

Generazione di turni per un servizio di sorveglianza

Un istituto di vigilanza privato con sede in D offre servizi di scorta armata e pattugliamento per il presidio di zone commerciali e residenziali. I contratti stipulati con i clienti prevedono ogni giorno l'offerta dei seguenti servizi che richiedono l'utilizzo dell'auto di servizio:

ID servizio	Lista servizi		
	Da	dalle	alle
1	pattugliamento diurno zona A	9.30	11.30
2	pattugliamento diurno zona B	9.20	11.00
3	scorta armata da A a D	13.00	14.30
4	scorta armata da B a C	15.00	16.20

- il servizio di scorta armata prevede il seguente protocollo:
 - o rientro in sede
 - o ritiro armi (questa operazione richiede 5 minuti)
 - o arrivo al punto di partenza del servizio entro l'orario previsto
 - o espletamento servizio
 - o rientro in sede
 - o restituzione armi (questa operazione richiede 5 minuti)
- il servizio di sorveglianza/pattugliamento prevede il seguente protocollo:
 - o arrivo nel punto di partenza del servizio entro l'orario previsto
 - o espletamento servizio
- il contratto di lavoro con i dipendenti prevede:
 - o la durata di un turno è minore o uguale a 7 ore e 30 minuti (450 min), comprensivi di una pausa per il pranzo di 30 minuti da consumarsi presso la sede in orario compreso tra le 12:00 e le 14:00. La pausa non può interrompere un servizio.
 - o Il turno inizia e termina in sede in orario compreso tra le 7:00 e le 18:00.
 - o Il costo di un turno prevede le seguenti voci:
 - costo fisso per ogni turno di 150 euro,
 - costo aggiuntivo se il turno contiene un servizio di sorta armata 20 euro,
 - costo aggiuntivo per spostamento in auto tra due località 1 euro/minuto.

L'istituto desidera pianificare dei turni giornalieri di costo minimo per i suoi dipendenti.

1. costruire 4 turni contenenti un solo servizio (da 1 a 4),
2. formulare il problema di set partitioning corrispondente e determinare il vettore duale associato al suo rilassamento lineare,
3. generare il turno di costo ridotto più negativo (risolvendo in modo esatto il problema di generazione del turno) e aggiornare il vettore duale.
4. Trovare la soluzione ottima.

I tempi di spostamento da una località all'altra (in minuti) sono dati in tabella:

	A	B	C	D
A	0	10	10	20
B	10	0	10	10
C	10	10	0	10
D	20	10	10	0

Soluzione

La generazione dei 4 turni iniziali è molto semplice. Dobbiamo solo calcolare il costo di ciascun turno:

turno 1: espleta il servizio 1, quindi prevede uno spostamento da D ad A all'inizio del turno e uno spostamento da A a D alla fine. Costo totale $150+20+20=190$.

turno 2: espleta il servizio 2, quindi prevede uno spostamento da D a B all'inizio del turno e uno spostamento da B a D alla fine. Costo totale $150+10+10=170$.

turno 3: espleta il servizio 3, quindi prevede un solo spostamento da D ad A all'inizio del turno ed il costo aggiuntivo per il servizio di scorta armata. Costo totale $150+20+20=190$.

turno 4: espleta il servizio 4, quindi prevede uno spostamento da D a B all'inizio del turno, uno spostamento da C a D alla fine ed il costo aggiuntivo per il servizio di scorta armata. Costo totale $150+10+10+20=190$.

Associando una variabile $x_i = \begin{cases} 0 & \text{servizio non utilizzato} \\ 1 & \text{servizio utilizzato} \end{cases}$ al turno i il problema di set covering diventa (x_i moltiplica il vettore di incidenza del turno i):

$$\min 190x_1 + 170x_2 + 190x_3 + 190x_4$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \\ x_i \in \{0,1\} \quad i=1,\dots,4 \end{cases} \quad \text{il rilassamento lineare ammette SBA ottima (unica) } x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Possiamo quindi costruire la matrice CARRY associata alla base ottima:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1} \quad ; \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il vettore duale si calcola con la formula consueta:

$$u^T = c_b^T B^{-1} = (190 \quad 170 \quad 190 \quad 190)$$

Il valore della soluzione è: $z = c_b^T B^{-1}b = u^T b = 740$

CARRY=

$-u^T$	$-z$
B^{-1}	\bar{b}

 \Rightarrow

-190	-170	-190	-190	-740
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	1	1

La generazione di un turno (del vettore di incidenza y del turno) di costo ridotto negativo si ottiene trovando un cammino di lunghezza negativa in un grafo opportuno in cui ciascun nodo è associato all'inizio/fine di un servizio. La formula per il costo ridotto di un turno y è $\bar{c}_y = c_y - u^T y$ dove c_y è il costo del turno e u il vettore duale (una variabile duale per ciascuna riga del problema di set partitioning, cioè per ciascun servizio). Per ottenere l'associazione tra lunghezza del cammino e

