessi
- in questo caso la rotazione inversa si rappresenta con $R_\theta^\dagger$ dove il simbolo † corrisponde ad effettuare la *trasposta* della *complessa coniugata*
  – il complesso coniugato di $z = x + yi$ è $\bar{z} = x - yi$

14

14

30-quantum-porte-qubit-un-bit-08

esempio di uso dell’operatore †

- consideriamo l’operatore $U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$
- abbiamo che $U^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}$

15

15

unitary transformation

- una trasformazione U è una *unitary transformation* se e solo se $U^\dagger U = UU^\dagger = I$

16

16

30-quantum-porte-qubit-un-bit-08

esempio di unitary transformation

- consideriamo ancora l'operatore $U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, con $U^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}$
- la condizione di unitary transformation impone che $\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

17

17

i versori sono trasformati in versori

- l'effetto di $U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ su $|0\rangle$ è $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \binom{1}{0} = \binom{a}{b}$, che è la prima colonna di U
- l'effetto di $U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ su $|1\rangle$ è $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \binom{0}{1} = \binom{c}{d}$, che è la seconda colonna di U

18

18

30-quantum-porte-qubit-un-bit-08

i versori sono trasformati in versori

- ricordiamo: $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\binom{1}{0} = \binom{a}{b}$
- e $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\binom{0}{1} = \binom{c}{d}$
- il fatto che $\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ci dice che il prodotto scalare tra $\binom{a}{b}$ e $\binom{c}{d}$ è 0 e che quindi $|0\rangle$ e $|1\rangle$ sono trasformati in vettori tra loro ortogonali (proprio ciò che ci aspettavamo)

19

19

i versori sono trasformati in versori

- ricordiamo: $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\binom{1}{0} = \binom{a}{b}$
- e $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\binom{0}{1} = \binom{c}{d}$
- il fatto che $\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ci dice anche che $\binom{a}{b}$ e $\binom{c}{d}$ sono di lunghezza unitaria, infatti la lunghezza di $\binom{a}{b}$ si calcola con il prodotto scalare di $\binom{a}{b}$ per se stesso, ma $(\bar{a}\ \bar{b})\binom{a}{b} = 1$ e lo stesso vale per $\binom{c}{d}$

20

20

30-quantum-porte-qubit-un-bit-08

ulteriore generalizzazione

- quanto detto sulle unitary transformation vale non solo per un qubit ma per un qualunque insieme di qubit

21

21

Operatori elementari

Un qubit

22

22

30-quantum-porte-qubit-un-bit-08

l'operatore bit flip

- supponiamo che un qubit di input si trovi nello stato $|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$
- l'operatore *bit flip* applica allo stato quanto specificato nella matrice $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- il risultato è $X|\psi\rangle = X\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = \alpha_1|0\rangle + \alpha_0|1\rangle$

23

23

l'operatore bit flip – esempi

- se ad esempio applichiamo bit flip a $|0\rangle$ otteniamo $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$
- se ad invece applichiamo bit flip a $|1\rangle$ otteniamo $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$

24

24

30-quantum-porte-qubit-un-bit-08

l'operatore bit flip *è un operatore*

- perché bit flip sia un operatore legittimo per un qubit deve essere una unitary transformation
- dobbiamo quindi verificare che $X^\dagger X = XX^\dagger = I$
- in questo caso $X^\dagger = X$ (la coniugata trasposta di X rimane X)
- quindi occorre verificare che $X^2 = I$

25

25

l'operatore bit flip è un operatore

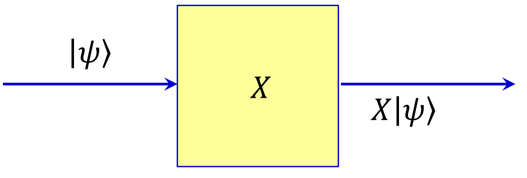
- quindi occorre verificare che $X^2 = I$
- effettivamente abbiamo che $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

