## *LOCALIZZAZIONE DEGLI IMPIANTI*
Algoritmo di Erlenkotter

## *DESCRIZIONE DEL PROBLEMA*

Un'azienda possiede 5 piccoli impianti per la produzione di mattoni, che vengono spediti e venduti in 6 città. Per ogni impianto e per ogni città è nota la domanda di prodotto. A seguito di un calo della domanda complessiva, la dirigenza si chiede se non sia conveniente chiudere uno o più impianti e ri-pianificare la produzione degli impianti residui e la rete di distribuzione. Sono noti i costi mensili di spedizione (per tonnellata di prodotto) da ciascun impianto a ciascuna città di destinazione, le domande per ogni città di destinazione ed i costi fissi mensili di ogni impianto (indipendenti dalla quantità prodotta dall'impianto), riportati in tabella:

| | | Città di destinazione | | | | | | Costi fissi mensili |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| Impianti di produzione | A | 1675 | 400 | 685 | 1630 | 1160 | 2800 | 17000 |
| | B | 1460 | 1940 | 970 | 100 | 495 | 1200 | 13500 |
| | C | 1925 | 2400 | 1425 | 500 | 950 | 800 | 15000 |
| | D | 380 | 1355 | 543 | 1045 | 665 | 2321 | 14000 |
| | E | 922 | 1646 | 700 | 508 | 311 | 1797 | 12000 |
| Domanda | | 10 | 8 | 12 | 6 | 7 | 11 | |

Ad esempio, chiudere il primo impianto (A) comporterebbe un risparmio di 7650 € / mese. Se la città 5 riceve tutta la merce richiesta dall'impianto E, questo comporta un costo di spedizione di $7 \times 311 = 2177$ € / mese.
Si vuole determinare il modo più economico di produrre e distribuire i mattoni.

## *OBIETTIVO*

1. Trovare un lower bound alla soluzione ottima utilizzando l'algoritmo di Erlenkotter.
2. Dopo aver attivato tutti gli impianti arrivati alla condizione di blocco, trovare un upper bound alla soluzione ottima e calcolare l'errore massimo associato a questa soluzione, rispetto alla soluzione ottima del problema.

## *Costruzione del problema di Plant Location*

Si tratta evidentemente di un problema con 6 clienti e 5 impianti. I costi di attivazione e di afferenza sono illustrati in tabella:

| | | Impianti | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D | E |
| Clienti | 1 | 16750 | 14600 | 19250 | 3800 | 9220 |
| | 2 | 3200 | 15520 | 19200 | 10840 | 13168 |
| | 3 | 8220 | 11640 | 17100 | 6516 | 8400 |
| | 4 | 9780 | 600 | 3000 | 6270 | 3048 |
| | 5 | 8120 | 3465 | 6650 | 4655 | 2177 |
| | 6 | 30800 | 13200 | 8800 | 25531 | 19767 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Costi fissi | 17000 | 13500 | 15000 | 14000 | 12000 |

## *Algoritmo di Erlenkotter*

Si tratta evidentemente di un problema con 6 clienti e 5 impianti. I costi di attivazione e di afferenza sono illustrati in tabella:

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 16750 | 14600 | 19250 | 3800 | 9220 |
| 3200 | 15520 | 19200 | 10840 | 13168 |
| 8220 | 11640 | 17100 | 6516 | 8400 |
| 9780 | 600 | 3000 | 6270 | 3048 |
| 8120 | 3465 | 6650 | 4655 | 2177 |
| 30800 | 13200 | 8800 | 25531 | 19767 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17000 | 13500 | 15000 | 14000 | 12000 |

A questo punto accostiamo alla tabella il vettore *z* e la matrice *w* delle variabili duali, e impostiamo $z_i = \min_{j=1,\dots,5}\{c_{ij}\}$ per $i$=1,…,6 e $w_{ij} = 0$ per $i$=1,…,6 $j$=1,…,5. Teniamo anche traccia della quantità $\sum_i w_{ij}$ e dei valori $c_{ij} \le z_i$ (evidenziati in celeste).

