

Proiezioni

Il trattamento di dati tridimensionali, siano essi modelli grafici sintetici o dati reali, è più complesso rispetto al caso bidimensionale, sia perchè c'è una dimensione in più, sia perchè i dispositivi di uscita (monitor, stampanti ecc.) sono bidimensionali. In questo capitolo si tratta principalmente il problema di come visualizzare dati 3D su dispositivi 2D. Il mezzo per fare questo sono le *proiezioni*. In due dimensioni gli oggetti sono visualizzati in modo semplice specificando la parte del piano che si desidera vedere (la *window*) ed la parte del dispositivo di uscita su cui disegnare (la *viewport*). In tre dimensioni si deve specificare un volume, cioè la parte di spazio che contiene gli oggetti che si vogliono vedere, detto *view volume*, una proiezione (con i suoi parametri) su di un certo piano di proiezione, una *window* su questo piano e la *viewport* sul dispositivo di uscita. Nel seguito verranno definiti i vari tipi di proiezioni ed le formule matematiche necessarie per applicarle a punti nello spazio, lasciando ai capitoli seguenti i metodi per il modellamento di oggetti 3D e le tecniche necessarie per la loro resa realistica, come l'eliminazione delle linee nascoste e l'ombreggiatura.

4.1 Introduzione

In generale, una proiezione trasforma i punti definiti in un sistema di riferimento N -dimensionale in punti in un sistema di riferimento di dimensioni minori di N . Qui ci si occupa della trasformazione di punti 3D in punti 2D, anche se sono frequenti in grafica proiezioni da spazi di dimensioni maggiori di tre. La proiezione di un punto 3D è definita come l'intersezione di una linea retta, detta *raggio proiettore*, che emana dal *centro di proiezione* (un punto che può essere all'infinito) e passa dal punto da proiettare, con il *piano di proiezione*. La Fig. 4.1 mostra due diverse proiezioni di un segmento: per fortuna la proiezione di un segmento è ancora un segmento, per cui è sufficiente calcolare le proiezioni dei soli punti estremi.

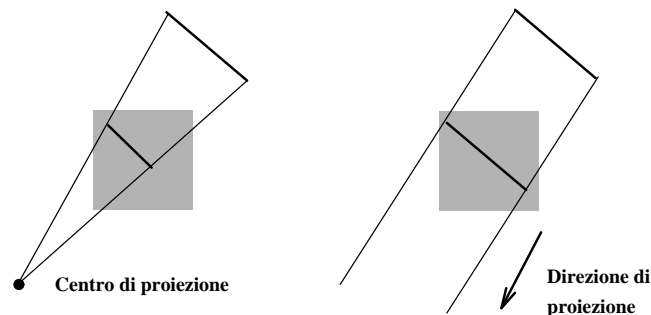


Figura 4.1 Proiezione prospettica e parallela di un segmento.

La classe di proiezioni che tratteremo è quindi quella delle *proiezioni planari geometriche*, detta così poichè la superficie di proiezione è piana ed i raggi proiettori sono linee rette. Vi sono proiezioni che non appartengono a questa classe, ad esempio molte proiezioni cartografiche sono non planari e/o non geometriche: in generale per esse non vale che la proiezione di un segmento è ancora un segmento.

Le proiezioni planari geometriche (nel seguito dette semplicemente proiezioni) si dividono in due classi principali: proiezioni prospettiche e proiezioni parallele. La differenza è che nelle prime (prospettiche) la distanza fra centro di proiezione e piano di proiezione è finita, mentre nelle seconde

(parallele) è infinita, per cui i raggi proiettori sono, appunto, paralleli. Definendo le proiezioni prospettiche si parlerà di centro di proiezione, mentre per le parallele si userà il termine di *direzione di proiezione*. Il centro di proiezione è un punto e si può esprimere, in coordinate omogenee, come $(x, y, z, 1)$, mentre la direzione di proiezione è un vettore, cioè la differenza fra due punti, ovvero $(x, y, z, 1) - (x', y', z', 1) = (a, b, c, 0)$: come si vede punti all'infinito e direzioni sono equivalenti, almeno in coordinate omogenee.

4.1.1 Proiezioni prospettiche

Questo tipo di proiezioni, il più diffuso, corrisponde a quanto viene realizzato da una macchina fotografica o, con minore approssimazione, dall'occhio umano (la cui superficie di proiezione non è piana). In particolare gli oggetti appaiono più piccoli al crescere della distanza dal piano di proiezione e le linee parallele che non sono parallele al piano di proiezione danno origine a linee proiettate che convergono verso un punto al finito nel piano di proiezione, detto punto di fuga. Ovviamente esistono infiniti punti di fuga, uno per ciascuna delle infinite direzioni nello spazio. Altrettanto ovviamente gli angoli fra le linee non sono mantenute dalla proiezione, tranne che gli angoli formati da due linee entrambe parallele al piano di proiezione. Stessa cosa per le lunghezze, non misurabili direttamente. I punti di fuga relativi alle linee parallele ad uno degli assi sono detti punti di fuga principali. Si usa catalogare le proiezioni prospettiche a seconda del numero di punti di fuga principali, da uno a tre, ovvero, in modo equivalente, a seconda del numero di assi principali intersecati dal piano di proiezione. Ad esempio se il piano di proiezione interseca solo l'asse z , ed è quindi perpendicolare ad esso, solo l'asse z ha punto di fuga principale, mentre le linee parallele ad x o y restano parallele dopo la proiezione. La Fig. 4.2 mostra due differenti proiezioni ad un punto di fuga di un cubo allineato con gli assi. La Fig. 4.3 mostra la prospettiva dello stesso cubo a due punti di fuga. La prospettiva a

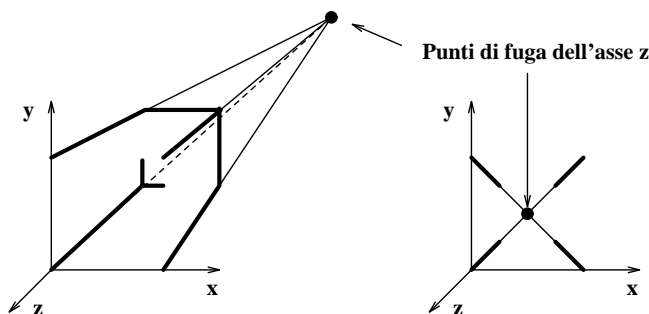


Figura 4.2 Due proiezioni prospettiche ad un punto di fuga di un cubo allineato agli assi.

due punti di fuga è normalmente usata nel disegno tecnico a causa della sua piacevolezza e realismo. La prospettiva a tre punti di fuga (con anche le linee verticali convergenti) è invece poco usata: oltre a non aggiungere ulteriore realismo l'effetto è quello che si ottiene fotografando con la macchina fotografica inclinata verso l'alto o verso il basso (tipiche foto di bambini col "testone" e di palazzi "a piramide"), cioè quasi sempre penoso.

4.1.2 Proiezioni parallele

Le proiezioni parallele si dividono in due categorie: nelle proiezioni parallele *ortografiche* la direzione di proiezione corrisponde alla normale del piano di proiezione (o alla direzione opposta, tanto è lo stesso), mentre nelle proiezioni parallele *oblique* ciò non avviene.