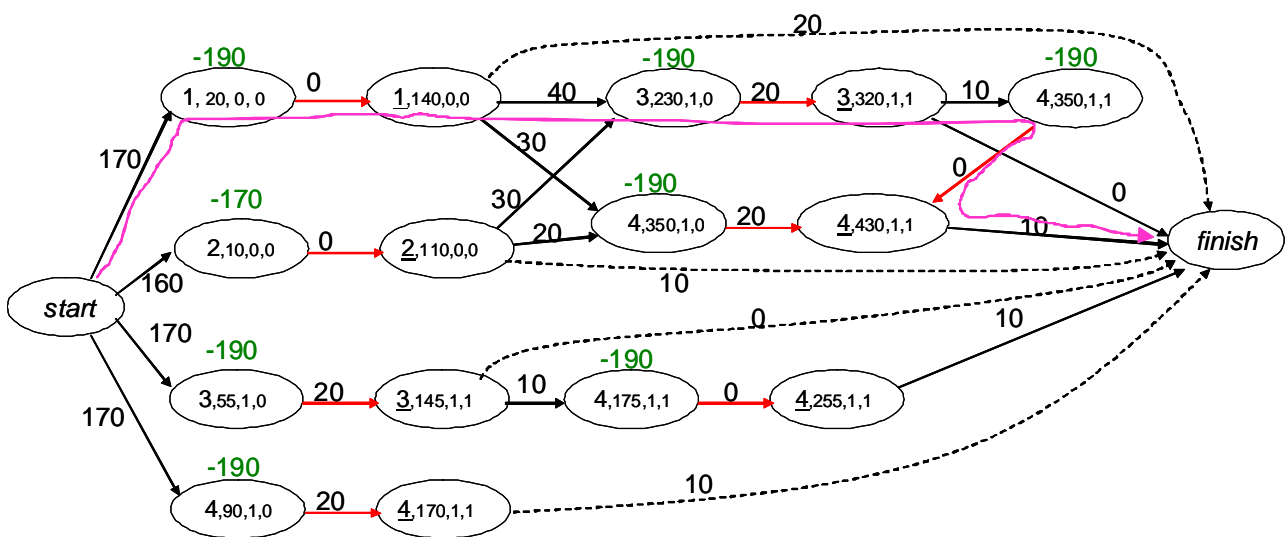
costo ridotto del turno sarà allora sufficiente pesare ciascun nodo associato all'inizio del servizio i con u_i e pesare ciascun arco con il contributo al costo del turno associato.

La struttura del nodo include seguenti eventi:

(id servizio, durata turno, flag pausa, flag scorta armata)

Il flag di pausa a 1 indica che la pausa è già stata effettuata prima dell'inizio del servizio id, 0 altrimenti. Analogamente il flag scorta armata a 1 indica che i servizi precedenti id comprendono almeno un servizio di scorta armata (e quindi il costo aggiuntivo è già stato conteggiato), 0 altrimenti. Tutti i tempi verranno espressi in minuti. Due nodi speciali saranno utilizzati per rappresentare l'inizio (*start*) e la fine (*finish*) del turno. Un arco collega due nodi se gli eventi associati ai due nodi possono verificarsi consecutivamente in un turno ammissibile.

In figura troviamo il grafo per la generazione di un turno. Un cammino minimo è evidenziato in rosa e corrisponde al turno comprendente i servizi 1,3,4 di costo 250 e costo ridotto -320.



Il vettore di incidenza del turno entrante in base è quindi $x_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, con $c_{x_5} = 250$ e $\bar{c}_{x_5} = -320$.

