

JOB SHOP SCHEDULING

Algoritmo di tabu search

DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Sono dati 4 job da eseguire su quattro macchine M_1, M_2, M_3, M_4 , descritti nel formato OPERAZIONE (MACCHINA, DURATA):

job 1: A ($M_1, 10$) B ($M_2, 10$) C ($M_3, 6$) D ($M_4, 1$)

job 2: E ($M_2, 12$) F ($M_4, 3$) G ($M_1, 1$) H ($M_3, 10$)

job 3: I ($M_4, 12$) L ($M_2, 15$) M ($M_1, 6$) N ($M_3, 10$)

job 4: O ($M_4, 2$) P ($M_2, 4$) Q ($M_3, 18$) R ($M_1, 5$)

La soluzione iniziale è data dall'ordinamento topologico:

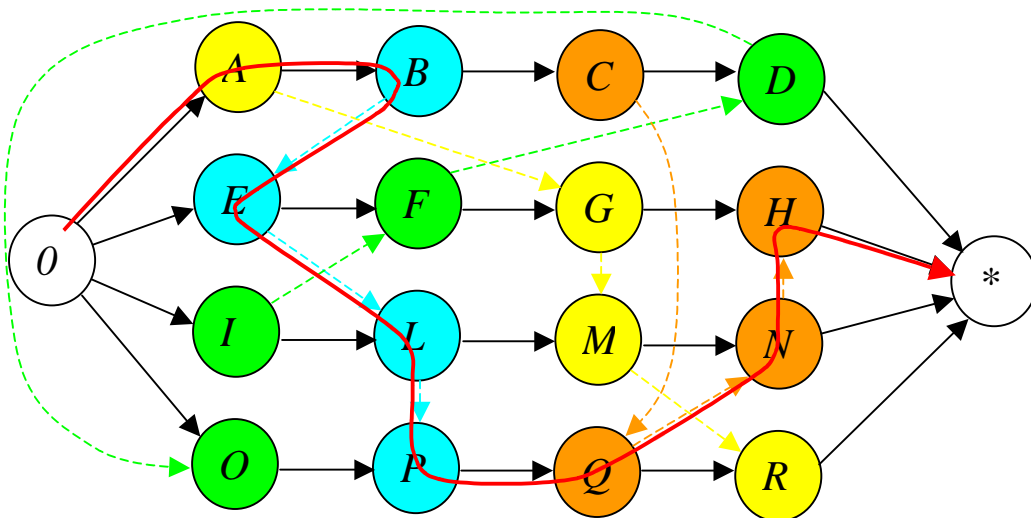
0 A B C E I F D G L O P M Q R N H *

dove "0" e "*" sono le operazioni fittizie *start* e *finish*.

OBIETTIVO

1. Calcolare teste e code di ogni operazione e determinare il cammino critico.
2. determinare la mossa più vantaggiosa secondo Nowicki e Smutnicki 1996,
3. determinare la mossa più vantaggiosa secondo Nowicki e Smutnicki 2005,
4. calcolare il makespan della nuova soluzione nei due casi.

Calcolo di teste, code e cammino critico.



| | 0 | A | B | C | E | I | F | D | G | L | O | P | M | Q | R | N | H | * |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Teste | 0 | 0 | 10 | 20 | 20 | 0 | 32 | 35 | 35 | 32 | 36 | 47 | 47 | 51 | 69 | 69 | 79 | 89 |
| Code | 89 | 89 | 79 | 51 | 69 | 69 | 48 | 45 | 27 | 57 | 44 | 42 | 26 | 38 | 5 | 20 | 10 | 0 |

Cammino critico: 0 A BELP QNH *

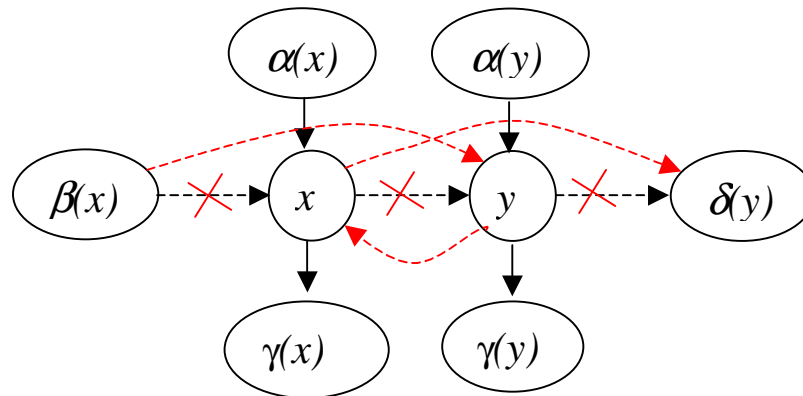
La mossa più vantaggiosa secondo Nowicki e Smutnicki 1996

Mosse ammissibili (due per blocco): $v(B,E)$, $v(L,P)$, $v(Q,N)$, $v(N,H)$.