26

26

30-quantum-porte-qubit-un-bit-08

un disegno per rappresentare bit flip

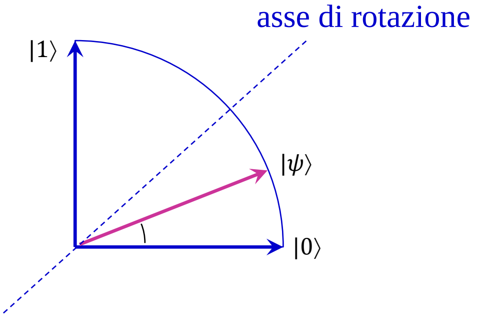


27

27

rotazione causata da bit flip

- dobbiamo sempre ricordare che i numeri sono complessi



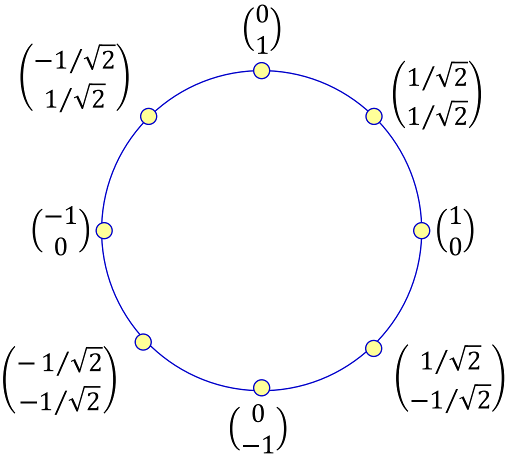
28

28

30-quantum-porte-qubit-un-bit-08

effetto di bit flip su alcuni stati

- $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} =$

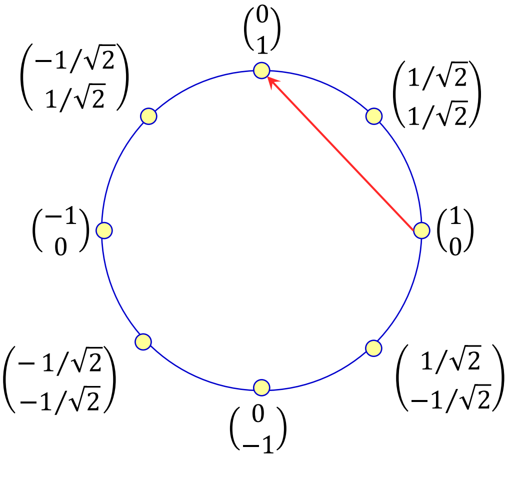


29

29

effetto di bit flip su alcuni stati

- $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$



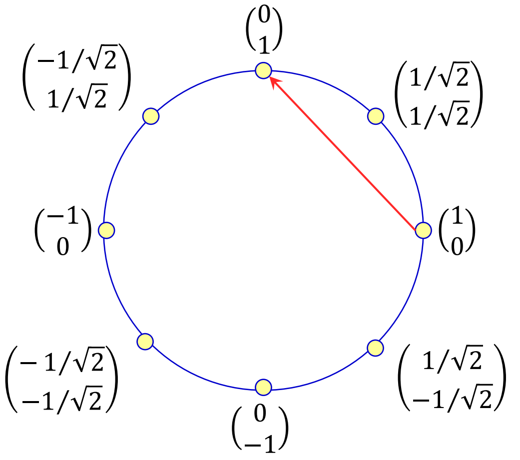
30

30

30-quantum-porte-qubit-un-bit-08

effetto di bit flip su alcuni stati

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$

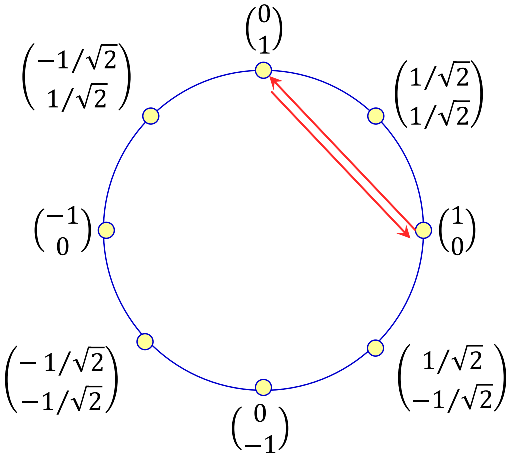


31

31

effetto di bit flip su alcuni stati

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



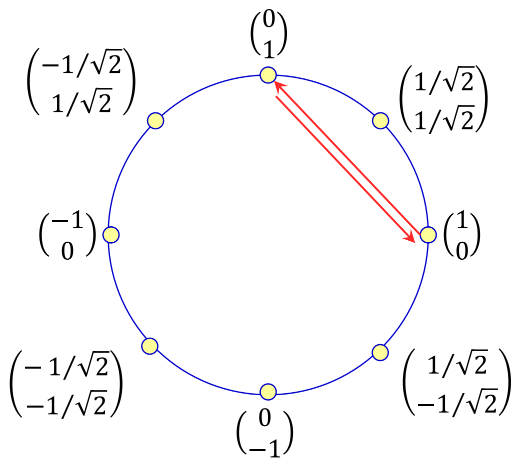
32

32

30-quantum-porte-qubit-un-bit-08

effetto di bit flip su alcuni stati

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} =$

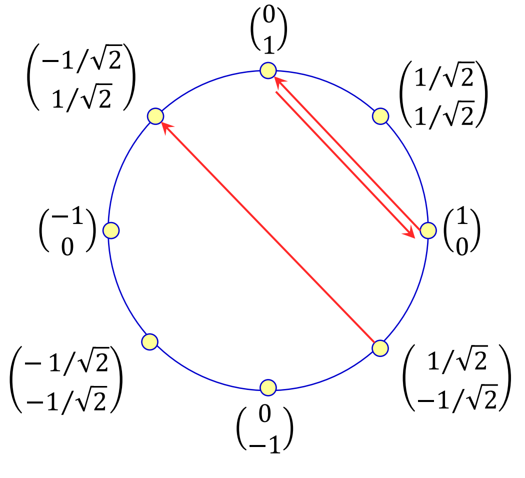


33

33

effetto di bit flip su alcuni stati

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$



