COLUMN GENERATION
IL PROBLEMA DI TAGLIO OTTIMO

DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Un'azienda vende lavagne metalliche di diverse misure, ottenute ritagliando rettangoli di lamiera delle dimensioni desiderate da un nastro metallico unico alto 100 cm e lungo 50 metri. Sono date le domande di lavagne nel prossimo periodo:

Modello	altezza	larghezza	Quantità ordinata
A	100 cm	60 cm	62
B	100 cm	150 cm	36
C	100 cm	320 cm	120
D	100 cm	390 cm	96

OBIETTIVO

Determinare il numero minimo di rotoli di nastro metallico necessari per produrre la quantità ordinata. Un LB è chiaramente:

$$\left\lceil \frac{62\times 0{,}6+36\times 1{,}5+120\times 3{,}2+96\times 3{,}9}{50} \right\rceil = \left\lceil \frac{37{,}2+54+384+374{,}4}{50} \right\rceil = \left\lceil \frac{849{,}6}{50} \right\rceil = \lceil 16{,}992 \rceil = 17$$

Ma non è detto che 17 rotoli siano sufficienti non essendo riutilizzabile lo sfrido di ciascun rotolo. E' comunque necessario individuare anche la modalità di taglio di ciascun rotolo.

Formulazione.

Dati:

modalità di taglio: numero di modelli A,B,C,D ricavati da un rotolo

Esempi. Da un rotolo di 50 m si possono ricavare:
modalità 1: 83 moduli da 60 cm (modello A), con uno sfrido di 20 cm
modalità 2: 33 moduli da 150 cm (modello B), con uno sfrido di 50 cm
modalità 3: 15 moduli da 320 cm (modello C), con uno sfrido di 200 cm
modalità 4: 12 moduli da 390 cm (modello D), con uno sfrido di 320 cm
modalità 5: 15 moduli da 320 cm (C) e 3 da 60 cm (A), con uno sfrido di 20 cm
modalità 6: 12 moduli da 390 cm (D) e 1 da 320 cm (C), con uno sfrido di 0 cm

$A_i =$ Vettore di incidenza della modalità i.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 83 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;;\; A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 33 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;;\; A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} \;;\; A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \;;\; A_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} \;;\; A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Variabili:

$x_i =$ numero di tavole tagliate in modalità *i*.

Modello di PLI:

$$\min \sum_i x_i$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0, \quad \text{int}\,ero \end{cases}$$ dove *b* è la domanda dei diversi modelli: $b = \begin{pmatrix} 62 \\ 36 \\ 120 \\ 96 \end{pmatrix}$

e *A* la matrice di incidenza delle modalità di taglio (moltissime).

Soluzione.

Si parte con una matrice A ridotta (per es. utilizzando le prime 6 modalità dell'esempio, o le prime 4) e poi si generano nuove modalità di taglio in grado di migliorare la formulazione. In questa fase si considera il rilassamento lineare del problema.

$$\min \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$\begin{cases} 83x_1 + 3x_5 = 62 \\ 33x_2 = 36 \\ 15x_3 + 15x_5 + x_6 = 120 \\ 12x_4 + 12x_6 = 96 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Prendendo la base ammissibile formata dalle prime 4 colonne si ha la soluzione:

$$\begin{cases} x_1 = 62/83 \\ x_2 = 36/33 \\ x_3 = 120/15 \\ x_4 = 96/12 \end{cases}$$ di costo $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17{,}837897...$ peggiore del LB (e non intero)

Le variabili duali associate alla soluzione sono:

$$u^T = c_B^T B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/83 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/83 & 1/33 & 1/15 & 1/12 \end{pmatrix}$$

L'idea è di trovare una nuova modalità di taglio di *costo ridotto negativo.*

Il costo ridotto di una variabile fuori base x_j è: $\boxed{\bar{c}_j = c_j - u^T A_j}$, dove $c_j = 1$ e i coefficienti di A_j sono le incognite da determinare. Possiamo allora impostare il:

Problema di generare una colonna di costo ridotto negativo:

variabili: $y_k =$ numero di moduli del modello k = 1,…,4 in un rotolo

vincoli: dimensioni moduli ≤ dimensione modulo: $0{,}6y_1 + 1{,}5\, y_2 + 3{,}2\, y_3 + 3{,}9\, y_4 \le 50$

$y_k \ge 0$, intero

Funzione obiettivo: max $u^T y$ se troviamo una soluzione ammissibile di valore $u^T y > 1$ allora y è una modalità di taglio di costo ridotto negativo. Se la soluzione ottima del problema ha costo $u^T y \le 1$ allora non esiste una modalità di taglio di costo ridotto negativo, e quindi la Soluzione Base Ammissibile corrente è ottima.

Per il nostro esempio:

$$\max \quad \frac{1}{83}y_1 + \frac{1}{33}y_2 + \frac{1}{15}y_3 + \frac{1}{12}y_4$$

$$\begin{cases} 0{,}6y_1 + 1{,}5y_2 + 3{,}2y_3 + 3{,}9y_4 \le 50 \\ y \ge 0, \quad \text{intero} \end{cases}$$

ammette una soluzione ammissibile $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$ di valore >1.

Pertanto la soluzione:

$$\begin{cases} x_1 = 62/83 \\ x_2 = 36/33 \\ x_3 = 120/15 \\ x_4 = 96/12 \end{cases}$$

non è ottima ed è conveniente far entrare in base la colonna $A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$

Con costo ridotto -1/15 (NB: evidentemente usare le prime 4 modalità non era la soluzione ottima del problema ridotto alle prime 6 modalità).

Colonna entrante orlata $A_6 = \begin{pmatrix} -1/15 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$ Carry: $A_6 = \left(\begin{array}{cccc|c} -1/83 & -1/33 & -1/15 & -1/12 & -z \\ \hline 1/83 & 0 & 0 & 0 & 62/83 \\ 0 & 1/33 & 0 & 0 & 36/33 \\ 0 & 0 & 1/15 & 0 & 120/15 \\ 0 & 0 & 0 & 1/12 & 96/12 \end{array}\right)$

Esce A_4 (la quarta colonna in base). L'algoritmo continua generando ad ogni passo una nuova base ammissibile, un nuovo vettore duale e una nuova modalità di taglio, fino ad arrivare alle modalità:

modalità 5: 15 moduli da 320 cm (C) e 3 da 60 cm (A), sfrido 20 cm
modalità 6: 12 moduli da 390 cm (D) e 1 da 320 cm (C), sfrido 0 cm
modalità 7: 10 moduli da 320 cm (C) e 12 da 150 cm (B), sfrido 0 cm
modalità 8: 13 modulo da 320 cm (C) e 14 da 60 cm (A), sfrido 0 cm

che utilizzate come colonne in base danno:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 15 & 1 & 10 & 13 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_B = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 398/171 \\ 8 \\ 3 \\ 224/57 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}3... \\ 8 \\ 3 \\ 3{,}9... \end{pmatrix}$$

che risulta essere soluzione ottima del problema rilassato. Arrotondando la quarta componente all'intero superiore si ottiene poi il vettore intero $x_B = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ che è ammissibile e di costo 17, pari al LB, e quindi ottimo per il problema intero. NB: il metodo di generazione di colonne garantisce in generale solo il raggiungimento dell'ottimo rilassato, non dell'ottimo intero.