NB: con la notazione $v(x,y)$ si indica la mossa di invertire l'ordine delle operazioni x e y lasciando invariato l'ordine di processamento delle altre.

Per stimare il makespan di una soluzione dopo una mossa con NS96 si utilizza la formula:

$$C'_{max} = \max\{h'(x)+q'(x); h'(y)+q'(y)\}$$



$$\begin{aligned} h'(y) &= \max\{h(\beta(x)) + p_{\beta(x)}; h(\alpha(y)) + p_{\alpha(y)}\} \\ h'(x) &= \max\{h'(y) + p_y; h(\alpha(x)) + p_{\alpha(x)}\} \\ q'(x) &= p_x + \max\{q(\delta(y)); q(\gamma(x))\} \\ q'(y) &= p_y + \max\{q'(x); q(\gamma(y))\} \end{aligned}$$

Si ha:

$v(B,E)$:

$$\begin{aligned} h'(E) &= \max\{h(\beta(B)) + p_{\beta(B)}; h(\alpha(E)) + p_{\alpha(E)}\} \\ h'(B) &= \max\{h'(E) + p_E; h(\alpha(B)) + p_{\alpha(B)}\} \\ q'(B) &= p_B + \max\{q(\delta(E)); q(\gamma(B))\} \\ q'(E) &= p_E + \max\{q'(B); q(\gamma(E))\} \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \alpha(E) &= 0 & \alpha(B) &= A \\ \beta(E) &= B & \beta(B) &= \emptyset \\ \gamma(E) &= F & \gamma(B) &= C \\ \delta(E) &= L & \delta(B) &= E \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned}
 h'(E) &= \max\{0; 0\} = 0 \\
 h'(B) &= \max\{h'(E) + p_E; h(A) + p_A\} = \max\{0+12; 0+10\} = 12 \\
 q'(B) &= 10 + \max\{57; 51\} = 67 \\
 q'(E) &= 12 + \max\{67; 48\} = 79 \\
 C'_{max} &= 79
 \end{aligned}$$

$v(L,P)$:

$$\begin{aligned}
 h'(P) &= \max\{h(\beta(L)) + p_{\beta(L)}; h(\alpha(P)) + p_{\alpha(P)}\} \\
 h'(L) &= \max\{h'(P) + p_P; h(\alpha(L)) + p_{\alpha(L)}\} \\
 q'(L) &= p_L + \max\{q(\delta(P)); q(\gamma(L))\} \\
 q'(P) &= p_P + \max\{q'(L); q(\gamma(P))\}
 \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned}
 h'(P) &= \max\{h(E) + p_E; h(O) + p_O\} = \max\{20+12; 36+2\} = 38 \\
 h'(L) &= \max\{h'(P) + p_P; h(I) + p_I\} = \max\{38+4; 0+12\} = 42 \\
 q'(L) &= p_L + \max\{q(\emptyset); q(M)\} = 15 + \max\{0; 26\} = 41 \\
 q'(P) &= p_P + \max\{q'(L); q(Q)\} = 4 + \max\{41; 38\} = 45 \\
 C'_{max} &= 83
 \end{aligned}$$

$v(Q,N)$:

$$\begin{aligned}
 h'(N) &= \max\{h(\beta(Q)) + p_{\beta(Q)}; h(\alpha(N)) + p_{\alpha(N)}\} = \max\{20+6; 47+6\} = 53 \\
 h'(Q) &= \max\{h'(N) + p_N; h(\alpha(Q)) + p_{\alpha(Q)}\} = \max\{53+10; 47+4\} = 63 \\
 q'(Q) &= p_Q + \max\{q(\delta(N)); q(\gamma(Q))\} = 18 + \max\{10; 5\} = 28 \\
 q'(N) &= p_N + \max\{q'(Q); q(\gamma(N))\} = 10 + \max\{28; --\} = 38 \\
 C'_{max} &= 91
 \end{aligned}$$