I tipi più comuni di proiezioni ortografiche sono la *pianta* ed i due *alzati frontale* e *laterale*: in esse la direzione di proiezione coincide con un asse principale ed il piano di proiezione è il piano identificato dagli altri due assi. In Fig. 4.4 sono mostrati questi tre tipi di proiezione ortografica di una casa: tali proiezioni sono comunemente usati nella progettazione, essendo distanze ed angoli (di linee parallele al piano di proiezione) misurabili direttamente dal disegno. D'altra parte la struttura 3D dell'oggetto raffigurato è spesso difficilmente derivabile, poichè si vede solo un lato dell'oggetto, per cui sono in genere accompagnate da assonometrie o prospettive esplicative.

Le proiezioni *assonometriche ortografiche* usano un piano di proiezione che non è normale ad alcuno degli assi principali, e quindi visualizzano più lati di un oggetto insieme. Assomigliano un po' alla prospettiva, a parte per il fatto che non vi è rimpicciolimento con l'aumento della distanza. Il parallelismo delle linee viene conservato, mentre gli angoli no. Le lunghezze dei segmenti paralleli agli assi possono essere misurate, anche se in generale usando fattori di scala differenti.

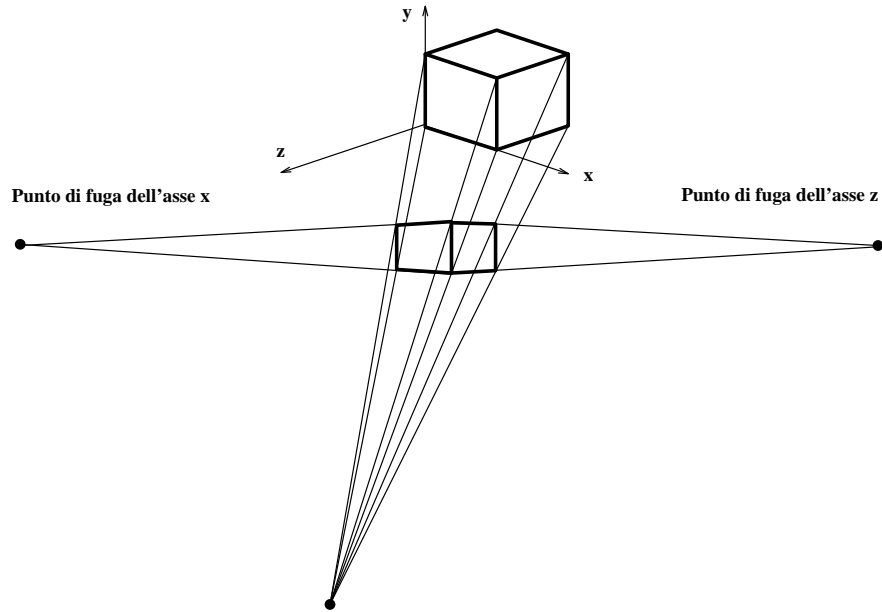


Figura 4.3 Proiezione prospettica a due punti di fuga di un cubo allineato agli assi.

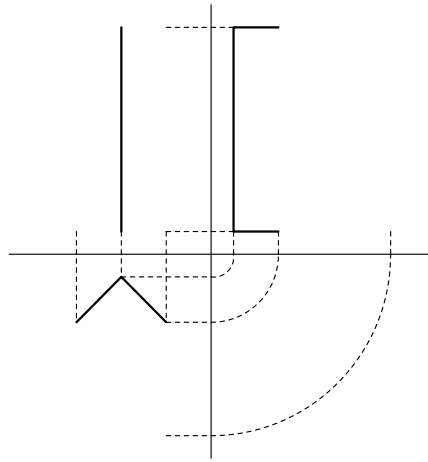


Figura 4.4 Proiezioni parallele ortografiche (pianta, fronte e lato) di una casa.

La proiezione *isometrica* è un esempio di proiezione assonometrica ortografica spesso usata. La normale al piano di proiezione, e quindi la direzione di proiezione, forma angoli uguali con i tre assi: se tale direzione si esprime come (d_x, d_y, d_z) allora deve valere che $|d_x| = |d_y| = |d_z|$, cioè che $\pm d_x = \pm d_y = \pm d_z$. Ci sono quindi otto direzioni possibili, o quattro se non si eliminano le linee nascoste. La proiezione isometrica ha il vantaggio che il fattore di scala è uguale per i segmenti paralleli ai tre assi, che sono così facilmente misurabili. In Fig. 4.5 si vede la proiezione isometrica di un cubo con i lati paralleli agli assi.

Le proiezioni *oblique*, cioè la seconda classe di proiezioni parallele, sono caratterizzate dal fatto che la direzione di proiezione e la normale al piano di proiezione sono diverse. Esse combinano le proprietà delle proiezioni ortografiche pianta ed alzati con quelle delle assonometrie: il piano di proiezione è perpendicolare ad uno degli assi, e quindi le lunghezze e gli angoli delle linee parallele agli altri due assi sono conservate, ma anche le linee perpendicolari al piano di proiezione si vedono e possono essere misurate, in generale con un certo fattore di scala.

Due proiezioni oblique usate frequentemente sono le proiezioni *cavaliera* e *cabinet*. La proiezione cavaliera è caratterizzata dal fatto che la direzione di proiezione forma un angolo di 45° col piano di proiezione. Quindi un segmento perpendicolare al piano di proiezione mantiene la sua lunghezza. In Fig. 4.6 si vedono due proiezioni cavaliera di un cubo: da notare che resta un grado di libertà, ovvero l'angolo che i segmenti perpendicolari al piano di proiezione formano con l'orizzontale. Tale angolo è solitamente di 30° o 45° . Le direzioni di proiezione sono $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, -1)$ per $\alpha = 45^\circ$ e $(\sqrt{3}/2, 1/2, -1)$ per $\alpha = 30^\circ$.

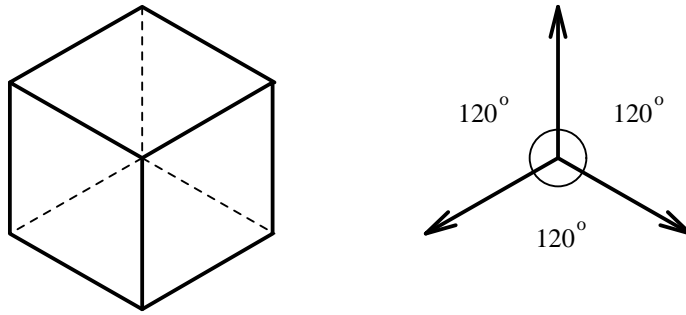


Figura 4.5 Proiezione isometrica di un cubo.

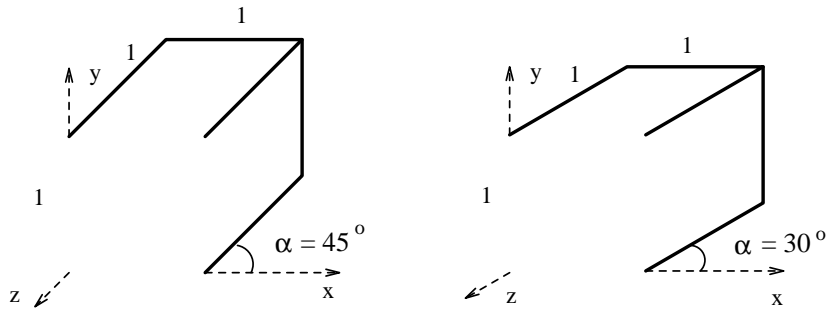


Figura 4.6 Proiezione cavaliera del cubo unitario sul piano $z = 0$. Tutti i lati (paralleli agli assi) mantengono la loro lunghezza.