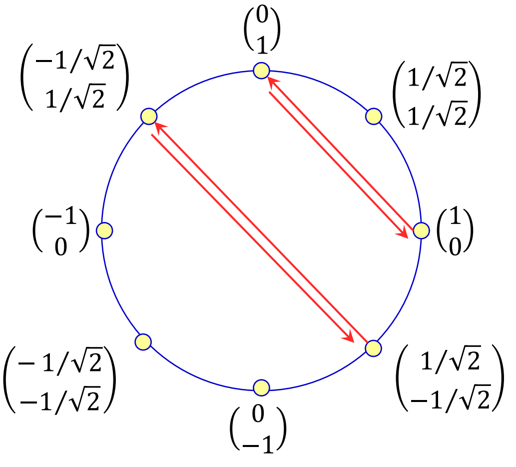
34

34

30-quantum-porte-qubit-un-bit-08

effetto di bit flip su alcuni stati

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

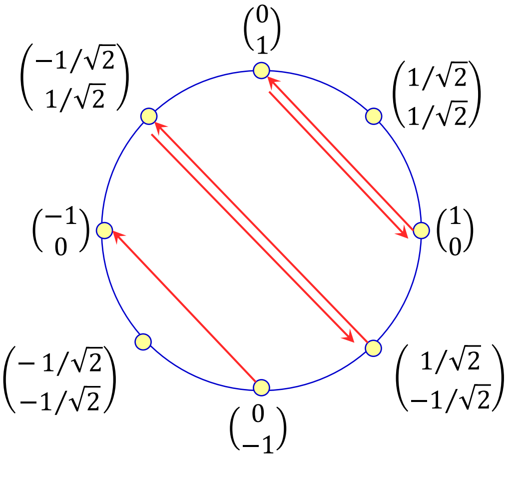


35

35

effetto di bit flip su alcuni stati

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

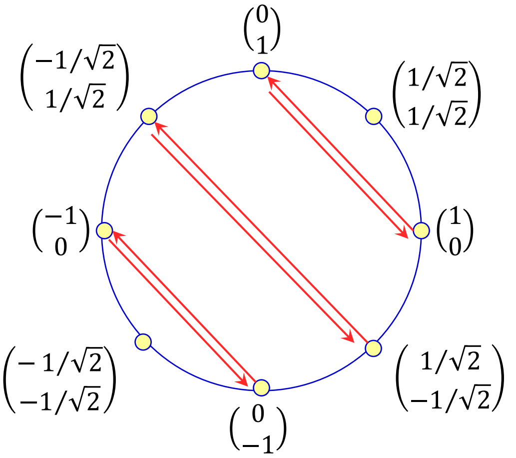


36

36

effetto di bit flip su alcuni stati

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

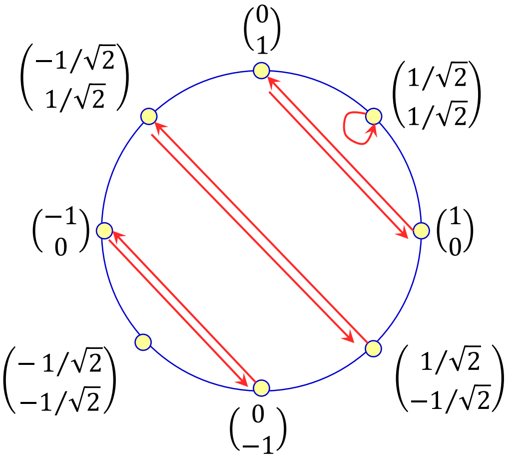


37

37

effetto di bit flip su alcuni stati

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

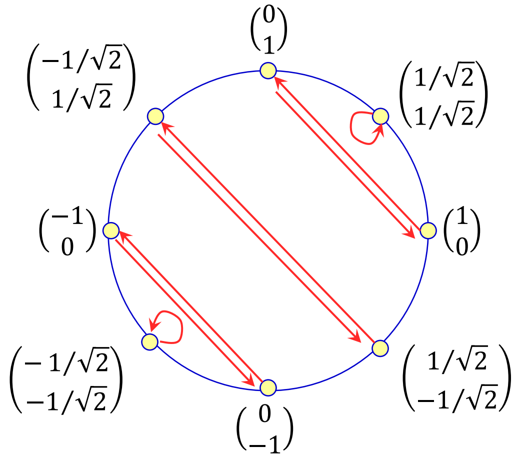


38

38

effetto di bit flip su alcuni stati

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$



39

39

l'operatore phase flip

- supponiamo che il qubit d'ingresso sia in $|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$, l'operatore *phase flip* applica allo stato quanto specificato nella matrice $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- il risultato è $Z|\psi\rangle = Z\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ -\alpha_1 \end{pmatrix} = \alpha_0|0\rangle - \alpha_1|1\rangle$

40

40

30-quantum-porte-qubit-un-bit-08

