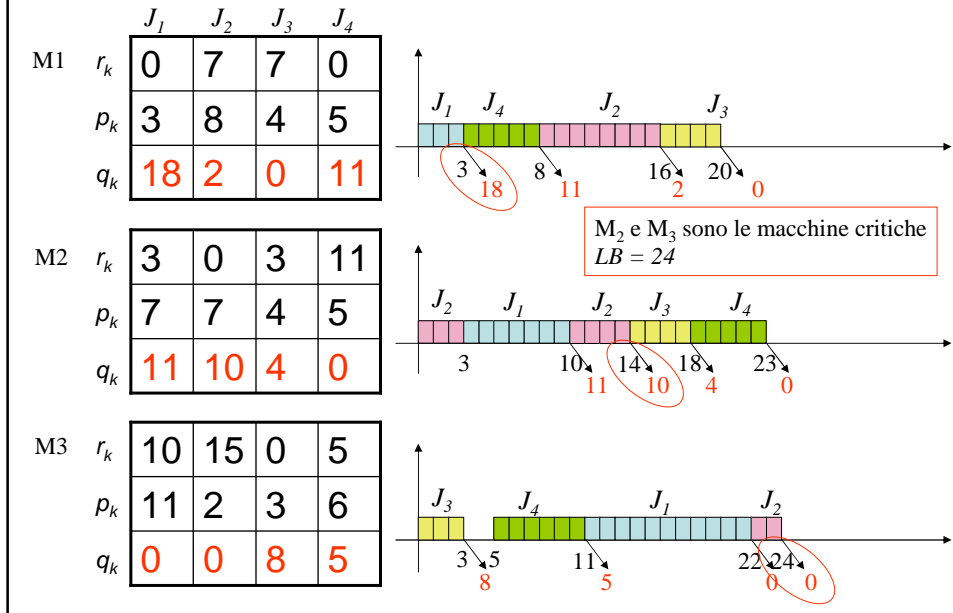
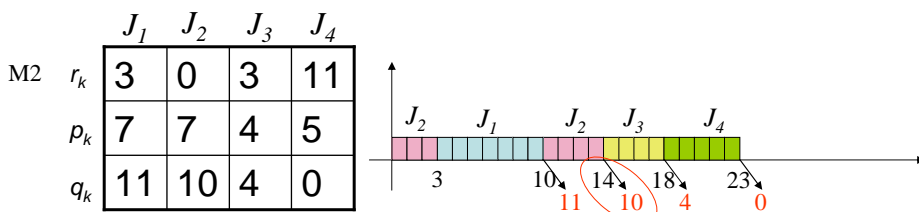


2. Jackson's Preemptive Schedule (JPS)



3. Calcolo delle implicazioni

Macchina critica M₂, si ordinano i job per coda crescente



1. candidato output $J_c = J_1$: $p_c=7, r_c=3, p^+=5$ (tempo di proc. residuo in r_c nel JPS)
 $q_k = \begin{matrix} J_4 & J_3 & J_2 \\ 0 & 4 & 10 \end{matrix}$

Clique $J = \{J_4, J_3, J_2\}$: c output di J se: $r_c + p_c + \sum_{J_k \in J} p_k^+ + \min_{J_k \in J} \{q_k\} > UB$
 $3 + 7 + (5+4+4) + 0 > 27$? NO

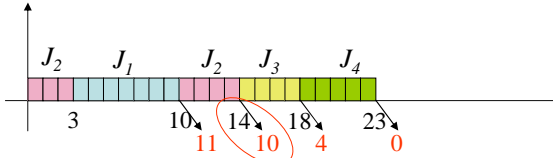
Clique $J = \{J_3, J_2\}$: $3 + 7 + (4+4) + 4 > 27$? NO

Clique $J = \{J_2\}$: se $|J|=1$ si usa un'altra formula: $r_c + p_c + p_j + q_j$ oppure $r_j + p_j + p_c + q_c > UB$?
 $3 + 7 + 7 + 10$ oppure $0 + 7 + 7 + 11 > 27$? NO

3. Calcolo delle implicazioni

Ancora M_2 , non si ricalcola il JPS perché non sono cambiate teste e code

	J_1	J_2	J_3	J_4
r_k	3	0	3	11
p_k	7	7	4	5
q_k	11	10	4	0



1. candidato output $J_c = J_2$: $p_c=7, r_c=0, p^+ =$

	J_4	J_3	J_1
p_k^+	5	4	7
q_k	0	4	11

 (tempo di proc. residuo in r_c nel JPS)

Clique $J = \{J_4, J_3, J_1\}$: c output di J se: $r_c + p_c + \sum_{J_k \in J} p_k^+ + \min_{J_k \in J} \{q_k\} > UB$
 $0 + 7 + (5+4+7) + 0 > 27$? **NO**