Le proiezioni cabinet, come quelle in Fig. 4.7, hanno una direzione di proiezione che forma un angolo di $\arctan(2) = 63.4^\circ$ col piano di proiezione, cosicché i segmenti perpendicolari al piano di proiezione hanno una lunghezza dopo la proiezione pari a metà del vero. Le proiezioni cabinet sono un filo più realistiche delle cavalieri, a causa dell'accorciamento dei segmenti. Le direzioni di proiezione sono $(\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/4, -1)$ per $\alpha = 45^\circ$ e $(\sqrt{3}/4, 1/4, -1)$ per $\alpha = 30^\circ$.

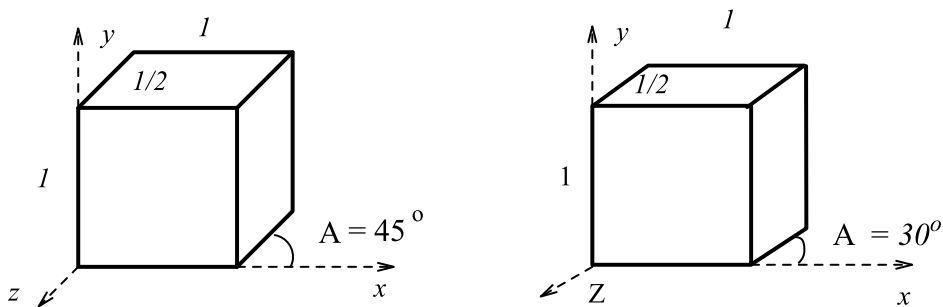


Figura 4.7 Proiezione cabinet del cubo unitario sul piano $z = 0$. I lati paralleli ad x e y mantengono la loro lunghezza, quelli paralleli a z hanno lunghezza $1/2$.

In Fig. 4.8 sono mostrati gli angoli che determinano le proiezioni oblique. Il piano (x, y) è il piano di proiezione ed il punto P' è la proiezione di $(0, 0, 1)$. L'angolo α e la lunghezza l sono le stesse delle Figure 4.6 e 4.7. La direzione di proiezione è $(dx, dy, 1)$, dove ovviamente $dx = l \cos \alpha$ e $dy = l \sin \alpha$. L'angolo β formato dalla direzione di proiezione con il piano di proiezione è legato ad l dalla relazione $\beta = \arctan(1/l)$. E' quindi possibile definire una arbitraria proiezione obliqua definendo, ad esempio, l (lunghezza proiettata di un segmento unitario perpendicolare al piano di proiezione) ed α (angolo che tale segmento proiettato forma con l'orizzontale).

La Fig. 4.9 sintetizza le varie classi di proiezioni. In comune è il fatto che proiettano su di un piano e che i raggi proiettori sono rette. Per le proiezioni prospettiche è necessario definire un centro di proiezione (un punto, detto di vista), mentre per le parallele si definisce una direzione di proiezione, ovvero un punto all'infinito.

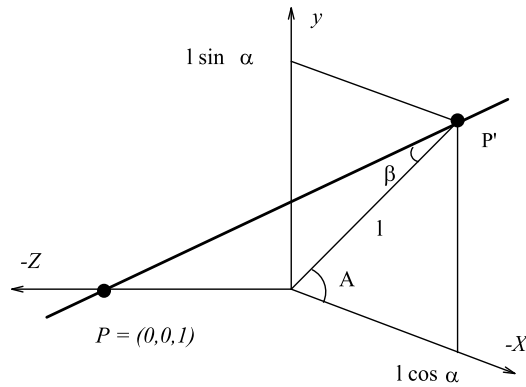


Figura 4.8 Proiezione obliqua parallela del punto $P = (0, 0, 1)$ nel punto $P' = (l \cos \alpha, l \sin \alpha, 0)$. La direzione di proiezione è $P' - P = (l \cos \alpha, l \sin \alpha, -1)$.

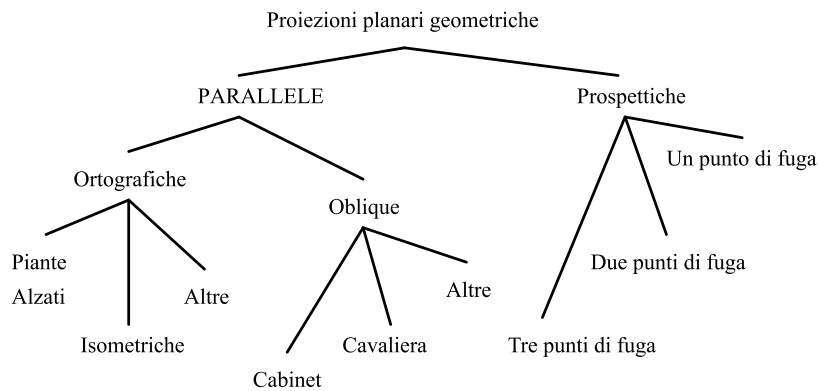


Figura 4.9 Le sottoclassi in cui si usa dividere le proiezioni planari geometriche.

4.2 La definizione delle proiezioni

Il passaggio da entità grafiche definite nello spazio 3D ad immagini bidimensionali richiede la definizione di due passi distinti. Nel primo si specifica il volume di vista (*view volume*): tutto quello che è esterno ad esso viene ignorato (non visualizzato). Nel secondo passo si specificano i parametri della proiezione. L'insieme di questi due passi contiene tutta l'informazione necessaria per passare da 3D a 2D: per visualizzare l'informazione 2D contenuta nel piano di proiezione è in realtà necessario specificare ancora la trasformazione che porta in coordinate "schermo", ma è banale.

Vediamo ora come specificare concretamente i dati necessari, la notazione è quella che si trova in [FvDFH90]. I numerosi parametri da definire permetteranno nel seguito di derivare le formule necessarie a realizzare i vari tipi di proiezione. Ovviamente sono possibili (ed usati, purtroppo) diversi modi per definire i parametri delle proiezioni: quello che conta è cosa deve essere definito, non come.

Il piano di proiezione, a volte indicato anche come *view plane*, si definisce mediante un punto sul piano, detto *view reference point* o **VRP**, ed un vettore normale al piano, detto *view-plane normal* o **VPN**. Dato il piano di proiezione è necessario definire una finestra (*window*) su tale piano: il contenuto della finestra sarà in seguito trasformato nella *viewport*, cioè nella parte di dispositivo di uscita dedicata alla visualizzazione. Prima è però necessario definire un sistema di assi cartesiani ortogonali (u, v, n) , detto **VRC**, *viewing-reference coordinate*, solidale con il piano: un modo è quello di fissare l'origine coincidente con il **VRP** e l'asse n (l'unico che non giace sul piano di proiezione) parallelo a **VPN**. Resta un grado di libertà, ovvero un angolo che specifica l'orientamento dei restanti due assi. Un sistema comodo è quello di definire un ulteriore vettore, *view up vector* o **VUP**, la cui proiezione (nel senso di piede della perpendicolare!) sul piano di proiezione cade sulla parte positiva dell'asse v . La direzione dell'asse u è a questo punto obbligata, siccome il sistema di riferimento u, v, n deve formare una terna ortogonale destra, come mostrato in Fig. 4.10. Il punto **VRP** ed i due vettori **VPN** e **VUP** sono specificati utilizzando il sistema di coordinate "mondo" x, y, z , destro pure lui. Alcuni sistemi grafici usano direttamente l'asse y mondo come **VUP**, ma questo, oltre ad essere restrittivo, rende la terna **VRC** indefinita se il vettore **VPN** è parallelo all'asse y .