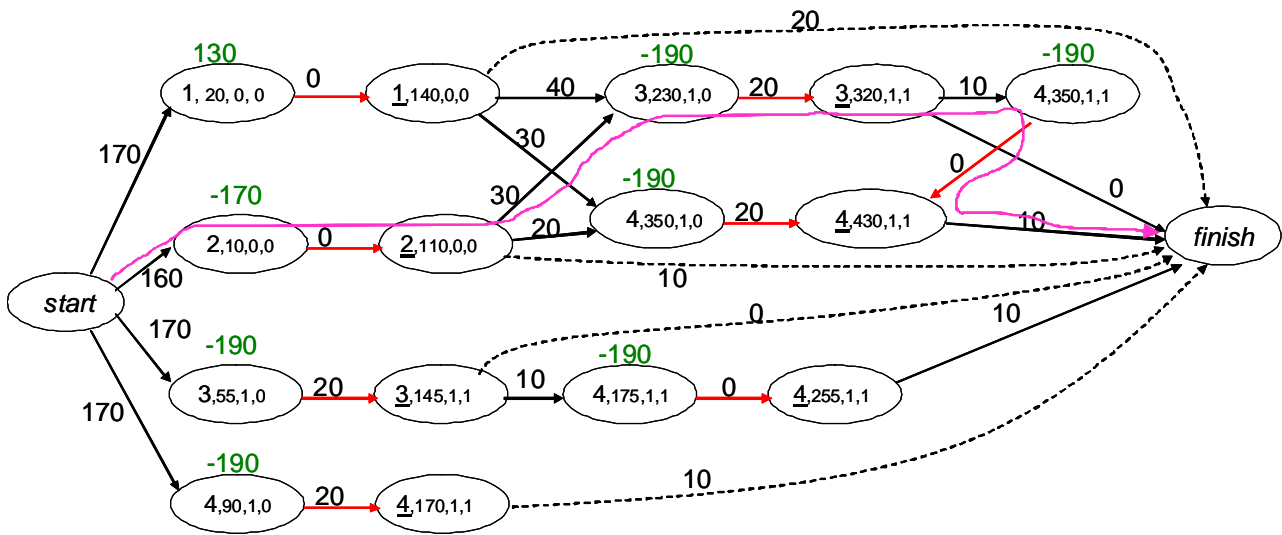
Facciamo entrare in base x_5 e aggiorniamo la CARRY.

-320	-190	-170	-190	-190	-740
1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1

→

0	130	-170	-190	-190	-420
1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	-1	0	1	0	0
0	-1	0	0	1	0

Effettuando un pivot sulla riga 1 (entra x_5 ed esce x_1) abbiamo in base x_5, x_2, x_3, x_4 . La soluzione base associata è intera e utilizza solo i turni x_5, x_2 . Per rispondere alla domanda 4 dobbiamo effettuare (almeno) una nuova ricerca di cammino minimo, dopo aver aggiornato i costi duali (in verde in figura).



Ci sono ancora diversi cammini negativi, il minimo dei quali è evidenziato in rosa ed ha peso -320. La soluzione corrente non sembra pertanto ottima. Effettuiamo un'ulteriore iterazione del metodo:

Il vettore di incidenza del turno entrante è $x_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, con $c_{x_6} = 230$ e $\bar{c}_{x_6} = -320$. $\bar{x}_6 = B^{-1}x_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

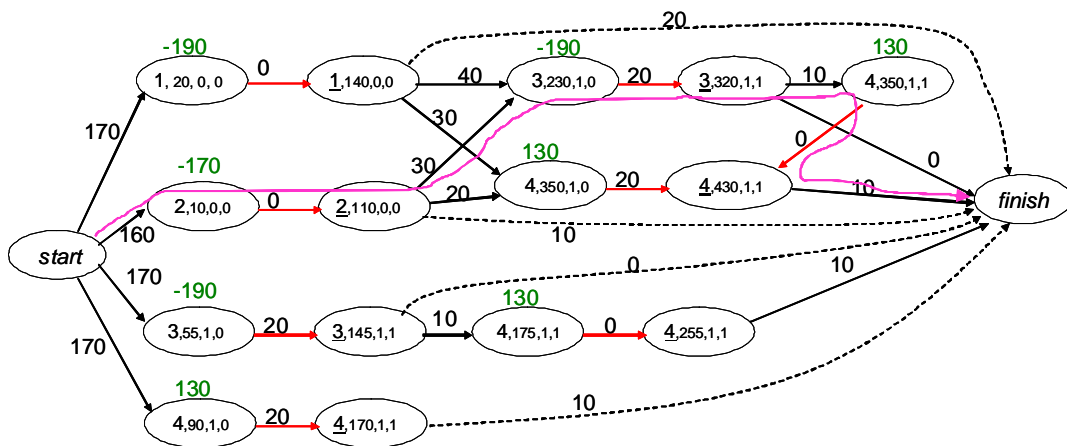
Facciamo entrare in base x_6 e aggiorniamo la CARRY. Esce x_3

-320	130	-170	-190	-190	-420
0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	-1	0	1	0	0
1	-1	0	0	1	0

⇒

0	-190	-170	-190	130	-420
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	-1	1
0	0	0	1	-1	0
1	-1	0	0	1	0

Con un pivot degenere sulla riga 4 (entra x_6 ed esce x_4) abbiamo in base x_5, x_2, x_3, x_6 , tuttavia il costo della soluzione (e la soluzione) non è cambiato. Una nuova ricerca porta al grafo in figura:



Non essendoci più cammini negativi concludiamo che la soluzione corrente è ottima. Si utilizzeranno pertanto i soli turni 2 e 5, con un costo 420.