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 16750 | 14600 | 19250 | 3800 | 9220 |
| 3200 | 15520 | 19200 | 10840 | 13168 |
| 8220 | 11640 | 17100 | 6516 | 8400 |
| 9780 | 600 | 3000 | 6270 | 3048 |
| 8120 | 3465 | 6650 | 4655 | 2177 |
| 30800 | 13200 | 8800 | 25531 | 19767 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17000 | 13500 | 15000 | 14000 | 12000 |

| z |
|---|
| 3800 |
| 3200 |
| 6516 |
| 600 |
| 2177 |
| 8800 |

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\sum_i w_{ij}$ = | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

A questo punto l'algoritmo procede iterativamente calcolando per ogni cliente *i* la quantità:

$$|\{j\colon c_{ij} \le z_i\}|$$

dopodiché si incrementa il coefficiente $z_k$ con $k=\operatorname{argmin}_i|\{j\colon c_{ij} \le z_i\}|$, cioè il cliente che presenta il minimo numero di coefficienti $c_{ij} \le z_i$. Questo valore $z_k$ è quindi incrementato di:

$$\boxed{\Delta z_i = \min_j\{\Delta_j\colon \Delta_j = c_{ij} - z_i \text{ se } c_{ij} > z_i \,;\, \Delta_j = f_j - \textstyle\sum_i w_{ij} \text{ se } c_{ij} \le z_i\}},$$

In realtà sarà sufficiente calcolare $\boxed{\Delta z_i = \min_j\{c_{ij} - z_i : c_{ij} > z_i\}}$ e verificare che questo incremento non comporti una violazione dei vincoli $f_j - \sum_i w_{ij} > 0$. Se ciò accade si considera come incremento massimo ammissibile per $z_i$ il raggiungimento del valore di blocco, tale che $f_j = \sum_i w_{ij}$ per qualche impianto *j*. Quando $f_j = \sum_i w_{ij}$ l'impianto *j* si dice bloccato, come pure tutti i clienti *i* tali che $c_{ij} \le z_i$ .

Nel nostro caso, al primo passo si ha:

$$\operatorname{argmin}_i|\{j\colon c_{ij} \le z_i\}| = \operatorname{argmin}\{1; 1; 1; 1; 1; 1\} = k$$

Incrementiamo pertanto uno qualsiasi dei clienti *i*, ad esempio poniamo *k*=1 e quindi incrementiamo $z_1$ di $\Delta z_1 = \min_j\{c_{ij} - z_i : c_{ij} > z_i\}$= 9220 - 3800= 5420.

Per comodità aggiungiamo una riga alla tabella per evidenziare ad ogni passo la quantità $f_j - \sum_i w_{ij}$ che costituisce il massimo incremento consentito per i $w_{ij}$ di quella colonna.

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 16750 | 14600 | 19250 | 3800 | 9220 |
| 3200 | 15520 | 19200 | 10840 | 13168 |
| 8220 | 11640 | 17100 | 6516 | 8400 |
| 9780 | 600 | 3000 | 6270 | 3048 |
| 8120 | 3465 | 6650 | 4655 | 2177 |
| 30800 | 13200 | 8800 | 25531 | 19767 |

| z |
|---|
| 9220 |
| 3200 |
| 6516 |
| 600 |
| 2177 |
| 8800 |

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 5420 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17000 | 13500 | 15000 | 14000 | 12000 |
| 17000 | 13500 | 15000 | 8580 | 12000 |

$= f_j - \sum_i w_{ij}$

$\sum_i w_{ij} =$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 5420 | 0 |

Al secondo passo si ha:

$$\text{argmin}_i |\{j: c_{ij} \le z_i\}| = \text{argmin}\{2; 1; 1; 1; 1; 1\} = k.$$

Incrementiamo pertanto uno qualsiasi dei clienti $i \in \{2,3,4,5,6\}$, ad esempio poniamo $k=2$ e quindi incrementiamo $z_2$ di $\Delta z_2 = \min_j\{c_{ij} - z_i : c_{ij} > z_i\} = 10840 - 3200 = 7640$.

Incrementiamo pertanto $z_2$ di 7640, fino al valore 10840.