A questo punto è possibile definire la *window*, cioè la parte del piano di proiezione che verrà

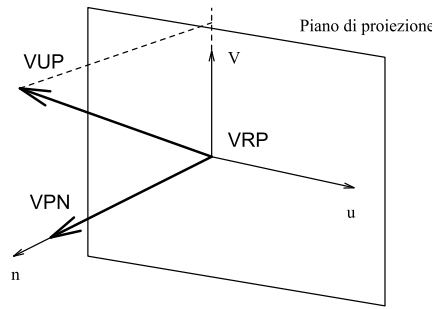


Figura 4.10 Definizione del piano di proiezione e della terna destra solida ad esso.

visualizzata nella *viewport* del dispositivo di uscita. Tale *window* si specifica mediante i limiti inferiori e superiori in coordinate u e v : non è necessario che sia simmetrica rispetto al **VRP**, nè che lo contenga, mentre è ovvio (dato come si definisce) che sia un rettangolo allineato con gli assi. Il centro della *window*, definito implicitamente dai limiti in u e v , è detto **CW**.

Il centro di proiezione (**COP**, *Center of projection*) e la direzione di proiezione (**DOP**, *direction of projection*) sono definiti da un *projection reference point* o **PRP** e da un indicatore del tipo di proiezione. Se la proiezione è di tipo prospettico il punto **PRP** è il centro di proiezione, detto anche punto di vista. Se la proiezione è parallela la direzione di proiezione (**DOP**) è definita dal vettore che unisce **PRP** con **CW** (OCCHIO, con il centro della *window*, non con **VRP**!). In Fig. 4.11 sono illustrati i due casi.

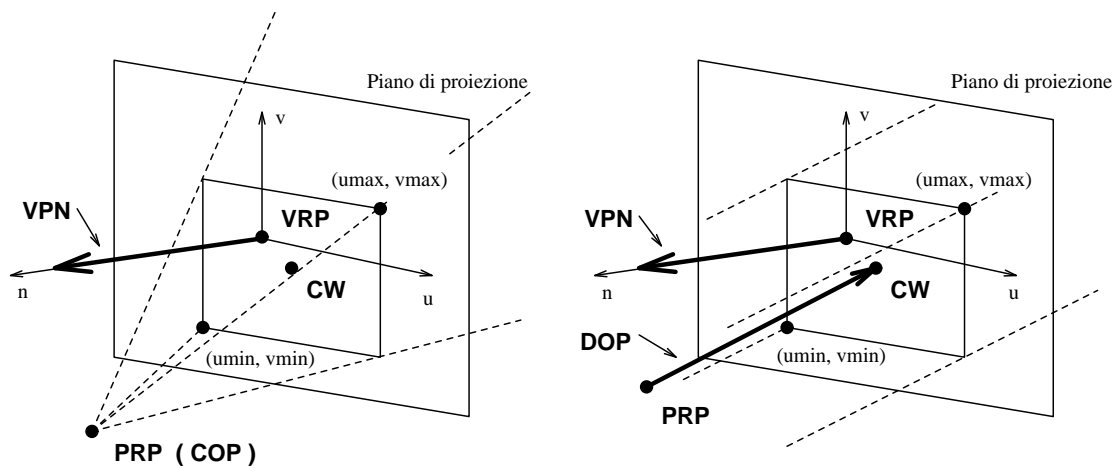


Figura 4.11 Proiezioni prospettica e parallela. Sono visualizzati la piramide di vista (per la prospettiva) e la direzione di proiezione più il parallelepipedo infinito di vista (per la parallela). Da notare che la proiezione parallela è obliqua, non essendo la direzione di proiezione (**DOP**) parallela al vettore **VPN**.

Il punto **PRP** viene definito in coordinate **VRC** anzichè in coordinate mondo. Questo semplifica i calcoli in alcuni casi e li complica in altri, tutto non si può avere.

Resta ora da definire il volume di vista (*view volume*), cioè la parte di spazio 3D che verrà troncata (se è il caso) e proiettata. Per la proiezione prospettica il volume di vista è la piramide semi-infinita con apice nel centro di proiezione e la cui intersezione con il piano di proiezione coincide con la *window*. I punti dietro il centro di proiezione non sono inclusi nel volume di vista e quindi non vengono proiettati. Nel caso di proiezione parallela il volume di vista è un parallelepipedo infinito con spigoli paralleli alla direzione di proiezione.

E' spesso utile limitare ulteriormente il volume di vista in modo da renderlo finito. Questo, nella prospettiva, evita di proiettare oggetti troppo vicini al centro di proiezione (di cui comparirebbero magari solo alcuni segmenti sconnessi) o troppo lontani (tipico esempio un oggetto formato da migliaia di segmenti che, a causa della distanza, finiscono tutti nello stesso punto: se l'uscita è su schermo questo rallenta molto, se è su plotter si buca la carta...). Inoltre eliminare parti di oggetti può aiutare a capirne la struttura. Per limitare il volume di vista si definiscono due piani detti *front clipping plane* e *back clipping plane* o anche *hither* e *yon planes*. Questi piani sono paralleli al piano di proiezione e vengono definiti mediante due distanze (con segno) a partire dal *view reference point*

(**VRP**) misurate lungo la direzione definita da **VPN**. Il *front clipping plane* è definito dalla quantità **F** (*front distance*): se **F** è positiva il piano è nel semispazio limitato dal piano di proiezione che contiene **PRP**, se **F** è negativa dall'altra parte. Stessa cosa per **B**, *back distance*. Ovviamente **F** deve essere maggiore di **B** per avere un volume positivo (e vedere qualcosa). In Fig. 4.12 è riportato il caso di proiezione parallela ortografica. Per la proiezione obliqua il volume che si ottiene è un parallelepipedo non retto, per la prospettiva una piramide trunca (retta solo se **DOP**, cioè il vettore che unisce **PRP** con **CW**, e **VPN** sono paralleli).

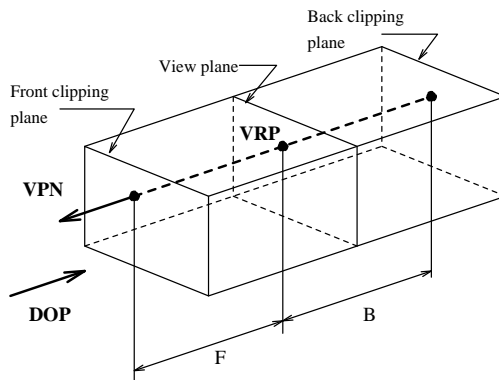


Figura 4.12 Volume di vista troncato per il caso di proiezione parallela ortografica. In figura **F** è positiva e **B** negativa.

