Rilassamento Lagrangiano

E' dato il problema di PLI

$$\min \quad 4x_1+2x_2-x_3+2x_4$$

$$\begin{cases} 6x_1+4x_2-3x_3+5x_4 \geq 8 \\ x_1+x_2 \geq 1 \\ x_3+x_4=1 \\ x_i \in \{0,1\} \qquad i=1,..,4 \end{cases}$$

1. Rilassare il primo vincolo mediante rilassamento Lagrangiano e calcolare un lower bound dell'ottimo con il metodo del sub-gradiente arrestato dopo 5 passi a partire da $\lambda^0=0$ e utilizzando il passo $\theta^0=1$, $\theta^i=1/i$ per $i \geq 1$.
   a. Quanto vale il lower bound trovato?
   b. Qual è il miglior upper bound trovato durante l'esecuzione dei 5 passi?
   c. Qual è il GAP di ottimalità?
   d. Si può dimostrare l'ottimalità dell' upper bound di cui al punto b?
   e. Si può affermare che è stato trovato il duale Lagrangiano? Se si, perché?
   f. Quando vale λ^5?
2. Partendo dallo stesso rilassamento di cui al passo precedente, dopo i primi due passi calcolare λ^i, per $i \geq 2$, intersecando le facce della funzione Lagrangiana corrispondenti al più piccolo λ con sub-gradiente negativo e al più grande λ con sub-gradiente positivo tra quelli esaminati in precedenza. Proseguire il calcolo fino a trovare il duale Lagrangiano.
   a. Quanto vale il duale Lagrangiano?
   b. Qual è il miglior upper bound trovato durante l'esecuzione dell'algoritmo?
   c. Qual è il GAP di dualità?
   d. Si può dimostrare l'ottimalità dell' upper bound di cui al punto b?
3. Rilassare tutti i vincoli del problema e calcolare il rilassamento Lagrangiano in corrispondenza del moltiplicatori $\lambda^1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\lambda^2=\begin{pmatrix}3/8\\1/2\\1/8\end{pmatrix}$. Calcolare nei due casi almeno un sub-gradiente.
   a. Si può affermare che in uno dei due casi è stato trovato il duale Lagrangiano? Se si, in quale caso e perché?
   b. Qual è il miglior upper bound trovato?
   c. Si può dimostrare l'ottimalità dell' upper bound di cui al punto b?

Soluzione

1. Il rilassamento Lagrangiano vale:

$$L(\lambda)=\min \quad 4x_1+2x_2-x_3+2x_4+\lambda(8-6x_1-4x_2+3x_3-5x_4)$$

$$\begin{cases} x_1+x_2 \geq 1 \\ x_3+x_4=1 \\ x_i \in \{0,1\} \qquad i=1,..,4 \end{cases}$$

Per $\lambda^0=0$ si ha:

$L(\lambda^0) = min \quad 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ x_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,..,4 \end{cases}$$

Risolvendo all'ottimo si ha la soluzione ottima $x^0 = (0 \quad 1 \quad 1 \quad 0)$, cui corrisponde il valore $L(\lambda^0) = 1$ e il sub-gradiente $s^0 = 7$. Di conseguenza si ha: $\lambda^1 = \lambda^0 + \theta^0(s^0) = 0 + 1(7)$ =7.

Per $\lambda^1 = 7$ si ha:

$L(\lambda^1) = min \quad 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 7(8 - 6x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 5x_4)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ x_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,..,4 \end{cases}$$

Risolvendo all'ottimo si ha la soluzione ottima $x^1 = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 1)$, cui corrisponde il valore $L(\lambda^1) = -41$ e il sub-gradiente $s^1 = -7$. Di conseguenza si ha: $\lambda^2 = \lambda^1 + \theta^1(s^1) = 7 + 1(-7)$ =0.

Poiché $s^1 \leq 0$, si ha che x^1 è ammissibile per il PLI di partenza, per cui si può calcolare un primo upper bound sostituendo x^1 nella funzione obiettivo originale. Si ha: UB=8.

Per $\lambda^2 = 0$ si hanno evidentemente gli stessi risultati del passo 0, ad eccezione $\lambda^3 = \lambda^2 + \theta^2(s^2) = 0 + \frac{1}{2}(7) = \frac{7}{2}$.

Per $\lambda^3 = 7/2$ si ha: $x^3 = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 1)$; $L(\lambda^3) = 8 + 3{,}5(-7) = -16{,}5$; $s^3 = -7$; $\lambda^4 = \frac{7}{2} + \frac{1}{3}(-7) = \frac{7}{6}$.

Per $\lambda^4 = 7/6$ si ha: $x^4 = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 1)$; $L(\lambda^4) = 8 + \frac{7}{6}(-7) = -\frac{1}{6}$. $s^4 = -7$; $\lambda^5 = \frac{7}{6} + \frac{1}{4}(-7) < 0$.

Quando il calcolo per una componente del vettore $\lambda^{i+1} = \lambda^i + \theta^i(s^i)$ associato ad un vincolo di disuguaglianza risulta negativo si deve prendere il valore 0 in quando questi moltiplicatori devono essere non negativi per garantire che il rilassamento Lagrangiano sia un lower bound dell'ottimo del problema iniziale. Quindi si ha: $\lambda^5 = 0$.