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 16750 | 14600 | 19250 | 3800 | 9220 |
| 3200 | 15520 | 19200 | 10840 | 13168 |
| 8220 | 11640 | 17100 | 6516 | 8400 |
| 9780 | 600 | 3000 | 6270 | 3048 |
| 8120 | 3465 | 6650 | 4655 | 2177 |
| 30800 | 13200 | 8800 | 25531 | 19767 |

| z |
|---|
| 9220 |
| 10840 |
| 6516 |
| 600 |
| 2177 |
| 8800 |

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 5420 | 0 |
| 7640 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17000 | 13500 | 15000 | 14000 | 12000 |
| 9360 | 13500 | 15000 | 8580 | 12000 |

$= f_j - \sum_i w_{ij}$

$\sum_i w_{ij} =$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 7640 | 0 | 0 | 5420 | 0 |

Procedendo si ha:

$$\text{argmin}_i |\{j: c_{ij} \le z_i\}| = \text{argmin}\{2; 2; 1; 1; 1; 1\} = k.$$

Incrementiamo pertanto uno qualsiasi dei clienti $i \in \{3,4,5,6\}$, ad esempio poniamo $k=3$ e quindi incrementiamo $z_3$ di $\Delta z_3 = \min_j\{c_{ij} - z_i : c_{ij} > z_i\} = 8220 – 6516 = 1704$.

Incrementiamo pertanto $z_3$ di 1704, fino al valore 8220.

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 16750 | 14600 | 19250 | 3800 | 9220 |
| 3200 | 15520 | 19200 | 10840 | 13168 |
| 8220 | 11640 | 17100 | 6516 | 8400 |
| 9780 | 600 | 3000 | 6270 | 3048 |
| 8120 | 3465 | 6650 | 4655 | 2177 |
| 30800 | 13200 | 8800 | 25531 | 19767 |

| z |
|---|
| 9220 |
| 10840 |
| 8220 |
| 600 |
| 2177 |
| 8800 |

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 5420 | 0 |
| 7640 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1704 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17000 | 13500 | 15000 | 14000 | 12000 |
| 9360 | 13500 | 15000 | 6876 | 12000 |

$= f_j - \sum_i w_{ij}$

$\sum_i w_{ij} =$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 7640 | 0 | 0 | 7124 | 0 |

Procedendo si ha:

$$\text{argmin}_i|\{j\text{: } c_{ij} \leq z_i\}| = \text{argmin}\{2; 2; 2; 1; 1; 1\} = k.$$

Incrementiamo pertanto uno qualsiasi dei clienti $i \in \{4,5,6\}$, ad esempio poniamo $k$=4 e quindi incrementiamo $z_4$ di $\Delta z_4 = \min_j\{c_{ij} - z_i : c_{ij} > z_i\}$= 3000 – 600 = 2400.
Incrementiamo pertanto $z_4$ di 2400, fino al valore 3000.

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 16750 | 14600 | 19250 | 3800 | 9220 |
| 3200 | 15520 | 19200 | 10840 | 13168 |
| 8220 | 11640 | 17100 | 6516 | 8400 |
| 9780 | 600 | 3000 | 6270 | 3048 |
| 8120 | 3465 | 6650 | 4655 | 2177 |
| 30800 | 13200 | 8800 | 25531 | 19767 |

| z |
|---|
| 9220 |
| 10840 |
| 8220 |
| 3000 |
| 2177 |
| 8800 |

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 5420 | 0 |
| 7640 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1704 | 0 |
| 0 | 2400 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17000 | 13500 | 15000 | 14000 | 12000 | |
| 9360 | 11100 | 15000 | 6876 | 12000 | $= f_j - \sum_i w_{ij}$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sum_i w_{ij}$ = | 7640 | 2400 | 0 | 7124 | 0 |

Procedendo si ha:

$$k = \text{argmin}_i|\{j\text{: } c_{ij} \leq z_i\}| = \text{argmin}\{2; 2; 2; 2; 1; 1\} = k.$$

Incrementiamo pertanto uno qualsiasi dei clienti $i \in \{5,6\}$, ad esempio incrementiamo $z_5$ di $\Delta z_5 = \min_j\{c_{ij} - z_i : c_{ij} > z_i\}$= 3465 - 2177 = 1288.
Incrementiamo pertanto $z_5$ di 1288, fino al valore 3465.

