LOT SIZING
IL PROBLEMA DI GESTIONE DELLE SCORTE

DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Sono date le domande di un determinato prodotto per le prossime 6 settimane:

3, 7, 2, 0, 1, 4

Si ha che:
- l'inventario iniziale è zero
- il costo di set-up della produzione è 40 per periodo
- il costo di produzione è 100 per unità prodotta
- il costo di immagazzinamento è 5 per unità prodotta per periodo
- il costo di backlog è 20 per unità prodotta per periodo

OBIETTIVO

Pianificare la produzione ottima per il prodotto in modo da soddisfare le domande settimanali, attraverso la procedura di ***Wagner-Within*** senza backlogging e ***Zangwill*** con backlogging.

Soluzione senza backlogging per i primi 6 periodi.

Occorre anzitutto costruire gli intervalli M(j,k). Si può velocizzare il calcolo poiché i costi sono costanti, cioè non dipendono dal periodo produttivo.

$M(1,1) = 40 + 100*3 + 5*0 = 340$
$M(1,2) = 40 + 100*(3+7) + 5*7 = 1075$
$M(1,3) = 40 + 100*(3+7+2) + 5*7+5*2*2 = 1295$
…
$M(1,k) = M(1,k-1) + 100*dk +5*dk*(k-1) = M(1,k-1) + [100 +5*(k-1)]*dk$
…
$M(j,k) = M(j,k-1) + 100*dk +5*dk*(k-j) = M(1,k-1) + [100 +5*(k-j)]*dk$

Nei 6 periodi si ha:

$M(1,1) = 340$
$M(1,2) = 340 + [105]*7 = 1075$
$M(1,3) = 1075 + [110]*2 = 1295$
$M(1,4) = 1295 +[115]*0 = 1295$
$M(1,5) = 1295 + [120]*1 = 1415$
$M(1,6) = 1415 + [125]*4 = 1915$

$M(2,2) = 740$
$M(2,3) = 740 + [105]*2 = 950$
$M(2,4) = 950 + [110]*0 = 950$
$M(2,5) = 950 + [115]*1 = 1065$
$M(2,6) = 1065 + [120]*4 = 1545$

$M(3,3) = 240$
$M(3,4) = 240$
$M(3,5) = 240 + [110]*1= 350$
$M(3,6) = 350 + [115]*4 = 810$

$M(4,4) = 0 + [105]*0 = 0$
$M(4,5) = 0 \underline{\mathbf{+ 40}} + [110]*1 = 145$
$M(4,6) = 145 + [115]*4 = 585$

$M(5,5) = 140$
$M(5,6) = 140 + [105]*4= 560$

$M(6,6) = 440$

Calcolo della $F_k= \min_{j=1,\ldots,k}\{F_{j-1} + M(j,k)\}$

$F_0 = 0$
$F_1 = \min\{F_0 + M(1,1)\}= 340$
$F_2 = \min\{F_0 + M(1,2);F_1 + M(2,2)\} = \min\{\underline{1075};1080\} = 1075$
$F_3 = \min\{F_0 + M(1,3);F_1 + M(2,3); F_2 + M(3,3)\} = \min\{1295;\underline{340+950};1075+240\} = 1290$
$F_4 = \min\{F_0 + M(1,4);F_1 + M(2,4); F_2 + M(3,4); F_3 + M(4,4)\} = \min\{1295;\underline{340+950};1075+240; \underline{1290+0}\} = 1290$
$F_5 = \min\{F_0 + M(1,5);F_1 + M(2,5); F_2 + M(3,5); F_3 + M(4,5); F_4 + M(5,5)\} = \min\{1415;\underline{340+1065};1075+350; 1280+145; 1280+140\} = 1405$
$F_6 = \min\{F_0 + M(1,6);F_1 + M(2,6); F_2 + M(3,6); F_3 + M(4,6); F_4 + M(5,6); F_5 + M(6,6)\} = \min\{1915;340+1535;1075+810; 1290+585; 1290+560;\underline{1405+440}\} = 1845$

Il piano di produzione ottimo prevede pertanto di produrre nei soli periodi 1, 2, 6:

$$x_1^* = 3; \quad x_2^* = 10; \quad x_6^* = 4$$

Si osservi l'eccezione nella formula di M(4,5). In effetti il costo di set-up della produzione va pagato solo quando la produzione in un intervallo produttivo diventa diversa da zero.

Soluzione con backlogging per i primi 6 periodi.

Domanda = 3, 7, 2, 0, 1, 4

Occorre anzitutto costruire gli intervalli M(*j,k*), considerando che è possibile produrre in qualsiasi periodo *i* compreso tra *j* e *k*.

M(1,1) = 40 + 100*3 = 340
M(1,2) = 40 + 100*(3+7) + min{ <u>5*7*1</u>; 20*3} = 1040+35
M(1,3) = 40 + 100*(3+7+2) + min{<u>5*(7*1+2*2)</u>; 20*3+5*2; 20*(3*2+7)}
= 1240+55
M(1,4) = 40 + 100*(3+7+2+0) + min{<u>5*(7*1+2*2)</u>; 3*20+ 5*2; 20*(3*2+7); 20*(3*3+7*2+2*1)} = 1240+55
M(1,5) = 40 + 100*(3+7+2+0+1) + min{<u>5*(7*1+2*2+1*4)</u>; 20*3+5*(2*1+1*3); 20*(3*2+7*1)+5*1*1; 20*(3*3+7*2+2*1)+5*1; 20*(3*4+7*3+2*2)} = 1340+ 75=1415
M(1,6) = 40 + 100*(3+7+2+0+1+4) + min{5*(7*1+2*2+1*3+4*5); <u>20*3*1+ 5*(2*1+1*3+4*4);</u> 20*(3*2+7*1)+5*(1*2+4*3); 20*(3*3+7*2+2*1)+ 5*(1*1+4*2); 20*(3*4+7*3+2*2)+5*(4*1); 20*(3*5+7*4+2*3+1*1)}
= 1740+ 165 (è conveniente produrre in *i*=2)