4.3 La matematica delle proiezioni

In questa sezione vengono introdotte le formule necessarie per il calcolo dei vari tipi di proiezioni planari geometriche. Per iniziare si considerano i casi di proiezioni prospettiche aventi il piano di proiezione normale all'asse z a distanza d dall'origine e di proiezione parallela sul piano $z = 0$. Entrambe le proiezioni possono essere definite da matrici 4×4 : questo è utile, perchè si possono comporre con le matrici di trasformazione. Nel seguito si vedrà come trattare proiezioni arbitrarie.

4.3.1 Casi particolari

Iniziamo con il caso di proiezione prospettica sul piano $z = d$ con centro di proiezione coincidente con l'origine. Sia $P = (x, y, z)$ il generico punto da proiettare. Per calcolare $P_p = (x_p, y_p, z_p)$, cioè la proiezione di P sul piano di proiezione, si possono usare le relazioni di similarità fra i triangoli di Fig. 4.13

$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{z}, \quad \frac{y_p}{d} = \frac{y}{z}.$$

Moltiplicando per d si ottiene

$$x_p = \frac{d \cdot x}{z} = \frac{x}{z/d}, \quad y_p = \frac{d \cdot y}{z} = \frac{y}{z/d}. \quad (4.1)$$

La distanza d corrisponde quindi ad un semplice fattore di scala per x_p e y_p . La divisione per z rende la proiezione degli oggetti lontani più piccola di quella degli oggetti vicini. Tutti i valori di z sono accettabili, a parte lo zero: è possibile quindi proiettare punti posti fra il centro di proiezione ed il piano di proiezione o dietro il centro di proiezione.

La trasformazione espressa dall'Eq. 4.1 può essere ottenuta in coordinate omogenee mediante la matrice 4×4 :

$$M_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Moltiplicando il generico punto $P = [x \ y \ z \ 1]^T$ per la matrice M_{per} si ottiene il punto proiettato P_p

$$P_p = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{bmatrix} = M_{per} \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

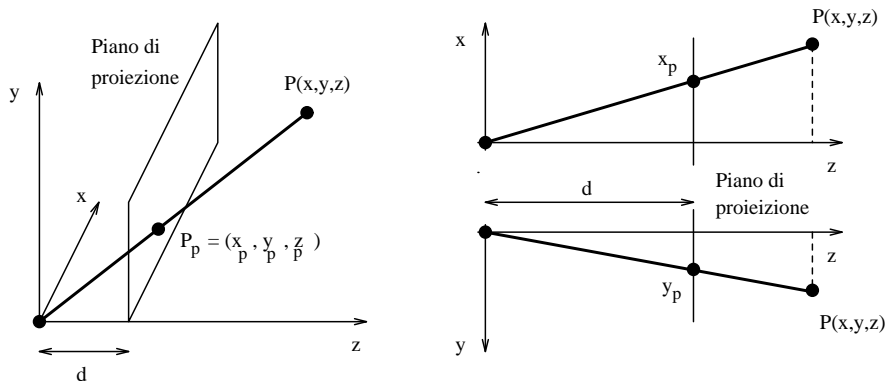


Figura 4.13 Proiezione prospettica del punto $P(x, y, z)$ sul piano $z = d$ con centro di proiezione in $(0, 0, 0)$. Il punto P proiettato è $P_p(x_p, y_p, z_p)$.

ovvero

$$P_p = [X \ Y \ Z \ W]^T = \left[x \ y \ z \ \frac{z}{d} \right]^T \quad (4.4)$$

Dividendo ora per W , cioè z/d , si ottiene

$$P_p = \left[\frac{x}{z/d} \ \frac{y}{z/d} \ d \ 1 \right]^T \quad (4.5)$$

Il risultato è ovviamente quello dell'Eq. 4.1, più la corretta trasformazione di z sul piano di proiezione.

Una formulazione alternativa (del tutto equivalente) si ottiene posizionando il piano di proiezione in $z = 0$ ed il centro di proiezione in $(0, 0, -d)$, come indicato in Fig. 4.14. Le relazioni di similarità

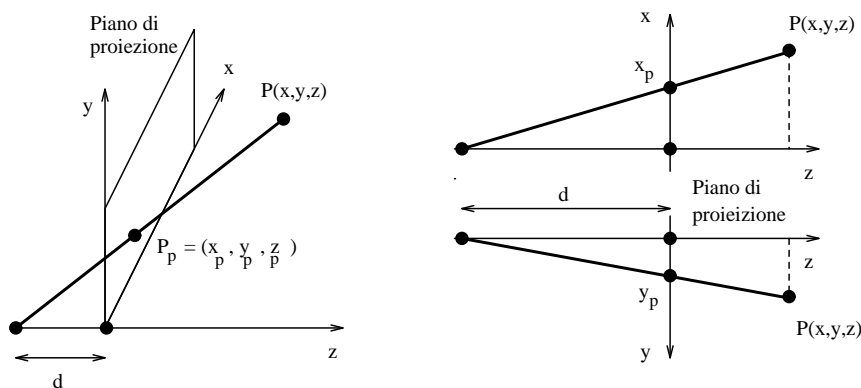


Figura 4.14 Proiezione prospettica alternativa.

fra i triangoli sono ora

$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{z+d}, \quad \frac{y_p}{d} = \frac{y}{z+d}.$$

Moltiplicando per d si ottiene

$$x_p = \frac{d \cdot x}{z+d} = \frac{x}{(z/d)+1}, \quad y_p = \frac{d \cdot y}{z+d} = \frac{y}{(z/d)+1}. \quad (4.6)$$

In forma matriciale si ottiene

$$M_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Questa formulazione rimane valida anche quando d , distanza fra il piano ed il centro di proiezione, tende all'infinito.

La proiezione ortografica sul piano $z = 0$ è banale: la direzione di proiezione è la perpendicolare al piano di proiezione, cioè l'asse z in questo caso. Quindi un punto $P = (x, y, z)$ si proietta come

$$x_p = x, \quad y_p = y.$$

La matrice che descrive la proiezione è quindi espressa dalla matrice

$$M_{ort} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Da notare come la matrice in 4.7 diventi la precedente quando d tende all'infinito.

E' possibile generalizzare M_{per} e M_{ort} in modo tale da poter descrivere qualsiasi tipo di proiezione. La sola limitazione rimane quella di avere il piano di proiezione perpendicolare all'asse z .

In Fig. 4.15 la proiezione del punto $P = (x, y, z)$ sul piano di proiezione $z = z_p$ è $P_p = (x_p, y_p, z_p)$. Il centro di proiezione (COP) è a distanza Q dal punto $(0, 0, z_p)$. La direzione da $(0, 0, z_p)$ a COP è data dal vettore normalizzato (d_x, d_y, d_z) . P_p è sulla linea che unisce COP a P , definita parametricamente da

$$\text{COP} + t(P - \text{COP}), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

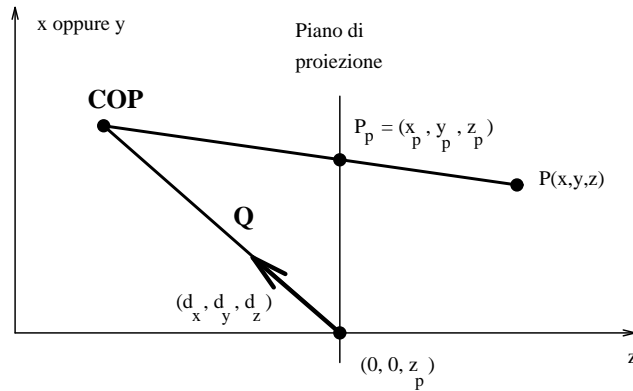


Figura 4.15 L'intersezione della linea che unisce COP a P con il piano di proiezione $z = z_p$ è la proiezione del punto P . COP è a distanza Q dal punto $(0, 0, z_p)$, in direzione (d_x, d_y, d_z) .