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 16750 | 14600 | 19250 | 3800 | 9220 |
| 3200 | 15520 | 19200 | 10840 | 13168 |
| 8220 | 11640 | 17100 | 6516 | 8400 |
| 9780 | 600 | 3000 | 6270 | 3048 |
| 8120 | 3465 | 6650 | 4655 | 2177 |
| 30800 | 13200 | 8800 | 25531 | 19767 |

| z |
|---|
| 9220 |
| 10840 |
| 8220 |
| 3000 |
| 3465 |
| 8800 |

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 5420 | 0 |
| 7640 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1704 | 0 |
| 0 | 2400 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1288 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17000 | 13500 | 15000 | 14000 | 12000 | |
| 9360 | 11100 | 15000 | 6876 | 10712 | $= f_j - \sum_i w_{ij}$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sum_i w_{ij}$ = | 7640 | 2400 | 0 | 7124 | 1288 |

Procedendo si ha:

$$k = \text{argmin}_i|\{j\text{: } c_{ij} \leq z_i\}| = \text{argmin}\{2; 2; 2; 2; 2; 1\} = k=6.$$

Incrementiamo pertanto $z_6$ di $\Delta z_6 = \min_j\{c_{ij} - z_i : c_{ij} > z_i\}$= 13200 - 8800 = 4400.
Incrementiamo pertanto $z_6$ di 4400, fino al valore 13200.

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 16750 | 14600 | 19250 | 3800 | 9220 |
| 3200 | 15520 | 19200 | 10840 | 13168 |
| 8220 | 11640 | 17100 | 6516 | 8400 |
| 9780 | 600 | 3000 | 6270 | 3048 |
| 8120 | 3465 | 6650 | 4655 | 2177 |
| 30800 | 13200 | 8800 | 25531 | 19767 |

| z |
|---|
| 9220 |
| 10840 |
| 8220 |
| 3000 |
| 3465 |
| 13200 |

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 5420 | 0 |
| 7640 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1704 | 0 |
| 0 | 2400 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1288 |
| 0 | 0 | 4400 | 0 | 0 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17000 | 13500 | 15000 | 14000 | 12000 | |
| 9360 | 11100 | 10600 | 6876 | 10712 | $= f_j - \sum_i w_{ij}$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sum_i w_{ij}$ = | 7640 | 2400 | 4400 | 7124 | 1288 |

Procedendo si ha:

$$k = \text{argmin}_i|\{j\text{: } c_{ij} \le z_i\}| = \text{argmin}\{2; 2; 2; 2; 2; 2\} = k.$$

Incrementiamo ad esempio $z_1$ di $\Delta z_1 = \min_j\{c_{ij} - z_i : c_{ij} > z_i\}$= 14600 - 9220 = 5380.
Incrementiamo pertanto $z_6$ di 5380, fino al valore 14600.

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 16750 | 14600 | 19250 | 3800 | 9220 |
| 3200 | 15520 | 19200 | 10840 | 13168 |
| 8220 | 11640 | 17100 | 6516 | 8400 |
| 9780 | 600 | 3000 | 6270 | 3048 |
| 8120 | 3465 | 6650 | 4655 | 2177 |
| 30800 | 13200 | 8800 | 25531 | 19767 |

| z |
|---|
| 14600 |
| 10840 |
| 8220 |
| 3000 |
| 3465 |
| 13200 |

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 10800 | 5380 |
| 7640 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1704 | 0 |
| 0 | 2400 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1288 |
| 0 | 0 | 4400 | 0 | 0 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17000 | 13500 | 15000 | 14000 | 12000 | |
| 9360 | 11100 | 10600 | 1496 | 5332 | $= f_j - \Sigma_i w_{ij}$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Sigma_i w_{ij} =$ | 7640 | 2400 | 4400 | 12504 | 6668 |

Procedendo si ha:

$$k = \text{argmin}_i|\{j\text{: } c_{ij} \le z_i\}| = \text{argmin}\{3; 2; 2; 2; 2; 2\} = k.$$

Incrementiamo ad esempio $z_2$ di $\Delta z_2 = \min_j\{c_{ij} - z_i : c_{ij} > z_i\}$= 13168 - 10840 = 2328.
Osserviamo però che sulla colonna D il massimo incremento consentito è solo 1496, incrementiamo pertanto $z_6$ di 1496, fino al valore 12336. A questo punto i primi 3 clienti sono bloccati e non possono più essere incrementati.

