# Il problema del commesso viaggiatore

## 1. Generalità

Consideriamo il problema seguente:

*Stanco di cercare di far capire qualcosa ai suoi studenti, un professore di matematica applicata decise un giorno di darsi al commercio, e iniziò a lavorare come rappresentante di una ditta. Tuttavia, anni di studio non erano purtroppo passati senza lasciare il loro segno, e, pur non volendo, il professore non poteva fare a meno di formalizzare matematicamente quanto cadeva sotto i suoi occhi.*

*Un giorno di pioggia, mentre viaggiava con la sua autovettura da una cittadina all'altra in una noiosa provincia, si chiese se non poteva in qualche modo economizzare sul carburante ottimizzando il percorso che doveva seguire. Doveva visitare tutte le città di un insieme* V*, e per ogni coppia* (i, j) *di esse era in grado di valutare esattamente il quantitativo di carburante* $c_{ij}$ *necessario a spostarsi dall'una all'altra. In quale ordine andavano visitate le città per minimizzare i costi? Ovviamente, non è su economie del genere che un commerciante consegue i suoi maggiori guadagni. Perciò, dopo un po' di tempo, il nostro uomo abbandonò il commercio e si dette ad altre occupazioni. Tuttavia, in qualche modo, il suo problema destò interesse nel mondo scientifico, e prese il nome di* Problema del Commesso Viaggiatore.

Il PROBLEMA DEL COMMESSO VIAGGIATORE (con dizione anglosassone, TRAVELLING SALESMAN PROBLEM; abbreviato, TSP) è un problema di sequenziamento che risulta particolarmente interessante vuoi per le sue proprietà, vuoi per la rilevanza delle applicazioni in cui viene formulato (vedi § 7). Una delle formulazioni più frequenti è: dato un grafo orientato completo su un insieme di nodi $V$, pesato con pesi $c_{ij}$ associati agli archi, determinare una sequenza di visita dei nodi (detta *circuito hamiltoniano*) che, partendo da un nodo qualsiasi e tornando a esso, minimizzi il peso degli archi utilizzati per passare da un nodo a un altro.

Per quanto riguarda la complessità del problema, vale il teorema seguente:

**Teorema 1**. *Il PROBLEMA DEL COMMESSO VIAGGIATORE è NP-completo.*

DIMOSTRAZIONE: Per riduzione da CIRCUITO HAMILTONIANO. Supponiamo di disporre di un algoritmo $A$ che risolva TSP in tempo unitario e sia $G$ un grafo con $n$ vertici. Per decidere se $G$ è hamiltoniano, costruiamo il seguente algoritmo polinomiale $B$:

Fai corrispondere ai nodi di $G$ altrettante città;
Per ogni coppia di città $i, j$ poni $c_{ij} = 1$ se $(i, j) \in E(G)$, altrimenti poni $c_{ij} = 2$;
Applica l'algoritmo $A$ all'istanza di TSP così costruita;
Se il costo della soluzione ottima fornita da $A$ è $n$, allora $G$ è hamiltoniano, altrimenti no.

Evidentemente, il costo di una soluzione del TSP non può essere meno di $n$, in quanto il costo del collegamento fra due città è almeno pari a 1, e le città da collegare sono $n$. Se il costo è $n$, allora vuol dire che ogni coppia di città consecutive è collegata a costo 1, e poiché tali costi corrispondono ad archi di $G$, ne segue che la sequenza della città corrisponde a un circuito hamiltoniano. Viceversa, se $G$ è hamiltoniano, allora la sequenza di città corrispondente a un circuito hamiltoniano ha chiaramente costo $n$, che per quanto detto è minimo.

Q.E.D.

## 2. Formulazione

Allo scopo di formulare il problema del commesso viaggiatore in termini di programmazione lineare 0-1, si possono scegliere variabili di decisione binaria del tipo:

$x_{ij} = 1$ se e solo se la città $i$ viene visitata immediatamente prima della città $j$.

