

Nome:
Cognome:

Esercizio 1

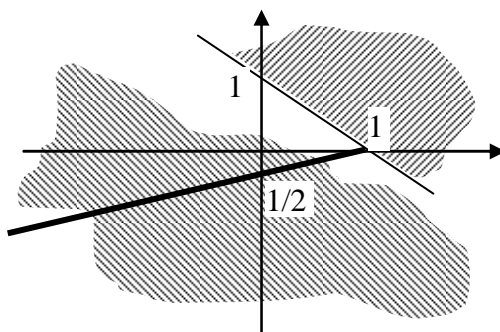
E' dato il problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 x_2^2 - 4x_1^2 x_2 \\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

1. Costruire graficamente l'insieme ammissibile del problema vincolato
2. Determinare eventuali punti di non qualificazione
3. Determinare quali punti dell'insieme ammissibile soddisfano le condizioni KKT
4. Trovare i punti di minimo globale del problema vincolato o dimostrare che non esistono

Soluzione

1. **Costruire graficamente l'insieme ammissibile del problema vincolato**



E' ammissibile solo la semiretta in grassetto.

2. **Determinare eventuali punti di non qualificazione**

Conviene riscrivere i vincoli nel formato $h(x) = 0$ e $g(x) \geq 0$. Si ha:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 1 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 1 \geq 0 \end{cases}$$

Lo Jacobiano dei vincoli è $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ che ha rango 2, quindi in qualsiasi punto i vincoli attivi sono linearmente indipendenti. Non esistono punti di non regolarità.

3. **Determinare quali punti dell'insieme ammissibile soddisfano le condizioni KKT**

Abbiamo solo due casi:

- a. Attivo solo il primo vincolo, si ha:

$$\begin{cases} \left(\begin{matrix} 3x_2^2 - 8x_1x_2 \\ 6x_1x_2 - 4x_1^2 \end{matrix} \right) - \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\begin{matrix} 3x_2^2 - 8(2x_2 + 1)x_2 \\ 6(2x_2 + 1)x_2 - 4(2x_2 + 1)^2 \end{matrix} \right) - \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \\ x_1 = 2x_2 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_2^2 - 8(2x_2 + 1)x_2 = \lambda_1 \\ 6(2x_2 + 1)x_2 - 4(2x_2 + 1)^2 + 2[3x_2^2 - 8(2x_2 + 1)x_2] = 0 \\ x_1 = 2x_2 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3x_2^2 - 8(2x_2 + 1)x_2 \\ -30x_2^2 - 26x_2 - 4 = 0 \\ x_1 = 2x_2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -13x_2^2 - 8x_2 \\ x_2 = -2/3 \text{ oppure } -2/5 \\ x_1 = 2x_2 + 1 \end{cases}$$

Si hanno due soluzioni $\begin{cases} \lambda_1 = -4/9 \\ x_2 = -2/3 \\ x_1 = -1/3 \end{cases}$ e $\begin{cases} \lambda_1 = 27/25 \\ x_2 = -1/5 \\ x_1 = 3/5 \end{cases}$ che risultano punti KKT

b. Attivi tutti e due i vincoli (nel punto $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$)

$$\begin{cases} \left(\begin{matrix} 3x_2^2 - 8x_1x_2 \\ 6x_1x_2 - 4x_1^2 \end{matrix} \right) - \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \mu_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \mu_1 = 0 \\ -4 + 2\lambda_1 + \mu_1 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu_1 \\ \mu_1 = 4/3 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases} \text{ che è un ulteriore punto KKT}$$

4. Trovare i punti di minimo globale del problema vincolato o dimostrare che non esistono

Abbiamo tre punti KKT $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$. Si ha: $f(A) = 0$, $f(B) = -4/27$,

$f(C) = 45/125$. Il punto B è quindi il punto KKT con valore minimo della funzione obiettivo, e quindi il punto di minimo globale, se esiste un punto di minimo globale. Poiché l'insieme ammissibile è chiuso ma non limitato è necessario analizzare il comportamento della $f(x)$ per

$|x| \rightarrow +\infty$. Questa analisi è semplice perché deve essere $\begin{cases} x_1 = 2x_2 + 1 \\ x_2 \rightarrow -\infty \end{cases}$.

Sostituendo nella $f(x)$ si ha:

$$f(x) = 3x_1x_2^2 - 4x_1^2x_2 = 3(2x_2 + 1)x_2^2 - 4(2x_2 + 1)^2x_2 = 6x_2^3 + 3x_2^2 - 16x_2^3 - 16x_2^2 - 4x_2 = -10x_2^3 - 13x_2^2 - 4x_2$$

Che per $x_2 \rightarrow -\infty$ va evidentemente a $+\infty$ (prevale il termine di grado massimo). Il problema

ammette quindi un punto di minimo globale in $B = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2

Contesto di business: La vendita di una proposta di viaggio.