l'operatore phase flip – esempi

- se applichiamo phase flip a $|0\rangle$ otteniamo
$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}|0\rangle = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = |0\rangle$
- se invece applichiamo phase flip a $|1\rangle$ otteniamo
$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}|1\rangle = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix} =$
$-\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = -|1\rangle$

41

41

l'operatore phase flip e la sign-base

- se applichiamo $Z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ allo stato $|+\rangle = {}^1/_{\sqrt{2}}\,|0\rangle + {}^1/_{\sqrt{2}}\,|1\rangle$ otteniamo $Z|+\rangle = {}^1/_{\sqrt{2}}\,|0\rangle - {}^1/_{\sqrt{2}}\,|1\rangle = |-\rangle$
- viceversa $Z|-\rangle = |+\rangle$

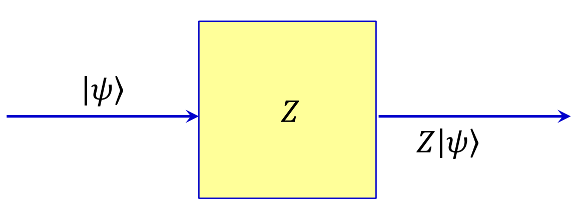
42

42

l'operatore phase flip *è un operatore*

- anche in questo caso dobbiamo verificare che $Z^{\dagger}Z = ZZ^{\dagger} = I$
- e anche in questo caso $Z^{\dagger} = Z$ (la coniugata trasposta di Z rimane Z)
- quindi occorre verificare che $Z^2 = I$
- effettivamente abbiamo che $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