Esse devono soddisfare vincoli (di assegnamento) del tipo

$$\sum x_{ij} = 1 \qquad \forall\, i \in V$$

$j \in V$

oltre ovviamente a

$$\mathbf{x} \in \{0, 1\}^{|V \times V|}$$

Tale insieme di vincoli non è tuttavia sufficiente a individuare un circuito hamiltoniano: in effetti, come è facile vedere, essi sono rispettati anche da una soluzione costituita da più di un circuito. Per eliminare tali soluzioni, dobbiamo introdurre nuovi vincoli che ci assicurino che la soluzione consti di un unico circuito, vale a dire di un sottografo del grafo completo di partenza costituito da un'unica componente connessa.  Questa condizione può imporsi richiedendo che, per ogni partizione $\{S, T\}$ di $V$, tra le $x_{ij}$ che hanno $i \in S$ e $j \in T$ ve ne sia almeno una fissata a 1.

Complessivamente, possiamo dunque formulare il problema in questo modo:

$$\begin{array}{llr} \min & \mathbf{cx} & (1) \\ & \sum_{j \in V} x_{ij} = \sum_{j \in V} x_{ji} = 1 & \forall\, i \in V \\ & \sum_{i \in S,\, j \in T} x_{ij} \geq 1 \qquad \forall\, \{S, T\} \text{ tale che } S \cup T \equiv V,\ S \cap T \equiv \emptyset & \end{array}$$

dove $\mathbf{c} = \{c_{ij}\} \in \mathbf{R}^{n^2}$, $\mathbf{x} = \{x_{ij}\} \in \{0, 1\}^{n^2}$.

Interpretando le variabili di associazione $x_{ij}$ come variabili di selezione di coppie di città, il problema così formulato prevede $2n$ vincoli di partizione (corrispondenti all'assegnamento di ogni città alla successiva) e $2^n$ vincoli di copertura.

Un'altra formulazione può ottenersi sostituendo ai vincoli di copertura dei vincoli concepiti nel seguente modo. Sia $Q$ un sottoinsieme proprio di $V$. Evidentemente, se x rappresenta un circuito hamiltoniano le città di $Q$ dovranno essere visitate utilizzando meno di $|Q|$ tratte, altrimenti $Q$ conterrebbe un circuito. Quindi il vincolo di connessione del sottografo si può esprimere richiedendo

$$\sum_{i, j \in Q} x_{ij} \leq |Q| - 1 \qquad \forall\, Q: V \supset Q$$

in luogo dei vincoli di copertura.

Infine, si può ottenere una terza formulazione introducendo le variabili reali $y_i$, $i = 1, \ldots, n$, e ponendo per ogni coppia $\{i, j\}$ tale che $i < n$ e $j > 1$

$$y_i - y_j + n x_{ij} \leq n - 1$$

Infatti, se $\mathbf{x}$ individua un circuito hamiltoniano $H$, il vincolo imposto si traduce in $y_j \geq y_i + 1$ per ogni coppia di nodi consecutivi in $H$, esclusa la coppia corrispondente all'arco di $H$ che termina nel nodo 1. Perciò, se immaginiamo che $H$ abbia inizio proprio nel nodo 1, risulta naturale interpretare la generica $y_i$ come l'ordine in cui il nodo $i$ compare nel circuito, nel senso che ogni ordine $(y_1, \ldots, y_n)$ dei punti di $V$ soddisfa i vincoli scritti. In particolare, si ha $y_1 \geq 1$; si osservi inoltre che per qualunque coppia $\{i, j\}$ non consecutiva — tale che quindi $x_{ij} = 0$ — l'interpretazione data verifica effettivamente $y_i - y_j \leq n - 1$.

Se viceversa $\mathbf{x}$ individuasse un sotto-circuito $\{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ non contenente il nodo 1, sommando le $(p - 1)$ diseguaglianze $(y_{i_k} - y_{i_{k+1}} + n) \leq (n - 1)$ scritte per $k = 1, \ldots, (p - 1)$ alla diseguaglianza $(y_{i_p} - y_{i_1} + n) \leq (n - 1)$ si perverrebbe alla contraddizione $pn \leq p(n - 1)$.