Un cliente accede al sistema di vendita di una società di trasporto, e identifica una soluzione di viaggio costituita da uno o più treni. Poi chiede il prezzo della soluzione di viaggio verificando anche se ci sono sconti o offerte disponibili.

Una soluzione di viaggio è composta da una sequenza di arrivi-partenze, appartenenti ciascuna ad un treno specifico che permette di raggiungere la stazione finale da una stazione iniziale.

Per esempio il viaggio da Alatri a Orli potrebbe essere composto dalla sequenza Alatri-Velletri, Velletri-Roma, Roma-Milano, Milano-Parigi e Parigi-Orli. Da Alatri viene utilizzato il treno regionale per Velletri e da Velletri viene utilizzato il treno regionale che proviene da Nettuno e arriva a Roma. Da Roma viene usato il treno AV* proveniente da Salerno che arriva a Milano. Da Milano viene usato il treno ES* proveniente da Torino e diretto a Bruxelles che ferma anche a Parigi. Infine si utilizza il treno locale Parigi – Orli.

Il prezzo viene definito non per i singoli treni ma per percorsi omogenei.

Un percorso è omogeneo se è costituito da due o più treni omogenei.

Ci sono 3 gruppi di omogeneità. Il primo gruppo include gli ES* e gli AV, il secondo i Regionali e gli Espressi e il terzo Intecity e gli Intercityplus.

Nell'esempio abbiamo tre percorsi omogenei.

Il primo è costituito da Alatri-Velletri (regionale) e da Velletri-Roma (regionale). Quindi vi è un unico percorso Alatri-Roma (segmento treno o segmento Viaggio di tipo regionale).

Il secondo è costituito da Roma-Milano (AV) e Milano-Parigi (ES*) che vengono unificati nell'unico percorso Roma-Parigi (segmento di tipo ES*-AV). Il terzo e ultimo è costituito dal percorso Parigi-Orli con un solo treno (segmento regionale).

In ciascuno dei tre gruppi, ogni percorso ha un suo prezzo per i servizi che offre con le tariffe disponibili.

Per esempio il segmento viaggio Alatri-Roma, un posto a sedere in 1° classe costa € 10, mentre in 2 classe costa € 6 nel gruppo regionale.

Un segmento deve avere non solo i treni omogenei ma anche il servizio richiesto identico in tutti i treni. Può variare la classe tariffaria. Potremmo prendere la prima classe per Roma-Milano del Salerno-Milano e la seconda classe per il Milano-Parigi del Torino-Bruxelles.

In questo caso viene calcolata la tariffa più bassa comune per tutto il segmento Roma-Parigi (seconda classe) ed aggiunta la differenza dei segmenti a più alta classe tariffaria come il Roma-Milano (prima classe).

Se ci sono eventuali sconti o offerte su questo segmento vengono applicate sul prezzo base di ogni segmento. Il prezzo del viaggio è la somma del prezzo finale dei segmenti.

PRODOTTO

(ES*, AV, REG, IC PLUC, IC EXPR)

TIPOLOGIA SEGMENTO TARIFFARIO

Tipologie di treni considerati un unico servizio omogenei di trasporto O&D su cui offrire un prezzo unico.

- Segmento A: AV, ES*;
- Segmento B: REG, EXPR
- Segmento C; IC, IC PLUS;

TRENO

Prodotto di trasporto da un origine ad una destinazione con fermate intermedie. Offre servizi a tariffe differenziate.

SEGMENTO TRENO

- Origine-Desinazione servita dalle fermate di un treno

SERVIZI

- Per ogni treno sono previsti i servizi di poltrona di 1 classe e di 2 classe.
- Per i treni più lunghi di 10 hh o notturni è prevista il servizio di cuccetta di 1 e seconda classe.
- Per i treni più lunghi di 12 ore o notturni è previste il servizio di wagonlit di sola prima classe;

PREZZI BASE

I prezzi si riferiscono alle relazioni Origine&Destinazione di una dato gruppo.

- Per ogni segmento O&D viene dato il prezzo dei vari servizi (poltrona, cuccetta e wagonlit) e per tutte le tariffe previste e per tutti i segmenti omogenei previsto.
- Il prezzo di un segmento con medesimo servizio e differenti tariffe viene calcolato in base alla tariffa più bassa comune per tutto il segmento O&D aggiunto delle differenze delle tariffe più alte richieste per differenti treni.