Per le altre domande:

a. Il lower bound trovato è il massimo di $max\{L(\lambda^i), i = 0,...,4\} = 1$.
b. Il miglior upper bound trovato durante l'esecuzione dei 5 passi è UB=8.
c. Il GAP di ottimalità è UB-LB=7.
d. I valori trovati non consentono di dimostrare l'ottimalità dell' upper bound di cui al punto b.
e. Si può affermare che NON è stato trovato il duale Lagrangiano in quanto in ciascun passo la soluzione ottima trovata era unica e il sub-gradiente (unico) associato non era nullo, quindi per nessuno dei punti visitati la funzione Lagrangiana ammette sub-gradiente 0.
f. $\lambda^5 = 0$.

2. Per rispondere al secondo quesito si può partire direttamente dalla fine del passo 1 del punto precedente, quindi: $\lambda^0 = 0$, $s^0 = 7$, la faccia della Lagrangiana è $v = c^T x^0 + \lambda(s^0) = 1 + 7\lambda$; $\lambda^1 = 7$,

$s^1 = -7$, la faccia della Lagrangiana è $v = c^T x^1 + \lambda(s^1) = 8 - 7\lambda$. Quindi, mettendo a sistema le due facce, si ha:

$$\begin{cases} v = 1 + 7\lambda \\ v = 8 - 7\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 9/2 \\ \lambda^2 = 1/2 \end{cases}.$$

Per $\lambda^2 = 1/2$ si ha: $x^2 = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 1)$; $L(\lambda^2) = 4 + 0{,}5(-1) = 3{,}5$; $s^2 = -1$. Poiché $s^2 \leq 0$, si ha che x^2 è ammissibile per il PLI di partenza, per cui si può calcolare un secondo upper bound sostituendo x^2 nella funzione obiettivo originale. Si ha: UB=4. La faccia della Lagrangiana è $v = c^T x^2 + \lambda(s^2) = 4 - \lambda$. A questo punto λ^2 è il più piccolo λ con sub-gradiente negativo, quindi λ^3 si ottiene mettendo a sistema le due facce:

$$\begin{cases} v = 1 + 7\lambda \\ v = 4 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 29/8 \\ \lambda^3 = 3/8 \end{cases}.$$

Per $\lambda^3 = 3/8$ il rilassamento Lagrangiano diventa:

$$L(\lambda^1) = min \quad 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + \frac{3}{8}(8 - 6x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 5x_4) = 3 + 14x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{8}x_3 + \frac{1}{8}x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ x_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,..,4 \end{cases}$$

Pertanto si hanno due soluzioni ottime: $x^{3'} = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 1)$ oppure $x^{3''} = (0 \quad 1 \quad 1 \quad 0)$; $L(\lambda^3) = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 3{,}625$; $s^{3'} = -1$, $s^{3''} = 7$. Poiché $7s^{3'} + s^{3''} = 0$, possiamo ottenere il sub-gradiente 0 per combinazione conica di sub-gradienti validi, e pertanto è stato trovato il duale Lagrangiano.
Per le domande poste:

a. Il duale Lagrangiano è $L(\lambda^*) = 3{,}625$
b. Il miglior upper bound trovato è UB=4
c. Il GAP di dualità è $UB - L(\lambda^*) = 4 - 3{,}625 = 0{,}375$
d. Poiché la funzione obiettivo del PLI di partenza è a coefficienti interi, ne segue che anche l'ottimo è intero. Pertanto si può prendere come LB il valore $\lceil L(\lambda^*) \rceil = 4$, da cui segue l'ottimalità della soluzione $x^2 = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 1)$.

3. Per rispondere al terzo quesito si definisce il rilassamento Lagrangiano:

$$L(\lambda) = min \quad 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + \lambda_1(8 - 6x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 5x_4) + \lambda_2(1 - x_1 - x_2) + \lambda_3(1 - x_3 - x_4)$$

$$\{x_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,..,4$$

Per $\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si ha: $\begin{cases} L(\lambda^1) = min \quad 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \\ x_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,..,4 \end{cases}$, che risolto all'ottimo fornisce la soluzione ottima $x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, cui corrisponde il valore $L(\lambda^1) = -1$ e il sub-gradiente $s^1 = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Per $\lambda^2 = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 1/2 \\ 1/8 \end{pmatrix}$ si ha: $\begin{cases} L(\lambda^1) = min \quad \frac{9}{4} x_1 + 3{,}625 \\ x_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,..,4 \end{cases}$, che risolto all'ottimo fornisce 8 soluzioni ottime $x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ - \\ - \end{pmatrix}$ per $x_i^1 \in \{0,1\}, \quad i = 2,3,4$, cui corrisponde il valore $L(\lambda^2) = 3{,}625$. Tra queste 8 soluzioni sono comprese $x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con sub-gradiente $s^1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ con sub-gradiente $s^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Per le questioni poste quindi:

a. Si può affermare che $L(\lambda^2)$=3,625 è il duale Lagrangiano, in quanto esiste la combinazione conica di sub-gradienti validi in λ^2: $s^1 + 7s^2 = 0$.
b. In corrispondenza di x^2 (ammissibile perché $s^2 \leq 0$) si ha un UB=4.
c. Come per il quesito 2.d, poiché la funzione obiettivo del PLI di partenza è a coefficienti interi, ne segue che anche l'ottimo è intero. Pertanto si può prendere come LB il valore $\lceil L(\lambda^*) \rceil = 4$, da cui segue l'ottimalità della soluzione $x^2 = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 1)$.