Pertanto la formulazione

$$\begin{array}{llr} \min & \mathbf{cx} & (2) \\ & \sum x_{ij} = \sum x_{ji} = 1 & \forall\, i \in V \end{array}$$

$$\sum_{j \in V} \quad \sum_{j \in V}$$

$$y_i - y_j + n x_{ij} \leq n - 1 \qquad \forall\, i, j \in V$$

$$\mathbf{x} \in \{0, 1\}^{n^2}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$$

esprime correttamente vincoli e obiettivo di un TSP.

Altre formulazioni del TSP possono trovarsi in [3].

## 3. Problemi metrici, problemi asimmetrici, problemi sub-hamiltoniani

Una proprietà verificata in molte situazioni pratiche è che tra i valori $c_{ij}$ dei coefficienti di costo sussista una relazione del tipo seguente, nota come *diseguaglianza triangolare*:

$$c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj} \qquad \forall\, v_i, v_j, v_k \in V$$

Tale diseguaglianza è verificata qualora il costo di collegamento di due città corrisponda a una distanza definita in base a una metrica ([1]). Perciò, in questa ipotesi, il problema prende il nome di *TSP metrico*, (di solito abbreviato in ΔTSP). Particolarmente significativo in molte applicazioni è il *TSP euclideo*, in cui le città corrispodono a punti di uno spazio euclideo di dimensione $t$, e il costo del collegamento di ciascuna coppia di città è pari alla distanza euclidea tra i punti corrispondenti.

Un caso particolarmente interessante di metrica, in cui rientra quella euclidea, è la cosiddetta *metrica* $L_q$, secondo la quale la distanza tra due punti $v_i$ e $v_j$ di coordinate $\{x_i^1, \ldots, x_i^t\}$ e $\{x_j^1, \ldots, x_j^t\}$ in uno spazio a $t$ dimensioni è definita da

$$c_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{t} |x_i^k - x_j^k|^q\right)^{1/q} \qquad (3)$$

In particolare, per $q = 1$ si ha la metrica *Manhattan*. Per $q = 2$, quella *euclidea*. Per $q \to \infty$, infine, si ha la metrica di *Chebychev*, detta anche *del massimo*, in quanto si può dimostrare che in questo caso $c_{ij} = \{\sup |x_i^k - x_j^k| \mid 1 \leq k \leq t\}$: infatti, posto per comodità di notazione $a_{ij}(k) = |x_i^k - x_j^k|$, $a_{ij} = \{\sup a_{ij}(k) \mid 1 \leq k \leq t\}$, dividendo ciascun termine della sommatoria in (3) per $a_{ij}^q$, moltiplicando per $a_{ij}$ l'espressione ottenuta e passando al limite per $q \to \infty$ si ottiene

$$c_{ij} = \lim_{q \to \infty} a_{ij} \cdot \left(\sum_{k=1}^{t} \left(\frac{a_{ij}(k)}{a_{ij}}\right)^q\right)^{1/q} = a_{ij}$$

Un problema si dice simmetrico se $c_{ij} = c_{ji}$ per ogni coppia di nodi $(v_i, v_j)$. Ovviamente un problema simmetrico non è, in generale, metrico. D'altra parte, seppure i problemi con metrica $L_q$ sono problemi simmetrici, esistono problemi metrici non simmetrici (vedi ad es. § 9).