SCONTISTICA

- Gli adolescenti possono usufruire dello sconto del 50% sui posti a sedere.
- (Lo sconto non si applica sui prodotti TOK e sui percorsi Roma – Bolzano)
- Gli adolescenti possono usufruire dello sconto del 30% su tutti i servizi salvo che per i treni TOK e per le navette Fiumicino Aeroporto - Roma Termini.
- I Giornalisti hanno la riduzione del 50%.
- I Parlamentari hanno la riduzione del 90% salvo che per i servizi di wagonlit.
- I Cittadini italiani di almeno 70 anni possono usufruire dello sconto del 80% su tutti i treni in partenza o in arrivo in tutte le stazioni della regione Lazio.
- Dal 10.03.2009 per le famiglie di almeno 3 individui si può viaggiare a 1 centesimo a Km a persona

OFFERTE & PROMOZIONI

Dal 10.04.al 26.06 dalle 19:00 alle 21:00 si può usufruire dello sconto del 25% purché ci si prenoti con almeno 15 giorni di anticipo.

VIAGGIO e SEGMENTO DI VIAGGIO

Prodotto venduto. Dal punto di vista operativo è sequenza di treni che origina in una stazione e termina in una stazione. Da un punto di vista commerciale è una sequenza di segmenti di viaggio i quali sono costituiti da treni omogenei con la stessa richiesta di servizio e su cui è stato oggetto un prezzo.

Il prezzo del viaggio e la somma dei prezzi dei segmenti di viaggio che include.

MODELLIZZARE TUTTE LE REGOLE NECESSARIE A VERIFICARE LA CORRETTEZZA DI UN VIAGGIO E DI DEFINIRNE IL PREZZO

E' allegato un data base con il BOM del problema. Il database è incompleto nel senso che è vuoto e mancano dei campi rilevanti per l'applicazione delle regole.

L'esame prevede che si formalizzino le regole di segmentazione omogenea per gruppo e servizio,

le regole di prezzo e di sconto e di offerta commerciale si completi il database e si applichi il tutto ad un esempio di viaggio che verrà indicato.

Costruire le regole di verifica di correttezza dei singoli segmenti di viaggio in base alle norme di omogeneità.

Costruire le regole per la definizione del prezzo delle relazioni O&D per tutti i servizi e tutte le tariffe offerte.

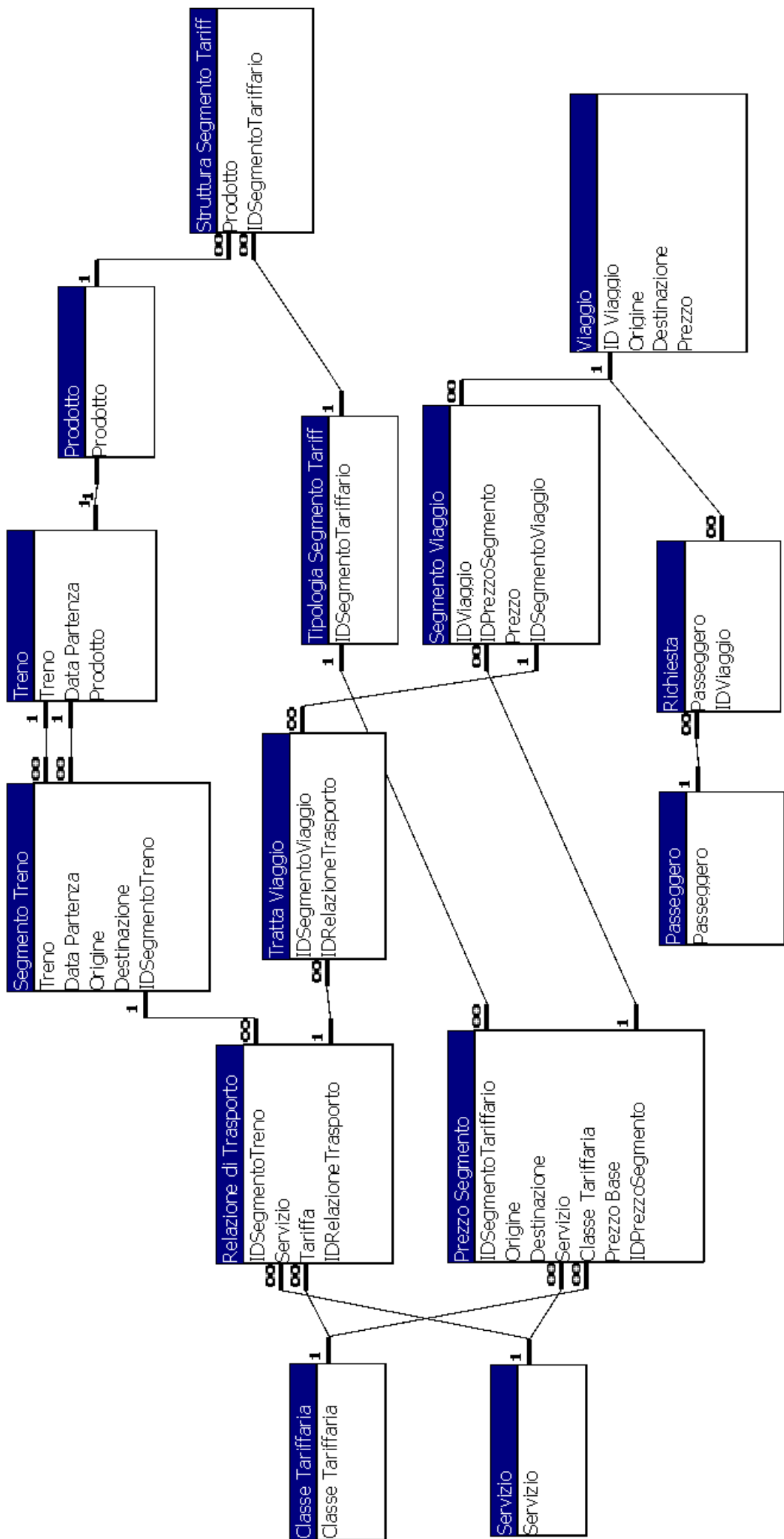
Costruire le regole di definizione del prezzo base almeno per 10 Origini-Destinazione 3 servizi (Posto a sedere – Cuccetta – waitlist) e due classi (1 e 2)