Chiamando $P' = (x', y', z')$ il generico punto sulla linea ed essendo $\text{COP} = (0, 0, z_p) + Q(d_x, d_y, d_z)$ si ottiene

$$x'(t) = Qd_x + (x - Qd_x)t \quad (4.9)$$

$$y'(t) = Qd_y + (y - Qd_y)t \quad (4.10)$$

$$z'(t) = (z_p + Qd_z) + (z - (z_p + Qd_z))t \quad (4.11)$$

Sostituendo z_p a z' si trova il punto P_p , proiezione di P : dall'Eq. 4.11 si ottiene

$$t = \frac{z_p - (z_p + Qd_z)}{z - (z_p + Qd_z)} \quad (4.12)$$

Sostituendo nelle 4.9 e 4.10 per trovare $x' = x_p$ e $y' = y_p$ si ottiene

$$x_p = \frac{x - z \frac{d_x}{d_z} + z_p \frac{d_x}{d_z}}{\frac{z_p - z}{Qd_z} + 1} \quad (4.13)$$

$$y_p = \frac{y - z \frac{d_y}{d_z} + z_p \frac{d_y}{d_z}}{\frac{z_p - z}{Qd_z} + 1} \quad (4.14)$$

Per poter trovare una espressione di z_p (che è data) che abbia lo stesso denominatore di x_p ed y_p (così si può mettere tutto in una matrice) è possibile usare il trucco seguente:

$$z_p = z_p \frac{\frac{z_p - z}{Qd_z} + 1}{\frac{z_p - z}{Qd_z} + 1} = \frac{-z \frac{z_p}{Qd_z} + \frac{z_p^2 + z_p Qd_z}{Qd_z}}{\frac{z_p - z}{Qd_z} + 1} \quad (4.15)$$

Le equazioni 4.13, 4.14 e 4.15 possono ora essere espresse mediante una matrice 4×4 , $M_{general}$, costruita in modo tale che la sua ultima riga moltiplicata per $[x \ y \ z \ 1]$ produca il denominatore comune, che corrisponde alla coordinata omogenea W , cioè al divisore di X , Y e Z :

$$M_{general} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{d_x}{d_z} & z_p \frac{d_x}{d_z} \\ 0 & 1 & -\frac{d_y}{d_z} & z_p \frac{d_y}{d_z} \\ 0 & 0 & -\frac{z_p}{Q d_z} & \frac{z_p^2}{Q d_z} + z_p \\ 0 & 0 & -\frac{1}{Q d_z} & \frac{z_p}{Q d_z} + 1 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Da $M_{general}$ possono essere derivate facilmente le tre matrici M_{per} , M_{per}' e M_{ort} tramite i seguenti valori:

$$\begin{array}{rcc} & z_{\mathbf{T}} & Q & [d_x & d_y & d_z] \\ M_{ort} & 0 & \infty & [0 & 0 & -1] \\ M_{per} & d & d & [0 & 0 & -1] \\ M'_{per} & 0 & d & [0 & 0 & -1] \end{array} \quad (4.17)$$

Quando $Q \neq \infty$, $M_{general}$ definisce una proiezione prospettica ad un punto di fuga. La posizione sul piano di proiezione di tale punto di fuga si trova moltiplicando per $M_{general}$ il punto all'infinito dell'asse z , cioè $[0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$. Eseguendo la moltiplicazione e dividendo per W per tornare in tre dimensioni si ottiene:

$$x_{fu} = Q d_x, \quad y_{fu} = Q d_y, \quad z_{fu} = z_p.$$

Dato il punto di fuga desiderato (x_{fu}, y_{fu}) , che giace ovviamente sul piano di proiezione, e la distanza Q dal centro di proiezione si può quindi determinare univocamente $[d_x \ d_y \ d_z]$, dato che ovviamente $\sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = 1$. In modo simile si ricavano le proiezioni Cavaliera e Cabinet (l'angolo α è quello delle figure 4.6 e 4.7):

$$\begin{array}{rcc} & z_{\mathbf{T}} & Q & [d_x & d_y & d_z] \\ Cavaliera & 0 & \infty & [\cos \alpha & \sin \alpha & -1] \\ Cabinet & 0 & \infty & [\frac{\cos \alpha}{2} & \frac{\sin \alpha}{2} & -1] \end{array} \quad (4.18)$$

Ovviamente i valori di $[d_x \ d_y \ d_z]$ devono essere normalizzati in modo che il modulo del vettore sia unitario. E' infine giunta l'ora di togliere anche l'ultimo vincolo (piano di proiezione perpendicolare all'asse z) e di passare alla trattazione delle proiezioni arbitrarie.

4.3.2 Trattazione generale

La trattazione delle proiezioni arbitrarie può ovviamente essere svolta in molti modi. Uno di questi, spesso usato, parte dalla constatazione che uno dei passi computazionalmente più pesanti è il troncamento (*clipping*) rispetto al volume di vista. La soluzione che si può adottare è quella di effettuare una trasformazione geometrica delle entità da proiettare che renda poi facile il troncamento. Nel caso di proiezione parallela un volume di vista particolarmente semplice è quello definito dai sei piani

$$x = -1, \quad x = 1, \quad y = -1, \quad y = 1, \quad z = 0, \quad z = -1. \quad (4.19)$$

Per la proiezione prospettica una scelta possibile è invece

$$x = z, \quad x = -z, \quad y = z, \quad y = -z, \quad z = -z_{min}, \quad z = -1. \quad (4.20)$$

Tali volumi, mostrati in Fig. 4.16, sono detti *volumi di vista canonici*.

Il modo di trattare le proiezioni arbitrarie sarà quindi quello di trovare le *trasformazioni di normalizzazione*, N_{par} e N_{per} , che trasformino il volume di vista voluto in quello canonico.

La sequenza necessaria per passare dalla rappresentazione delle entità tridimensionali espresse in coordinate mondo alla loro visualizzazione su dispositivo bidimensionale è quindi:

1. Applicare la trasformazione di normalizzazione N_{par} oppure N_{per} .
2. Troncare rispetto al volume di vista canonico.
3. Proiettare sul piano di proiezione.
4. Trasformare nella *viewport* bidimensionale in coordinate schermo.

Questa sequenza può essere semplificata unendo i passi 3 e 4 in un'unica trasformazione. Per il caso di proiezione prospettica è inoltre necessario eseguire la divisione che porta le coordinate omogenee in coordinate 3D classiche.

Restano da ricavare le trasformazioni di normalizzazione per i casi di proiezione parallela e prospettica.