Come risulta evidente dal Teorema 1, l'eventuale simmetria di $\{c_{ij}\}$ non ci è di particolare aiuto nella risoluzione del problema. Tuttavia i problemi metrici e simmetrici godono di particolari proprietà. Anzitutto, se vale la diseguaglianza triangolare la soluzione ottima del problema associato all'insieme $V$ avrà costo non superiore a quello della soluzione del problema associato all'insieme $V \cup \{u\}$, in qualunque posizione rispetto agli altri si trovi l'elemento aggiunto $u$. Si può inoltre dimostrare il teorema seguente:

**Teorema 2**. *Un TSP metrico e simmetrico nel piano ammette sempre una soluzione ottima che consiste in un circuito privo di incroci.*

---

1 Si ricordi che, perché una funzione $d(i, j)$: $N \times N \to \mathbf{R}$ sia una metrica occorre che, per ogni $i, j, k \in N$, sia $d(i, j) \leq d(i, k) + d(k, j)$ e $d(i, j) \geq 0$, con $d(i, j) = 0$ se e solo se $i = j$.

DIMOSTRAZIONE: Data una soluzione ottima $H$ di un TSP metrico, supponiamo che essa consista in un circuito contenente degli archi che si intersecano. Sia $v_x$ l'intersezione tra l'arco $(v_i, v_j)$ e l'arco $(v_h, v_k)$, entrambi appartenenti ad $H$. Consideriamo la soluzione $H'$ ottenuta da $H$ sostituendo gli archi $(v_i, v_j)$ e $(v_h, v_k)$ con gli archi $(v_h, v_i)$ e $(v_k, v_j)$, e invertendo gli archi del cammino contenuto in $H$ e avente $v_i$ come primo e $v_h$ come secondo estremo. Questa è evidentemente ancora un circuito hamiltoniano, ma è priva dell'incrocio $v_x$. Il suo costo è dato da $c(H') = c(H) - (c_{ij} + c_{hk}) + (c_{hi} + c_{kj}) \leq c(H) - (c_{ix} + c_{xj} + c_{hx} + c_{xk}) + (c_{hx} + c_{xi} + c_{kx} + c_{xj}) = c(H)$. Pertanto, anche $H'$ è ottima.

Q.E.D.

Un'altra importante caratteristica dei problemi metrici (in generale non simmetrici) è che questi ammettono algoritmi ad approssimazione garantita (vedi § 8). Come si vedrà (§ 8, Teorema 6), a meno che $P \equiv NP$, tale caratteristica non è condivisa dai problemi non metrici.

Un problema simile al TSP è il cosiddetto problema del CIRCUITO SUB-HAMILTONIANO: si tratta in questo caso di determinare un circuito che colleghi più nodi possibile mantenendo il costo entro un limite prefissato. Il problema è evidentemente *NP*-completo.

Un altro problema collegato al TSP è quello del CAMMINO HAMILTONIANO, in cui si richiede di determinare un cammino che tocchi tutti i nodi del grafo $G$ al minimo costo (tale cammino può essere generico, oppure si può richiedere che congiunga due particolari elementi $s$, $t$ di $V$). Come caso particolare di questo problema abbiamo il problema del *cammino massimo*. Su grafi aciclici, tale problema si riconduce a CAMMINO MINIMO, ma in generale è *NP*-completo.

# 4. Algoritmi euleriani

Gli algoritmi euleriani nascono dalla constatazione che, nel caso metrico, è sempre possibile costruire un circuito hamiltoniano a partire da uno euleriano in modo che il costo del primo sia non superiore a quello del secondo.

Consideriamo ad esempio l'algoritmo seguente, che opera su un grafo completo $G$ con vertici corrispondenti alle città e archi pesati dal costo di collegamento delle citta associate agli estremi:

```
Algoritmo A
    input    matrice {c_ij} delle distanze tra le città
[generazione di un circuito euleriano ricoprente G]
    determina un qualunque circuito euleriano E che ricopra G;
[calcolo di un circuito H a partire da una visita dei nodi di E, iniziando da un nodo qualsiasi v_0] H := v_0;
    [visita i nodi di E]
    while    esistono archi di E non ancora usati
      do     begin
             if      v non visitato
             then    begin
                     H := H ∪ {v};
                     visita v
                     end
             v := successore di v su E
             end
[uscita]
    output   H [l'ordine di visita delle città corrisponde a quello in cui H è stata formata]
```