Costruire le regole il prezzo base di ogni segmento tariffario

Costruire le regole per lo sconto

Costruire le regole per il prezzo finale del viaggio

Completare il BOM per far funzionare correttamente il Sistema a Regole di Vendita

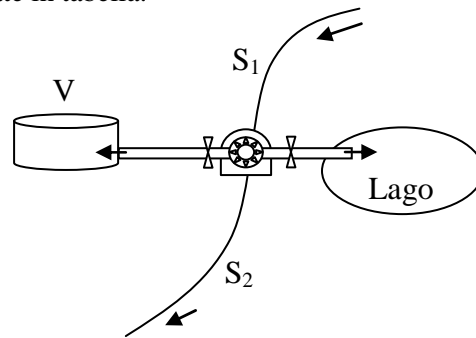


Nome:
 Cognome:

Esercizio 1

Una regione è attraversata da un torrente a rischio di inondazioni invernali. Allo scopo di contenere le piene improvvise è stato realizzato un bacino cilindrico V da utilizzare come vasca di espansione della piena ed è anche possibile pompare acqua dal fiume verso un lago vicino, come in figura. Pompare x milioni di m^3 di acqua nella vasca costa $3x$ euro, mentre pompare y milioni di m^3 di acqua verso il lago costa $4y^2$ euro. La capacità (portata massima in m^3/sec) del fiume nelle 2 sezioni S_1, S_2 è rispettivamente 6000 e 3500 m^3/sec . Le dimensioni del bacino (al momento vuoto) sono indicate in tabella.

	V
Superficie (m^2)	800.000
Altezza (m)	10



Sta arrivando un'ondata di piena che porterà la portata del fiume dagli attuali 2000 m^3/sec a 6000 m^3/sec . Questa portata si manterrà per 2 ore per poi tornare al livello precedente.

1. Formulare il problema di regolare l'immissione di acqua nella vasca o verso il lago durante la piena evitando esondazioni nella sezione S_2 del fiume e rispettando la capacità della vasca stessa. La vostra funzione obiettivo è la minimizzazione del costo totale di pompaggio.
2. Determinare eventuali punti di non qualificazione
3. Determinare quali punti dell'insieme ammissibile soddisfano le condizioni KKT
4. Trovare i punti di minimo globale del problema vincolato o dimostrare che non esistono.
5. Vi propongono di applicare un generatore di energia idroelettrica all'idrovora, che consente di produrre energia dall'acqua immessa nel lago. Il profitto generato sarebbe di 13 euro per ogni milione di m^3 di acqua immessi nel lago, che compensa parzialmente i costi sostenuti. Calcolare la soluzione ottima che si avrebbe utilizzando il generatore e mostrare la differenza di costo con la soluzione ottima senza generatore.

Esercizio 2

Dato il grafo di assemblaggio in figura, progettare la linea di assemblaggio con tempo ciclo $T_C=10$ e minimo numero di stazioni utilizzando l'algoritmo FABLE. Costruire una soluzione iniziale con l'algoritmo RPW nella versione migliorata che assegna i task alla prima macchina fitabile. Evidenziare le soluzioni parziali costruite dall'algoritmo, la struttura dati e la sua evoluzione durante l'esecuzione.