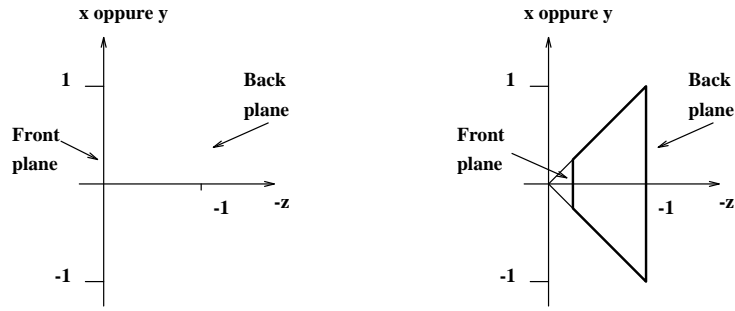


Figura 4.16 Volumi di vista canonici per il caso di proiezioni parallele (a sinistra) e prospettiche.

4.3.3 Proiezioni parallele generali

La trasformazione N_{par} verrà ricavata per il caso generale di proiezione parallela obliqua, anziché per l'ortografica (meno generale). La sequenza di trasformazioni che componendosi danno origine a N_{par} è la seguente:

1. Traslare VPR nell'origine.
2. Ruotare VRC in modo tale che l'asse n (VPN) diventi l'asse z , l'asse u diventi l'asse x e v diventi y .
3. Eseguire una deformazione di taglio (*shear*) in modo tale che la direzione di proiezione sia parallela all'asse z . Questo passo è necessario solo per proiezioni oblique e si salta per le ortografiche.
4. Traslare e scalare il volume di vista in quello canonico definito dall'Eq. 4.19.

Il passo 1 non è altro che la trasformazione T(-VRP).

Per il passo 2 si possono usare le proprietà delle matrici di rotazione già viste. I vettori riga della matrice di rotazione del passo 2 sono vettori unitari che, ruotati dalla matrice R , finiscono sugli assi x , y e z . VPN deve essere ruotato sull'asse z , per cui

$$R_z = \frac{VPN}{|VPN|}$$

L'asse u , che è perpendicolare a VUP e VPN e quindi può essere espresso dal prodotto vettoriale di VUP e R_z (che ha la stessa direzione di VPN), viene ruotato sull'asse x . Da ciò deriva che

$$R_x = \frac{VUP \times R_z}{|VUP \times R_z|}$$

Analogamente l'asse v , che è perpendicolare a R_z e R_x , viene ruotato sull'asse y

$$R_y = R_z \times R_x$$

La matrice di rotazione del passo 2 è quindi:

$$R = \begin{bmatrix} r_{1x} & r_{2x} & r_{3x} & 0 \\ r_{1y} & r_{2y} & r_{3y} & 0 \\ r_{1z} & r_{2z} & r_{3z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

dove r_{1x} è il primo elemento di R_x eccetera.

Il terzo passo è una deformazione di taglio lungo l'asse z del volume di vista risultante dalle prime due trasformazioni in modo tale che tutti i piani che lo definiscono siano perpendicolari ad un asse coordinato. Il fine è quello di portare DOP a coincidere con l'asse z (solo per proiezioni parallele oblique, per le ortografiche è inutile, il volume di vista è già allineato). Da ricordare che DOP è il vettore fra PRP al centro della *window* (CW) e che PRP è specificato nel sistema di riferimento VRC. Le trasformazioni eseguite nei primi due passi hanno portato VRC a coincidere con il sistema di coordinate mondo, e quindi PRP è già in coordinate mondo. Quindi DOP vale CW - PRP: poiché

$$DOP = \begin{bmatrix} dop_x \\ dop_y \\ dop_z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad CW = \begin{bmatrix} \frac{u_{max}+u_{min}}{2} \\ \frac{v_{max}+v_{min}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad PRP = \begin{bmatrix} prp_u \\ prp_v \\ prp_n \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

si ottiene

$$DOP = CW - PRP = \left[\frac{u_{max} + u_{min}}{2} \quad \frac{v_{max} + v_{min}}{2} \quad 0 \quad 1 \right]^T - [prp_u \quad prp_v \quad prp_n \quad 1]^T. \quad (4.23)$$

La deformazione di taglio si esegue mediante la matrice

$$SH_{par} = SH_{par}(shx_{par}, shy_{par}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & shx_{par} & 0 \\ 0 & 1 & shy_{par} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Come già visto l'effetto di SH_{par} è quello di non modificare z e di aggiungere a x ed y i termini $z \cdot shx_{par}$ e $z \cdot shy_{par}$. Chiamando DOP' il nuovo valore desiderato per DOP (vedi Fig. 4.17) bisogna trovare shx_{par} e shy_{par} tali che:

$$DOP' = [0 \quad 0 \quad dop_z \quad 0]^T = SH_{par} \cdot DOP. \quad (4.25)$$

Quindi i valori cercati sono:

$$shx_{par} = -\frac{dop_x}{dop_z}, \quad shy_{par} = -\frac{dop_y}{dop_z}. \quad (4.26)$$

Se la proiezione è ortogonale $dop_x = dop_y = 0$ e la matrice SH_{par} diventa l'identità, come ci si aspettava.

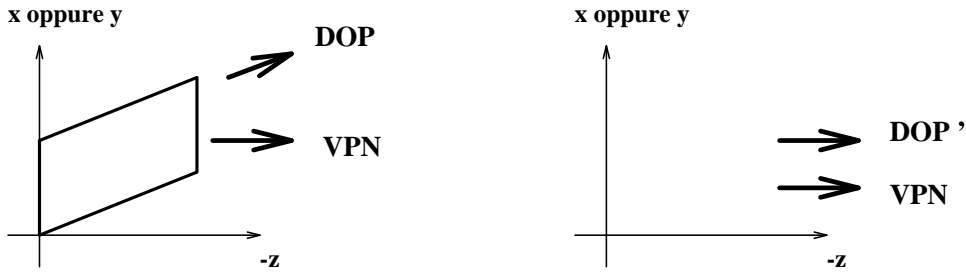


Figura 4.17 Deformazione di taglio per il passo 3.

I limiti del volume di vista dopo i primi tre passi sono diventati:

$$u_{min} \leq x \leq u_{max}, \quad v_{min} \leq y \leq v_{max}, \quad B \leq z \leq F \quad (4.27)$$

dove B ed F sono le distanze da VRP e misurate lungo VPN dei *front clipping plane* e *back clipping plane*.

Il quarto ed ultimo passo è quello di trasformare il volume di vista in quello canonico: ciò si ottiene traslando il centro del piano frontale del volume di vista nell'origine e scalando in modo da ottenere le dimensioni volute ($2 \times 2 \times 1$). Le trasformazioni sono:

$$T_{par} = T \left(-\frac{u_{max} + u_{min}}{2}, \quad -\frac{v_{max} + v_{min}}{2}, \quad -F \right), \quad (4.28)$$

$$S_{par} = S \left(\frac{2}{u_{max} - u_{min}}, \quad \frac{2}{v_{max} - v_{min}}, \quad \frac{1}{F - B} \right). \quad (4.29)$$

In totale si ottiene:

$$N_{par} = S_{par} \cdot T_{par} \cdot SH_{par} \cdot R \cdot T(-VRP). \quad (4.30)$$

4.3.4 Proiezioni prospettiche generali

Qui si deriva la matrice di trasformazione N_{per} che permette di convertire una arbitraria proiezione prospettica in quella individuata dal volume di vista canonico definito nell'Eq. 4.20, cioè nella piramide troncata con vertice nell'origine e lati inclinati di 45° . Se si esegue la trasformazione N_{per} si può effettuare il *clipping* in modo facilitato e poi calcolare la proiezione mediante la matrice M_{per} vista in precedenza.