Per la diseguaglianza triangolare, il costo del circuito hamiltoniano $H$ è senz'altro non superiore a quello del circuito euleriano $E$. Infatti, laddove una sottosequenza di visita di $E$ coincide con la corrispondente su $H$, i costi delle due sottosequenze risultano evidentemente identici. Se invece le due sottosequenze non coincidono, ciò accade perché quella su $E$ contiene dei nodi già visitati. Se indichiamo con $S \equiv \{v_j, \ldots, v_h\}$ una sottosequenza massimale (eventualmente ridotta a un solo elemento) di successori di $v_i$ già visitati, l'Algoritmo $A$ salterà tutti i nodi di $S$ portandosi sul primo nodo non ancora visitato, sia esso $v_k$. Per la diseguaglianza triangolare, il costo $c_{ik}$ della sottosequenza $\{v_i, v_k\}$ di $H$ risulta inferiore al costo $c_{ij} + \ldots + c_{hk}$ della corrispondente sottosequenza su $E$.

Da quanto detto discende immediatamente il seguente risultato:

**Teorema 3**. *Se la matrice $\{c_{ij}\}$ soddisfa la diseguaglianza triangolare, allora determinare un circuito euleriano di costo minimo che ricopra V equivale a risolvere un problema di commesso viaggiatore su V.*

Dai Teoremi 1 e 3 segue in particolare che il problema del circuito euleriano ricoprente di costo minimo è *NP*-completo.

# 5. Algoritmi ad approssimazione garantita

Ciò che rende gli algoritmi euleriani particolarmente interessanti nel caso metrico è il fatto che per essi si possono provare risultati di approssimazione. Consideriamo la seguente modifica dell'Algoritmo *A* descritto nel § 7.

**Algoritmo** $A_1$

**input** matrice $\{c_{ij}\}$ delle distanze tra le città
[generazione di un albero ricoprente *G*]
determina un albero *T* di peso minimo che ricopra i nodi di *G*;
[costruzione di un circuito euleriano a partire da *T*]
raddoppia tutti gli archi di *T* in modo da ottenere un multigrafo euleriano;
determina un qualunque circuito euleriano *E* su tale multigrafo;
[calcolo di una sequenza di visita *H* a partire da *E*]
procedi come al passo corrispondente di *A*
[uscita]
**output** *H* [l'ordine di visita delle città corrisponde a quello in cui *H* è stata formata]

Vale il teorema seguente:

**Teorema 4**. *L'algoritmo* $A_1$ *è* 1-*approssimato.*

DIMOSTRAZIONE: Come già osservato, per la diseguaglianza triangolare, si ha

$$c(H) \le c(E) \qquad (i)$$

D'altra parte, per come è stato costruito *E* a partire da *T*, si ha $c(E) = 2c(T)$, e quindi, per la (*i*),

$$c(H) \le 2c(T) \qquad (ii)$$

Inoltre, se $H^*$ è un circuito hamiltoniano ottimo,

$$c(H^*) \ge c(T) \qquad (iii)$$

in quanto, se togliamo un arco ad $H^*$ otteniamo un albero ricoprente *G*, che, essendo *T* di peso minimo, non può avere peso inferiore a esso. In conclusione, applicando le (*ii*), (*iii*), si può scrivere

$$(c(H) - c(H^*)) / c(H^*) \le (2c(T) - c(T)) / c(T) = 1$$

il che dimostra il teorema.

Q.E.D.

In altre parole, una soluzione ottenuta mediante $A_1$ può, nel caso peggiore, risultare del 100% più costosa di quella ottima. Tale caso può in effetti verificarsi, come dimostrato dall'esempio seguente:

**Esempio 1**. Consideriamo il problema euclideo rappresentato in figura 7*a*.

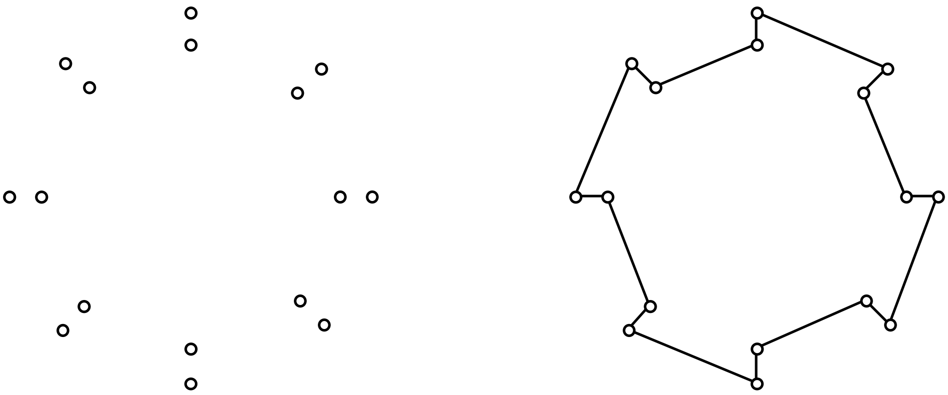

FIGURA 7. *a*) Un TSP euclideo; *b*) una soluzione ottima.

Evidentemente, una soluzione ottima ha l'aspetto del circuito rappresentato in figura 7*b*. Tuttavia è facile verificare che l'albero ricoprente di peso minimo è del tipo rappresentato in figura 8*a*. Ne consegue che l'Algoritmo $A_1$ fornirà in questo caso un circuito come quello rappresentato in figura 8*b*, il quale, al crescere di *n*, presenta un costo pari pressoché al doppio dell'ottimo. ●

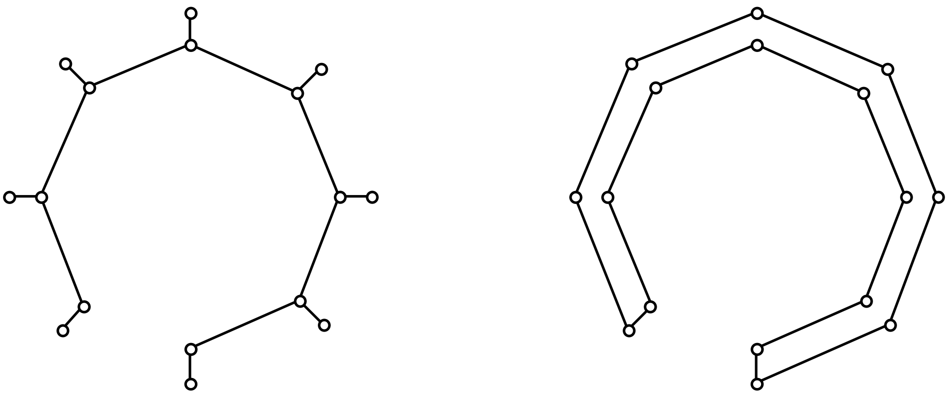

FIGURA 8.*a*) Minimo albero ricoprente; *b*) soluzione determinata da $A_1$.

Un risultato migliore di quello conseguito dall'Algoritmo $A_1$ può ottenersi applicando l'algoritmo seguente [1]:

**Algoritmo** $A_{0.5}$

**input** matrice $\{c_{ij}\}$ delle distanze tra le città
[generazione di un albero ricoprente *G*]
determina un albero *T* di peso minimo che ricopra i nodi di *G*;
[costruzione di un circuito euleriano a partire da *T*]
determina un abbinamento *M* di peso minimo tra i nodi di *T* aventi grado dispari;
[tali nodi sono com'è noto in numero pari, e il grafo $T \cup M$ è euleriano]
determina un qualunque circuito euleriano *E* sul grafo $T \cup M$;
[calcolo di una sequenza di visita *H* a partire da *E*]
procedi come al passo corrispondente di *A*
[uscita]
**output** *H* [l'ordine di visita delle città corrisponde a quello in cui *H* è stata formata]

Vale infatti il seguente teorema:

**Teorema 5**. (Χριστοφιδηs) *L'algoritmo* $A_{0.5}$ *è* 1/2-*approssimato.*

DIMOSTRAZIONE: Per la diseguaglianza triangolare, il circuito hamiltoniano $H$ determinato da $A_{0.5}$ soddisfa la seguente relazione (cfr. la (*i*) del teor. precedente):

$$c(H) \;\le\; c(E) \;=\; c(T \cup M) \;=\; c(T) + c(M) \qquad\qquad (i)$$

dove $M = \{u_1u_2, u_3u_4, \ldots, u_{m-1}u_m\}$ indica gli archi di un matching perfetto di peso minimo tra gli $m$ nodi di $T$ aventi grado dispari. Si noti che per la diseguaglianza triangolare gli archi di $M$ non si incrociano. Consideriamo ora un circuito hamiltoniamo ottimo $H^*$, e indichiamo con $H_{ij}$ il sottocammino di $H^*$ avente estremi $u_i$ e $u_j$. Ora, siccome gli archi di $M$ non si incrociano, i sottocammini $H_{12}$, $H_{34}$, …, $H_{m-1,m}$ risultano disgiunti, e possiamo allora scrivere $H^* = H_{12} \cup H_{23} \cup H_{34} \cup \ldots \cup H_{m-1,m} \cup H_{m,1}$. Se ora sostituiamo $H_{i,i+1}$ con l'arco $u_{i,i+1}$ per $i = 1, \ldots, (m-1)$, e $H_{m,1}$ con $u_{m,1}$, otteniamo due matching perfetti $M$ e $M'$, e si ha $c(M') \ge c(M)$ visto che $M$ è ottimo. Per la diseguaglianza triangolare abbiamo dunque

$$c(H^*) \;\ge\; c(M') + c(M) \ge\; 2c(M) \qquad\qquad (ii)$$

Ricordando che per la (*iii*) del teorema precedente si ha $c(H^*) \;\ge\; c(T)$, si può quindi scrivere

$$(c(H) - c(H^*)) \,/\, c(H^*) \;\le\; (c(T) + c(M) - c(T)) \,/\, 2c(M) \;=\; 1/2.$$

Q.E.D.

Anche nel caso di $A_{0.5}$, tuttavia, la soluzione ottenuta può costare effettivamente il 50% in più di quella ottima, come prova il seguente esempio:

**Esempio 2**. Consideriamo il problema euclideo e la sua soluzione ottima illustrati in figura 9. In questo caso abbiamo $(2n + 1)$ punti corrispondenti ai vertici di $(n - 1)$ triangoli equilateri di lato $d$.

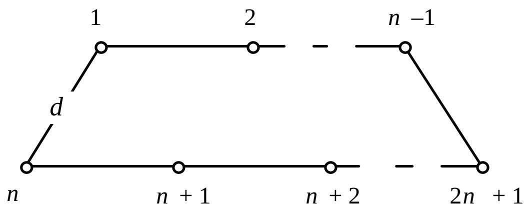


FIGURA 9. Soluzione ottima

Un albero ricoprente di peso minimo può essere quello di figura 10*a*. In tal caso, l'Algoritmo $A_{0.5}$ aggiungerà l'arco $(n, 2n + 1)$ e otterrà un circuito euleriano, che modificherà giungendo al circuito hamiltoniano di figura 10*b*. Evidentemente, al tendere di $n$ a $\infty$, il costo di tale circuito tende ai 3/2 dell'ottimo. ●

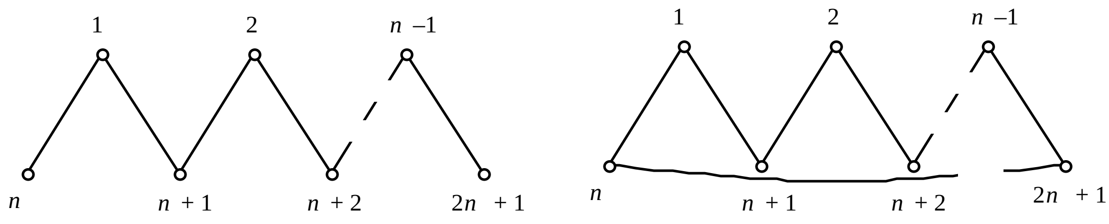


FIGURA 10.*a*) Albero ricoprente di peso minimo; *b*) minimo locale determinato da $A_{0.5}$.