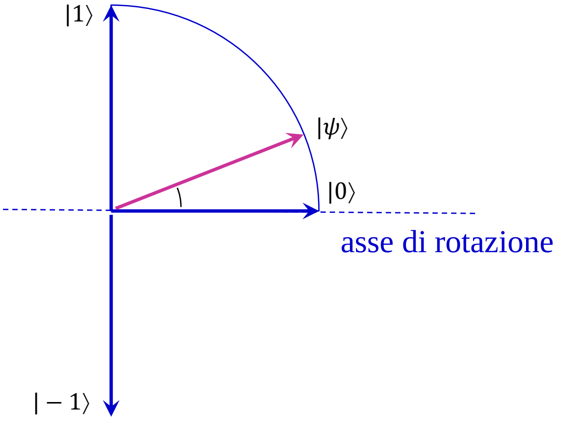
un disegno per rappresentare phase flip



30-quantum-porte-qubit-un-bit-08

rotazione causata da phase flip

- dobbiamo sempre ricordare che i numeri sono complessi

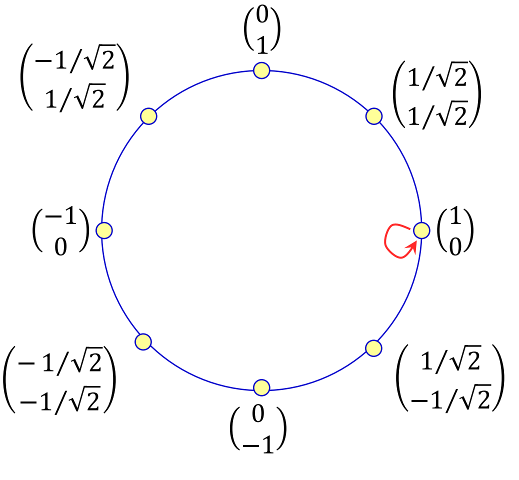


45

45

effetto di phase flip su alcuni stati

- $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

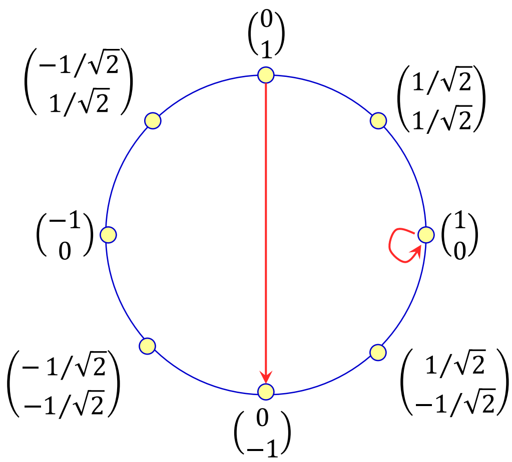


46

46

effetto di phase flip su alcuni stati

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

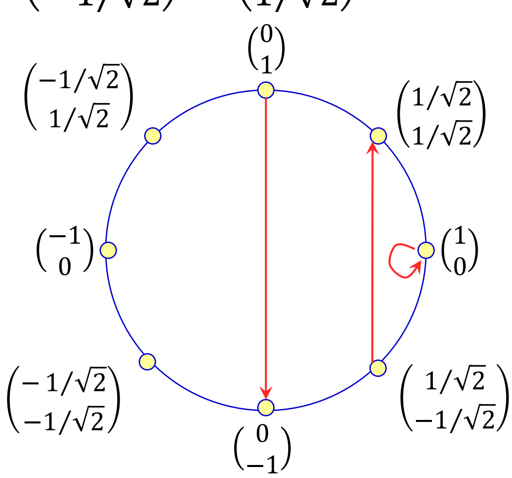


47

47

effetto di bit flip su alcuni stati

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

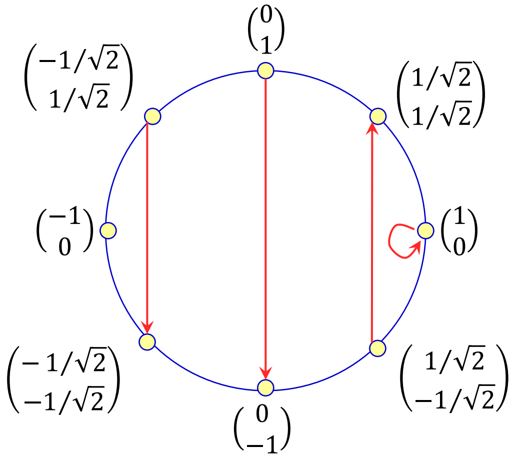


48

48

effetto di phase flip su alcuni stati

- $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

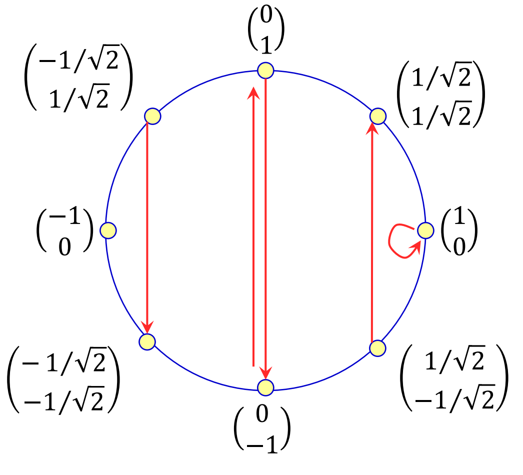


49

49

effetto di phase flip su alcuni stati

- $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

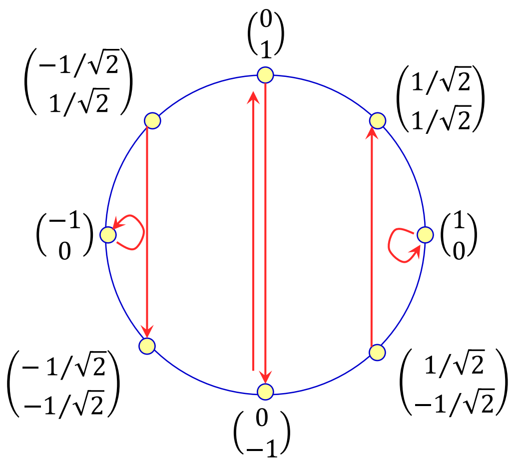


50

50

effetto di phase flip su alcuni stati

- $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}$

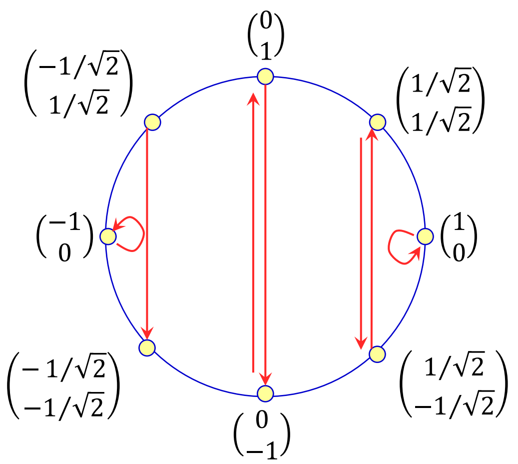


51

51

effetto di phase flip su alcuni stati

- $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

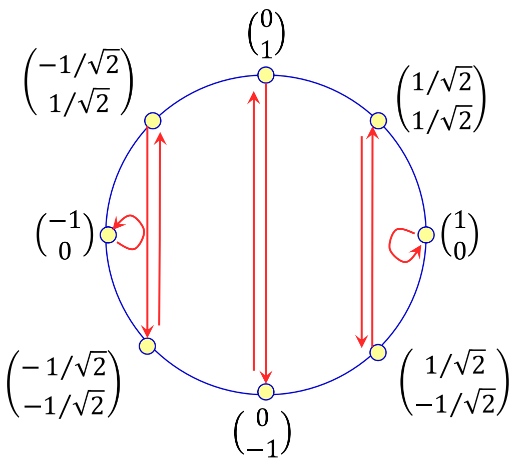


52

52

effetto di phase flip su alcuni stati

- $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$



53

53

un modo per esprimere gli operatori

- ricordiamo che $|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$
  – quindi, per analogia, possiamo chiamare $\langle 0| = (1 \quad 0)$
- ricordiamo che $|1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
  – quindi, per analogia, possiamo chiamare $\langle 1| = (0 \quad 1)$
- ricordando che $X = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ abbiamo $X = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|$, infatti $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(1 \quad 0) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0 \quad 1) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