La sequenza di trasformazioni che componendosi danno origine a N_{per} è la seguente:

1. Traslazione di VPR nell'origine.
2. Rotazione di VRC in modo tale che l'asse n (VPN) diventi l'asse z , l'asse u diventi l'asse x e v diventi y .
3. Traslazione in modo che il centro di proiezione (COP), dato da PRP, sia nell'origine.
4. Deformazione di taglio (*shear*) in modo tale che la linea centrale del volume di vista sia parallela all'asse z .
5. Scalamento in modo che il volume di vista diventi quello canonico definito dai sei piani dell'Eq. 4.20.

I passi 1 e 2 sono uguali a quelli già visti per le proiezioni parallele: $R \cdot T(-VRP)$.

Il passo 3 è una traslazione del centro di proiezione nell'origine, come richiesto per ottenere il volume di vista canonico. COP è specificato in modo relativo rispetto a VRP nel sistema di riferimento VRC da $PRP = (prp_u, prp_v, prp_n)$. Le coordinate VRC sono, dopo i primi due passi, coincidenti con le coordinate mondo e quindi le coordinate di COP sono valide anche in questi sistema di riferimento. La traslazione del passo 3 è allora data da $T(-PRP)$.

Per determinare la deformazione di taglio del passo 4 si può esaminare la Fig. 4.18, che mostra una vista laterale del volume di vista dopo aver eseguito i passi da 1 a 3. La linea centrale del volume di vista, che passa attraverso l'origine ed il centro della *window* (CW), non coincide, in generale, con l'asse z negativo. Lo scopo del passo 4 è quello di farli coincidere. Poichè PRP si trova (dopo i

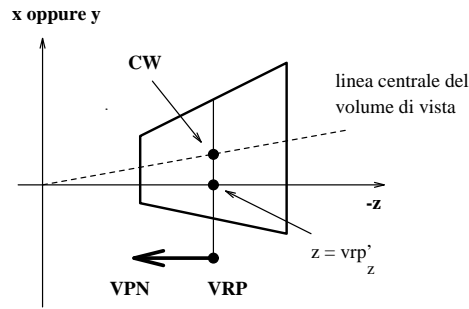


Figura 4.18 Sezione del volume di vista dopo le trasformazioni specificate nei passi da 1 a 3.

primi tre passi) nell'origine, la *direzione* da portare su $-z$ è $CW - PRP$, cioè la stessa del caso di proiezioni parallele. Le matrici di *shear*, SH_{per} , è quindi quella già trovata prima, ovvero SH_{par} .

Dopo aver applicato anche la trasformazione definita nel passo 4 la *window*, e quindi il volume di vista, è centrato rispetto all'asse z . I limiti della *window* sul piano di proiezione sono:

$$-\frac{u_{max} - u_{min}}{2} \leq x \leq \frac{u_{max} - u_{min}}{2}$$

$$-\frac{v_{max} - v_{min}}{2} \leq y \leq \frac{v_{max} - v_{min}}{2}$$

VRP, che prima del passo 3 era nell'origine, diventa, dopo i passi 3 e 4:

$$VRP' = SH_{per} \cdot T(-PRP) \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T.$$

La componente z di VRP' (vrp'_z) è uguale a $-prp_n$, poichè SH_{per} non modifica le coordinate z .

Il passo finale (cioè il quinto) è uno scalamento lungo i tre assi in modo da ottenere il volume di vista canonico, come mostrato in Fig. 4.19.

Lo scalamento può essere realizzato in due passi. Nel primo si scalano (diversamente) x ed y in modo da ottenere una inclinazione di 45° per i quattro piani laterali della piramide di vista. Questo si realizza scalando la *window* portandola a dimensioni $2 \times vrp'_z$ sia in x che in y . I fattori di scala sono quindi $-2 \cdot vrp'_z / (u_{max} - u_{min})$ in x e $-2 \cdot vrp'_z / (v_{max} - v_{min})$ in y . Nel secondo passo si scalano uniformemente le tre coordinate (così non varia l'inclinazione dei piani laterali) in modo tale che il *back clipping plane* in $z = vrp'_z + B$ diventi il piano $z = -1$. Il fattore di scala del secondo passo è quindi $-1 / (vrp'_z + B)$. Il fattore di scala ha il segno negativo cosicchè il fattore di scala diventa positivo, essendo $vrp'_z + B$ negativo.

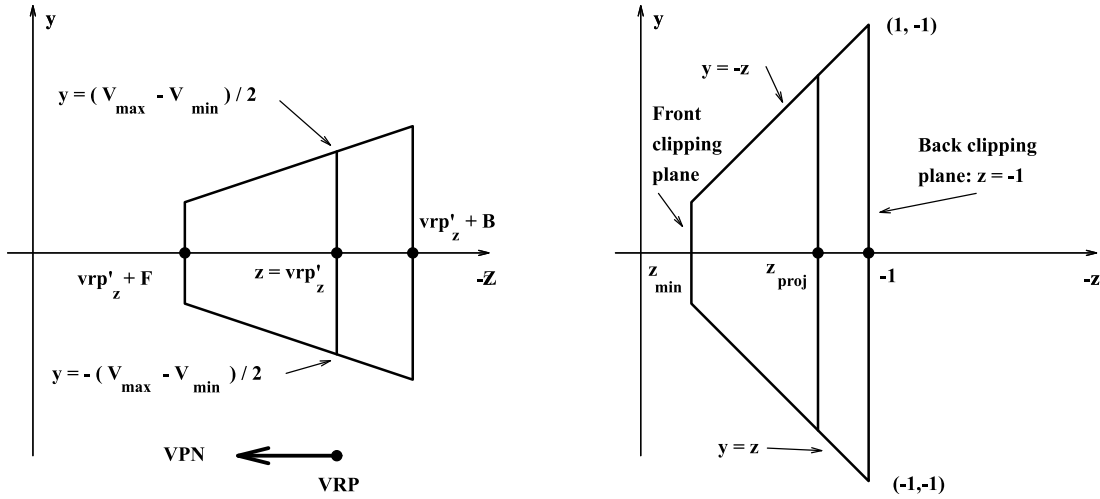


Figura 4.19 Sezione del volume di vista prima e dopo il passo finale di scalamento. In questo esempio F e B hanno segni opposti, e sono quindi da lati opposti rispetto a VRP.

Unendo i due passi si ottiene la matrice di scalamento:

$$S_{per} = S \left(\frac{2 \cdot vrp'_z}{(u_{max} - u_{min})(vrp'_z + B)}, \frac{2 \cdot vrp'_z}{(v_{max} - v_{min})(vrp'_z + B)}, \frac{-1}{vrp'_z + B} \right). \quad (4.31)$$

Lo scalamento S_{per} , applicato alle coordinate z dei *front* e *back clipping planes* e del piano di proiezione, produce i seguenti valori:

$$z_{proj} = -\frac{vrp'_z}{vrp'_z + B}, \quad z_{min} = -\frac{vrp'_z + F}{vrp'_z + B}, \quad z_{max} = -\frac{vrp'_z + B}{vrp'_z + B} = -1. \quad (4.32)$$

In totale la trasformazione totale che porta una arbitraria proiezione prospettica nel volume canonico è:

$$N_{per} = S_{per} \cdot SH_{per} \cdot T(-PRP) \cdot R \cdot T(-VRP). \quad (4.33)$$