Come accennato, non è oggi nota alcuna estensione dei risultati di approssimazione visti per il caso metrico al caso più generale. Vale anzi il seguente teorema, che costituisce in qualche modo un risultato negativo:

**Teorema 6.** *Supponiamo che esista un algoritmo polinomiale $A_\varepsilon$ che risolva il problema del commesso viaggiatore con approssimazione ε. Allora, dato un qualunque grafo simmetrico G, è possibile riconoscere in tempo polinomiale se G è hamiltoniano.*

DIMOSTRAZIONE: Costruiamo a partire dal grafo $G$ un'istanza $P$ del problema del commesso viaggiatore con $n = |V(G)|$ città, definendo la distanza tra due città qualsiasi $i$ e $j$ nel modo seguente:

$$c_{ij} = 1 \qquad \text{se } (i, j) \in E(G)$$
$$c_{ij} = 2 + n\cdot\varepsilon \qquad \text{se } (i, j) \notin E(G)$$

Dimostriamo che $G$ ammette un circuito hamiltoniano se e solo se, applicato all'istanza $P$, l'algoritmo $A_\varepsilon$ fornisce un circuito di lunghezza $n$.
Anzitutto, siccome la minima distanza tra due città è 1 e vi sono $n$ città, nessun circuito potrà essere lungo meno di $n$.
Evidentemente, se $A_\varepsilon$ fornisce un circuito lungo $n$, questo corrisponde a un circuito hamiltoniano su $G$: infatti, in questo caso, tutte le tratte utilizzate dal circuito devono essere lunghe 1; per come è stata definita la matrice $\{c_{ij}\}$ delle distanze, queste corrispondono ad archi di $G$, ed è pertanto possibile toccare tutti i nodi di $G$ esattamente una sola volta facendo uso di archi di $G$.
Dimostriamo ora che se $A_\varepsilon$ fornisce un circuito di lunghezza maggiore di $n$, allora $G$ non è hamiltoniano. In questo caso, la lunghezza del circuito restituito da $A_\varepsilon$ deve essere almeno pari a $1 + (1 + \varepsilon)\cdot n$ (che è quella corrispondente a $(n - 1)$ tratti di lunghezza 1 e uno solo di lunghezza $2 + n\cdot\varepsilon$). Supponiamo allora, per assurdo, che $G$ sia hamiltoniano. Ciò implica in particolare che il circuito ottimo per il commesso viaggiatore ha lunghezza $n$. Poiché $A_\varepsilon$ è ε-approssimato, si avrebbe allora:

$$\varepsilon \geq (1 + (1 + \varepsilon)\cdot n - n)/n = \varepsilon + 1/n$$

che è una contraddizione.

Q.E.D.

Conseguenza del teorema appena dimostrato è che, *a meno che P ≡ NP, non esiste alcun algoritmo* ε-*approssimato per il problema del commesso viaggiatore.*

## Nota bibliografica


[1] (1976) N. Christofides, "Worst-case Analysis of a New Heuristic for the Traveling Salesman Problem", *Technical Report*, GSIA, Carnagie-Mellon University.

[2] (1994) B. Gaboune, G. Laporte, F. Soumis: "Optimal Strip Sequencing Strategies for Flexible Manufacturing Operations in Two and Three Dimensions", *The International Journal of Flexible Manufacturing Systems*, **6**, 2, 123-136.

[3] (1991) M. Padberg, T.Y. Sung: "An Analytical Comparison of Different Formulations of the Travelling Salesman Problem", *Mathematical Programming* **52**, 315-357.

[4] (1982) C.H. Papadimitriou, K.E. Steiglitz: *Combinatorial Optimization – Algorithms and Complexity*, Prentice Hall.