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 16750 | 14600 | 19250 | 3800 | 9220 |
| 3200 | 15520 | 19200 | 10840 | 13168 |
| 8220 | 11640 | 17100 | 6516 | 8400 |
| 9780 | 600 | 3000 | 6270 | 3048 |
| 8120 | 3465 | 6650 | 4655 | 2177 |
| 30800 | 13200 | 8800 | 25531 | 19767 |

| z |
|---|
| 14600 |
| 12336 |
| 8220 |
| 3000 |
| 3465 |
| 13200 |

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 10800 | 5380 |
| 9136 | 0 | 0 | 1496 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1704 | 0 |
| 0 | 2400 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1288 |
| 0 | 0 | 4400 | 0 | 0 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17000 | 13500 | 15000 | 14000 | 12000 | |
| 7864 | 11100 | 10600 | 0 | 5332 | $= f_j - \Sigma_i w_{ij}$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Sigma_i w_{ij} =$ | 9136 | 2400 | 4400 | 14000 | 6668 |

Procedendo si ha:

$$k = \text{argmin}_i|\{j\text{: } c_{ij} \le z_i\}| = \text{argmin}\{-; -; -; 2; 2; 2\} = k.$$

Incrementiamo ad esempio $z_4$ di $\Delta z_4 = \min_j\{c_{ij} - z_i : c_{ij} > z_i\}$= 3048 - 3000 = 48.

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 16750 | 14600 | 19250 | 3800 | 9220 |
| 3200 | 15520 | 19200 | 10840 | 13168 |
| 8220 | 11640 | 17100 | 6516 | 8400 |
| 9780 | 600 | 3000 | 6270 | 3048 |
| 8120 | 3465 | 6650 | 4655 | 2177 |
| 30800 | 13200 | 8800 | 25531 | 19767 |

| z |
|---|
| 14600 |
| 12336 |
| 8220 |
| 3048 |
| 3465 |
| 13200 |

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 10800 | 5380 |
| 9136 | 0 | 0 | 1496 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1704 | 0 |
| 0 | 2448 | 48 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1288 |
| 0 | 0 | 4400 | 0 | 0 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17000 | 13500 | 15000 | 14000 | 12000 | |
| 7864 | 11052 | 10552 | 0 | 5332 | $= f_j - \Sigma_i w_{ij}$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Sigma_i w_{ij} =$ | 9136 | 2448 | 4448 | 14000 | 6668 |

Procedendo si ha:

$$k = \text{argmin}_i|\{j\text{: } c_{ij} \leq z_i\}| = \text{argmin}\{-; -; -; 3; 2; 2\} = k.$$

Incrementiamo ad esempio $z_5$ di $\Delta z_5 = \min_j\{c_{ij} - z_i : c_{ij} > z_i\}$= 4655 - 3465 = 1190, fino a $z_5$ = 4655. A questo punto anche il cliente 5 è bloccato.

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 16750 | 14600 | 19250 | 3800 | 9220 |
| 3200 | 15520 | 19200 | 10840 | 13168 |
| 8220 | 11640 | 17100 | 6516 | 8400 |
| 9780 | 600 | 3000 | 6270 | 3048 |
| 8120 | 3465 | 6650 | 4655 | 2177 |
| 30800 | 13200 | 8800 | 25531 | 19767 |

| z |
|---|
| 14600 |
| 12336 |
| 8220 |
| 3048 |
| 4655 |
| 13200 |

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 10800 | 5380 |
| 9136 | 0 | 0 | 1496 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1704 | 0 |
| 0 | 2448 | 48 | 0 | 0 |
| 0 | 1190 | 0 | 0 | 2478 |
| 0 | 0 | 4400 | 0 | 0 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17000 | 13500 | 15000 | 14000 | 12000 |
| 7864 | 9862 | 10552 | 0 | 4142 |

= $f_j - \sum_i w_{ij}$

$\sum_i w_{ij}$ =

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 9136 | 3638 | 4448 | 14000 | 7858 |

Procedendo si ha:

$$k = \text{argmin}_i|\{j\text{: } c_{ij} \leq z_i\}| = \text{argmin}\{-; -; -; 3; -; 2\} = k.$$

Incrementiamo $z_6$ di $\Delta z_6 = \min_j\{c_{ij} - z_i : c_{ij} > z_i\}$= 19767 - 13200 = 6567.