$v(N,H)$ Si potrebbe evitare perché si tratta delle ultime due operazioni del cammino critico (e quindi non può migliorare)

$$\begin{aligned}
 h'(H) &= \max\{h(\beta(N)) + p_{\beta(N)}; h(\alpha(H)) + p_{\alpha(H)}\} = \max\{51+18; 35+1\} = 69 \\
 h'(N) &= \max\{h'(H) + p_H; h(\alpha(N)) + p_{\alpha(N)}\} = \max\{69+10; 47+6\} = 79 \\
 q'(N) &= p_N + \max\{q(\delta(H)); q(\gamma(N))\} = 10 + \max\{--; 0\} = 10 \\
 q'(H) &= p_H + \max\{q'(N); q(\gamma(H))\} = 10 + \max\{10; --\} = 20 \\
 C'_{max} &= 89
 \end{aligned}$$

Mossa più vantaggiosa secondo Nowicki e Smutnicki 1996: $v(B,E)$.

La mossa più vantaggiosa secondo Nowicki e Smutnicki 2005

Per calcolare esattamente il makespan di una soluzione dopo una mossa con NS05 si utilizza la formula:

$$C'_{max} = \max \{ D[P_\sigma(x \vee y)]; D[P_\pi(\bar{x})] \}$$

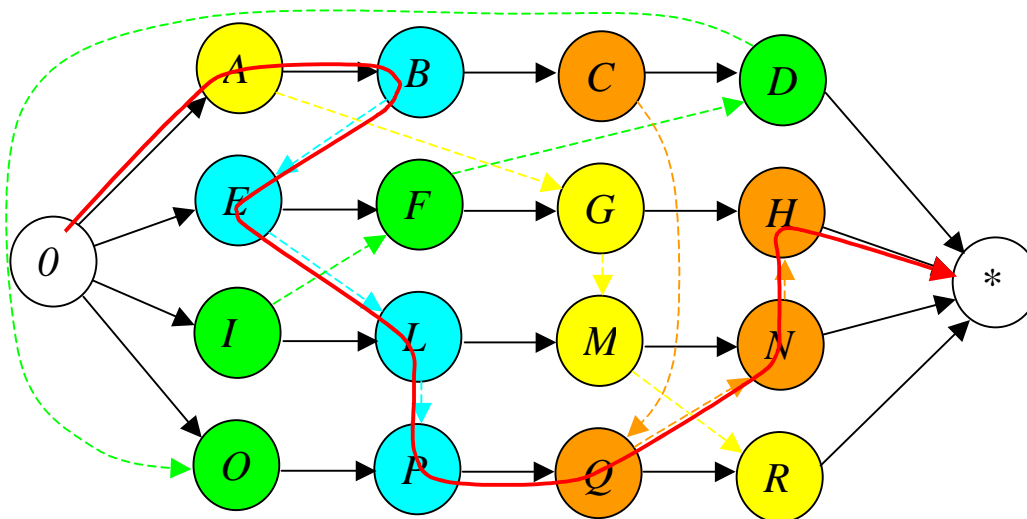
Dove $D[P_\sigma(x \vee y)] = \max \{h'(x)+q'(x); h'(y)+q'(y)\} = \text{NS96}$ e $D[P_\pi(\bar{x})]$ è la lunghezza del cammino critico che NON passa per x nella soluzione iniziale π data:

$$D[P_\pi(\bar{x})] = \max \{h(u) + p_u + q(v) : OT(u) < OT(x), OT(v) > OT(x)\}$$

Nota che $D[P_\pi(\bar{x})]$ non va calcolato se $D[P_\sigma(x \vee y)] \geq D[P_\pi]$, in quanto $D[P_\pi(\bar{x})] \leq D[P_\pi]$, quindi il calcolo è esteso alle sole mosse migliorative secondo NS96. Allo scopo è necessario individuare per ogni mossa migliorativa tutti gli archi che scavalcano il nodo x nell'ordinamento topologico iniziale (uno per job e potenzialmente uno per macchina).