Indicando con:
$P(j,k) = 40 + 100*(d_j + d_{j+1} + \ldots + d_k)$
$C(j,i,k)=20*(d_j*(i-1)+d_{j+1}*(i-2)+\ldots+ d_{i-1}*1) + 5*(d_{i+1}*1+d_{i+2}*2+\ldots+ d_k*(k-i))$

Si ha: $M(j,k)=P(j,k) + \min_{i=j,\ldots,k}\{C(j,i,k)\}$

P(j,k) rappresenta il costo di produzione nell'intervallo produttivo [j,k], mentre C(j,i,k) rappresenta i costi di backlogging e immagazzinamento nell'intervallo produttivo [j,k]. Si può velocizzare il calcolo dei termini P(j,k) e C(j,i,k) poiché i costi sono costanti, cioè non dipendono dal periodo produttivo. Confrontando i termini P(j,k) e P(j,k-1) e i termini C(j,i,k) e C(j,i,k-1) si ottengono le relazioni:

$P(j,k) = P(j,k-1) + 100*d_k$
$C(j,i,k)=C(j,i,k-1) + 5*d_k*(k-i)$ per $i=j,\ldots,k-1$
$C(j,k,k)=C(j,k-1,k-1) +20*(d_j + d_{j+1}+\ldots+ d_{k-1})$

Si ha pertanto:

M(2,2)= 40 + 100*7 +min{0} = 740
M(2,3) = 740+100*2 + min{ 0+5*2*1; 0+20*7} = 940+10=950
M(2,4) = 940+100*0 + min{ 10+5*0*2; 140+5*0*1; 20*10} = 940+10
M(2,5) = 940+100*1 + min{10+5*1*3; 140+5*1*2; 200+5*1*1; 200+20*(7+2+0)}
= 1040 +25
M(2,6) = 1040 +100*4 + min{25+5*4*4; 150+5*4*3; 205+5*4*2; 380+5*4*1; 380+20*10}= 1440+105

$M(3,3) = 40+100*2 + \min\{\underline{0}\} = 240$
$M(3,4) = 240+100*0 + \min\{\underline{0+5*0*1}; 0+20*2\} = 240$
$M(3,5) = 240+100*1 + \min\{\underline{0+5*1*2}; 40+5*1*1; 40+20*(2+0)\} = 340 + 10$
$M(3,6) = 340 +100*4 + \min\{\underline{10+5*4*3}; 45+5*4*2; 80+5*4*1; 80+20*3\}=740 + 70$

$M(4,4) = 0 + \min\{\underline{0}\} = 0$
$M(4,5) = \mathbf{40 +} 0 + 100*1 + \min\{0+5*1*1; \underline{0+20*(0)}\} = 140 + 0$
$M(4,6) = 140 +100*4 + \min\{5+5*4*2; \underline{0+5*4*1}; \underline{0+20*1}\}=540 + 20$
$M(5,5) = 140 + \min\{0\} = 140$
$M(5,6) = 140 +100*4 + \min\{\underline{0+5*4*1}; \underline{0+20*1}\}=540 + 20$

$M(6,6) = 440$

Calcolo della $F_k= \min_{j=1,\ldots,k}\{F_{j-1} + M(j,k)\}$

$F_0 = 0$
$F_1 = \min\{F_0 + M(1,1)\}= 340$
$F_2 = \min\{F_0 + M(1,2);F_1 + M(2,2)\} = \min\{\underline{1075};1080\} = 1075$
$F_3 = \min\{F_0 + M(1,3);F_1 + M(2,3); F_2 + M(3,3)\} = \min\{1295;\underline{340+950};1075+240\}$
$= 1290$
$F_4 = \min\{F_0 + M(1,4);F_1 + M(2,4); F_2 + M(3,4); F_3 + M(4,4)\}$
$= \min\{1295;\underline{340+950};1075+240; \underline{1280+0}\}= 1290$
$F_5 = \min\{F_0 + M(1,5);F_1 + M(2,5); F_2 + M(3,5); F_3 + M(4,5); F_4 + M(5,5)\}$
$= \min\{1415;\underline{340+1065};1075+350; 1280+140; 1280+140\} = 1405$
$F_6 = \min\{F_0 + M(1,6);F_1 +M(2,6);F_2 + M(3,6); F_3+M(4,6); F_4+M(5,6); F_5 + M(6,6)\}$
$= \min\{1905;340+1535;1075+810; 1280+560; 1280+560; \underline{1405+440}\} = 1845$

Il piano di produzione ottimo prevede anche in questo caso di produrre nei soli periodi 1, 2, 6:

$$x_1^* = 3; \quad x_2^* = 10; \quad x_6^* = 4$$

Esercizio

Verificare che, con una domanda = 1, 4, 1, 3, 5, 2, le soluzioni senza e con backlogging sono, rispettivamente, ($x_1^* = 6$; $x_4^* = 10$) di costo 1755 e ($x_2^* = 9$; $x_5^* = 7$) di costo 1745.