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 16750 | 14600 | 19250 | 3800 | 9220 |
| 3200 | 15520 | 19200 | 10840 | 13168 |
| 8220 | 11640 | 17100 | 6516 | 8400 |
| 9780 | 600 | 3000 | 6270 | 3048 |
| 8120 | 3465 | 6650 | 4655 | 2177 |
| 30800 | 13200 | 8800 | 25531 | 19767 |

| z |
|---|
| 14600 |
| 12336 |
| 8220 |
| 3048 |
| 4655 |
| 19767 |

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 10800 | 5380 |
| 9136 | 0 | 0 | 1496 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1704 | 0 |
| 0 | 2448 | 48 | 0 | 0 |
| 0 | 1190 | 0 | 0 | 2478 |
| 0 | 6567 | 10967 | 0 | 0 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17000 | 13500 | 15000 | 14000 | 12000 |
| 7864 | 3295 | 3985 | 0 | 4142 |

= $f_j - \sum_i w_{ij}$

$\sum_i w_{ij}$ =

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 9136 | 10205 | 11015 | 14000 | 7858 |

Procedendo si ha:

$$k = \text{argmin}_i|\{j\text{: } c_{ij} \leq z_i\}| = \text{argmin}\{-; -; -; 3; -; 3\} = k.$$

Incrementiamo ad esempio $z_4$ di $\Delta z_4 = \min_j\{c_{ij} - z_i : c_{ij} > z_i\}$= 6270 - 3048 = 3222. A questo punto anche il cliente 4 è bloccato.

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 16750 | 14600 | 19250 | 3800 | 9220 |
| 3200 | 15520 | 19200 | 10840 | 13168 |
| 8220 | 11640 | 17100 | 6516 | 8400 |
| 9780 | 600 | 3000 | 6270 | 3048 |
| 8120 | 3465 | 6650 | 4655 | 2177 |
| 30800 | 13200 | 8800 | 25531 | 19767 |

| z |
|---|
| 14600 |
| 12336 |
| 8220 |
| 6270 |
| 4655 |
| 19767 |

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 10800 | 5380 |
| 9136 | 0 | 0 | 1496 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1704 | 0 |
| 0 | 5670 | 3270 | 0 | 3222 |
| 0 | 1190 | 0 | 0 | 2478 |
| 0 | 6567 | 10967 | 0 | 0 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17000 | 13500 | 15000 | 14000 | 12000 |
| 7864 | 73 | 763 | 0 | 920 |

= $f_j - \sum_i w_{ij}$

$\sum_i w_{ij}$ =

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 9136 | 13427 | 14237 | 14000 | 11080 |

Procedendo si ha:

$$k = \text{argmin}_i|\{j\text{: } c_{ij} \leq z_i\}| = \text{argmin}\{-; -; -; -; -; 3\} = k.$$

Incrementiamo $z_6$ di $\Delta z_6 = \min_j\{c_{ij} - z_i : c_{ij} > z_i\} = 25531\text{-}19767 = 5764$.
Osserviamo però che sulla colonna B il massimo incremento consentito è solo 73, incrementiamo pertanto $z_6$ di 73, fino al valore 19840. A questo punto anche gli ultimi 3 clienti sono bloccati e non possono più essere incrementati.

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 16750 | 14600 | 19250 | 3800 | 9220 |
| 3200 | 15520 | 19200 | 10840 | 13168 |
| 8220 | 11640 | 17100 | 6516 | 8400 |
| 9780 | 600 | 3000 | 6270 | 3048 |
| 8120 | 3465 | 6650 | 4655 | 2177 |
| 30800 | 13200 | 8800 | 25531 | 19767 |

| z |
|---|
| 14600 |
| 12336 |
| 8220 |
| 6270 |
| 4655 |
| 19840 |

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 10800 | 5380 |
| 9136 | 0 | 0 | 1496 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1704 | 0 |
| 0 | 5670 | 3270 | 0 | 3222 |
| 0 | 1190 | 0 | 0 | 2478 |
| 0 | 6640 | 1140 | 0 | 73 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17000 | 13500 | 15000 | 14000 | 12000 | |
| 7864 | 0 | 690 | 0 | 847 | $= f_j - \sum_i w_{ij}$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sum_i w_{ij} =$ | 9136 | 13500 | 14310 | 14000 | 11153 |

A questo punto l'algoritmo si ferma perché non è più possibile incrementare alcun cliente. Il lower bound è pari a $\mathbf{LB = \sum_i z_i = 65921}$.

### *Upper bound alla soluzione ottima*

Attivando gli impianti bloccati B,D ogni cliente afferirà automaticamente all'impianto più conveniente di questi 2, pagando il relativo costo di afferenza. Un upper bound è dato quindi dal costo di questa soluzione:

**UB** = 13500 + 14000 + 3800 + 10840 + 6516 + 600 + 3465 + 13200 **= 65921**

**Poiché UB=LB, questa è la soluzione ottima del problema.**