UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Modelli di Sistemi di Produzione II – primo appello
19 Giugno 2008

Nome:
Cognome:

Quando vuole sostenere la prova orale? (Barrare la casella indicata, in assenza di indicazioni si intende oggi pomeriggio) **Oggi (ore 15:30 aula N3)** **giovedì 3 luglio (ore 14 aula N3)** **Nell'appello di Settembre**

Esercizio 1

Una città deve essere rifornita, ogni giorno, con 500.000 litri di acqua. Si richiede che l'acqua non contenga sostanze inquinanti in quantità superiore a 80 parti per milione.
L'acqua può essere ottenuta da un fiume in quantità illimitata dopo averla depurata. Allo scopo sono disponibili due modalità: (A) il livello di inquinamento dell'acqua è pari a 120 parti per milione ad un costo di 5 euro ogni 5.000 litri di acqua trattata; (B) livello di inquinamento dell'acqua è pari a 80 parti per milione ad un costo di 10 euro per 5.000 litri di acqua trattata. L'acqua può essere ottenuta anche da un pozzo che fornisce acqua con un livello di inquinamento pari a 60 parti per milione, quindi senza necessità di ulteriori trattamenti. Il pompaggio di y unità da 5.000 litri di acqua dal pozzo costa y^2 euro.

1. Formulare il problema di PNL che permette di determinare il modo di soddisfare le esigenze idriche della città al costo minimo.
2. Trascurando i vincoli di non negatività delle variabili, determinare eventuali punti di non qualificazione e l'insieme di punti che soddisfano le condizioni KKT
3. Trovare i punti di minimo globale del problema vincolato o dimostrare che non esistono

Soluzione

1. Introduciamo 3 variabili: $x_A; x_B; y$ pari al numero di unità da 5000 litri prelevati rispettivamente dal fiume e trattati in modalità A o B e dal pozzo. Dovrà essere evidentemente $x_A + x_B + y = 100$ (cioè una quantità totale di 500.000 litri) e poi la presenza media di inquinanti dovrà essere inferiore ai limiti: $120x_A + 80x_B + 60y \le 80(x_A + x_B + y)$. La formulazione diventa quindi:

$$\min 5x_A + 10x_B + y^2$$
$$\begin{cases} x_A + x_B + y - 100 = 0 \\ -40x_A + 20y \ge 0 \\ x_A \ge 0 \\ x_B \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

2. Il problema diventa: $$\min 5x_A + 10x_B + y^2$$ $$\begin{cases} x_A + x_B + y - 100 = 0 \\ -40x_A + 20y \ge 0 \end{cases}$$; i gradienti dei 2 vincoli sono linearmente indipendenti e quindi tutti i punti sono punti di qualificazione. Per verificare le condizioni KKT si devono analizzare solo 2 casi:
2.a. E' attivo solo il vincolo di uguaglianza (non va bene perché si ottiene $\lambda = 5$ e $\lambda = 10$)

2.b. Sono attivi 2 vincoli, da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 5-\lambda+40\mu=0 \\ 10-\lambda=0 \\ 2y-\lambda-20\mu=0 \end{cases} \quad \text{che ha soluzione} \quad \begin{cases} \mu = 1/8 \\ \lambda = 10 \\ y = \frac{1}{2}\left(10+\frac{20}{8}\right) = \frac{25}{4} \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x_A = \frac{25}{8} \\ x_B = \frac{725}{8} \end{cases}$$

Che è l'unico punto KKT.

3. Per dimostrare che il punto KKT è di minimo globale basta dimostrare che la funzione è radialmente illimitata. Si osserva allo scopo che lungo una qualsiasi direzione, se *y* varia il termine y^2 tende a prevalere nella funzione obiettivo e quindi la funzione stessa tende a $+\infty$. Se invece *y* = *cost*, allora dal secondo vincolo $x_A \le \cos t$ (che esclude la possibilità $x_A \to +\infty$ ma non $x_A \to -\infty$) e quindi dal primo $x_B = \cos t - x_A$, da cui si ha che la funzione obiettivo sarà pari a una $\cos t - 5x_A$, che tende necessariamente a $+\infty$.

Esercizio 2

Dato il grafo di assemblaggio in figura, progettare la linea di assemblaggio con tempo ciclo T_C=10 e minimo numero di stazioni utilizzando l'algoritmo FABLE. Costruire una soluzione iniziale con l'algoritmo RPW nella versione migliorata che assegna i task alla prima macchina fitable. Evidenziare le soluzioni parziali costruite dall'algoritmo, la struttura dati e la sua evoluzione durante l'esecuzione.