54

54

30-quantum-porte-qubit-un-bit-08

es. – esprimere Z in modo analogo

- ricordando che $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- abbiamo $Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$
  - infatti $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

55

55

l'operatore Y

- supponiamo che il qubit d'ingresso sia in $|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$, l'operatore Y applica allo stato quanto specificato nella matrice $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
- il risultato è $Y|\psi\rangle = Y\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -\alpha_0 \end{pmatrix} = \alpha_1\,|0\rangle - \alpha_0|1\rangle$

56

56

30-quantum-porte-qubit-un-bit-08

l'operatore Y – esempi

- se applichiamo Y a $|0\rangle$ otteniamo $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -|1\rangle$
- se invece applichiamo Y a $|1\rangle$ otteniamo $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$

57

57

l'operatore Y *è un operatore*

- perché Y sia un operatore legittimo per un qubit deve essere una unitary transformation
- dobbiamo quindi verificare che $Y^\dagger Y = YY^\dagger = I$
- in questo caso $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $Y^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- e quindi $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

58

58

30-quantum-porte-qubit-un-bit-08

qual è il rapporto tra X, Y e Z?

- ricordiamo:
  - $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
  - $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
  - $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- quindi $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = ZX$

59

59

operatori di Pauli

- gli operatori X, Y e Z, assieme all'operatore I (identità), sono anche noti come operatori di Pauli
  - l'operatore Y è talvolta definito in modo diverso
- ampiamente utilizzati

60

60