Mosse migliorative: $v(B,E)$, $v(L,P)$.

job 1: A (M₁, 10) B (M₂, 10) C (M₃, 6) D (M₄, 1)
 job 2: E (M₂, 12) F (M₄, 3) G (M₁, 1) H (M₃, 10)
 job 3: I (M₄, 12) L (M₂, 15) M (M₁, 6) N (M₃, 10)
 job 4: O (M₄, 2) P (M₂, 4) Q (M₃, 18) R (M₁, 5)



| | 0 | A | B | C | E | I | F | D | G | L | O | P | M | Q | R | N | H | * |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Teste | 0 | 0 | 10 | 20 | 20 | 0 | 32 | 35 | 35 | 32 | 36 | 47 | 47 | 51 | 69 | 69 | 79 | 89 |
| Code | 89 | 89 | 79 | 51 | 69 | 69 | 48 | 45 | 27 | 57 | 44 | 42 | 26 | 38 | 5 | 20 | 10 | 0 |

Si ha:

$v(B,E)$: archi di job (0,E), (0,I), (0,O), archi di macchina (A,G).
 arco (0,E): $h(0)+p_0+q(E) = 69$
 arco (0,I): $h(0)+p_0+q(I) = 69$
 arco (0,O): $h(0)+p_0+q(O) = 44$
 arco (A,G): $h(A)+p_A+q(G) = 0+10+27=37$

$$C'_{max} = \max\{\text{NS96}; P_\pi(\underline{x})\} = \max\{79;69\} = 79$$

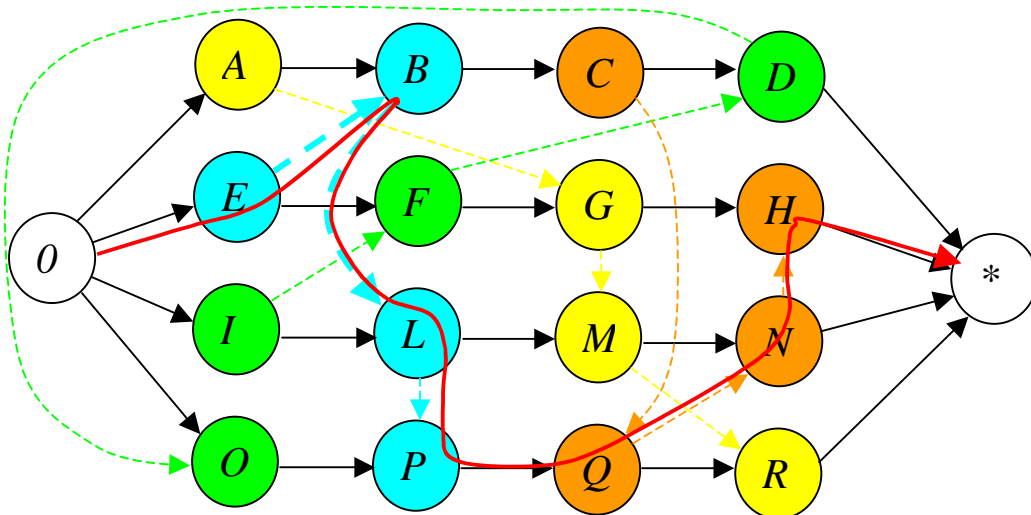
$v(L,P)$: archi di job (D,*), (G,H), (0,O), archi di macchina (G,M), (D,O), (C,Q).
 arco (D,*): $h(D)+p_D+q(*) = 35+1+38=74$
 arco (G,H): $h(G)+p_G+q(H) = 35+1+10=46$
 arco (0,O): $h(0)+p_0+q(O) = 44$
 arco (G,M): $h(G)+p_G+q(M) = 35+1+26=62$
 arco (D,O): $h(D)+p_D+q(O) = 35+1+44=80$
 arco (C,Q): $h(C)+p_C+q(Q) = 20+6+38=64$

$$C'_{max} = \max\{NS96; P_{\pi(\underline{x})}\} = \max\{83;80\}=83$$

Qui si può notare che, essendo $NS96=83 > 79$ (stima della mossa precedente) si poteva risparmiare questo calcolo in quanto questa mossa è certamente peggiore della precedente. Nota che questa considerazione vale solo perché il 79 della mossa precedente è il valore esatto del makespan mentre il valore 83 della mossa attuale è una sottostima al valore del makespan ottenibile in questa mossa.

Mossa più vantaggiosa secondo Nowicki e Smutnicki 2005: $v(B,E)$ (in questo caso è la stessa di NS96).

Makespan della nuova soluzione



| | 0 | A | E | B | C | I | F | D | G | L | O | P | M | Q | R | N | H | * |
|-------|---|---|---|----|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Teste | 0 | 0 | 0 | 12 | 22 | 0 | 12 | 28 | 15 | 22 | 29 | 37 | 37 | 41 | 59 | 59 | 69 | 79 |

Il makespan della nuova soluzione è 79, come già calcolato con NS05, dovuto al cammino critico in rosso.