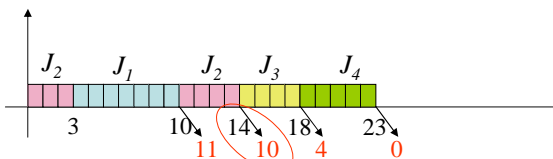
Clique $J = \{J_3, J_1\}$: $0 + 7 + (4+7) + 4 > 27$? **NO**

Clique $J = \{J_1\}$: se $|J|=1$ si usa un'altra formula: $r_c + p_c + p_j + q_j$ oppure $r_j + p_j + p_c + q_c > UB$?
 $0 + 7 + 7 + 11$ oppure $3 + 7 + 7 + 10 > 27$? **NO**

3. Calcolo delle implicazioni

Ancora M_2 , non si ricalcola il JPS perché non sono cambiate teste e code

	J_1	J_2	J_3	J_4
r_k	3	0	3	11
p_k	7	7	4	5
q_k	11	10	4	0



1. candidato output $J_c = J_3$: $p_c=4, r_c=3, p^+ =$

	J_4	J_2	J_1
p_k^+	5	4	7
q_k	0	10	11

 (tempo di proc. residuo in r_c nel JPS)

Clique $J = \{J_4, J_2, J_1\}$: c output di J se: $r_c + p_c + \sum_{J_k \in J} p_k^+ + \min_{J_k \in J} \{q_k\} > UB$
 $3 + 4 + (5+4+7) + 0 > 27$? **NO**

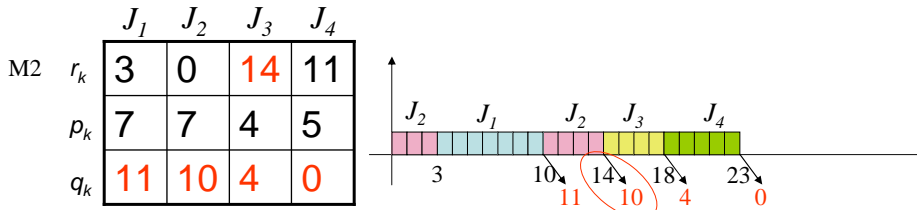
Clique $J = \{J_2, J_1\}$: $3 + 4 + (4+7) + 10 > 27$? **SI** $\Rightarrow J_3$ output di $\{J_2, J_1\}$

Aggiornamento teste e code: $r_c = \max \{ r_c ; \sum_{J_k \in J} p_k^+ + \min_{J_k \in J} \{r_k\} \} \Rightarrow r_3 = 14$

Vecchia coda \downarrow
 $q_c + p_c$
 $q_2 = \max \{ 10; 8 \}$
 $q_1 = \max \{ 11; 8 \}$

3. Calcolo delle implicazioni

Ancora M_2 , si ricalcola il JPS perché è cambiata una testa (in realtà resta uguale)



1. candidato output $J_c = J_4$: $p_c=5, r_c=11, p^+=$

J_3	J_2	J_1
4	3	0
4	10	11

(tempo di proc. residuo in r_c nel JPS)

Clique $J = \{J_3, J_2, J_1\}$: c output di J se: $r_c + p_c + \sum_{J_k \in J} p_k + \min_{J_k \in J} \{q_k\} > UB$

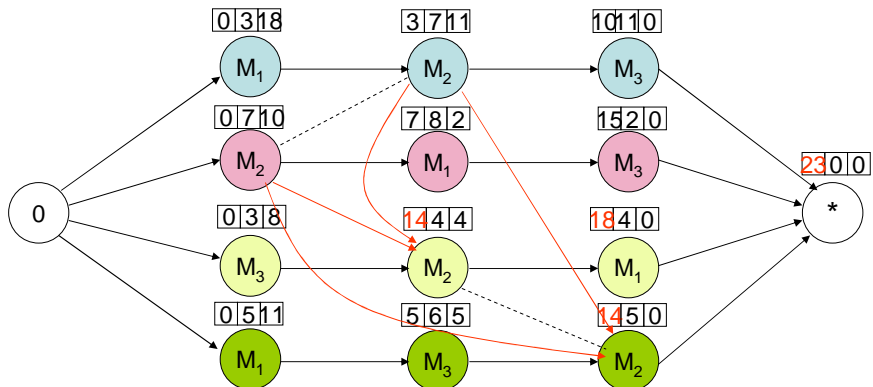
$$11 + 5 + (4+3+0) + 4 > 27 ? \text{NO}$$

Clique $J = \{J_2, J_1\}$: $11 + 5 + (3+0) + 10 > 29 ? \text{SI} \Rightarrow J_4$ output di $\{J_2, J_1\}$

Aggiornamento teste e code: $r_c = \max \{ r_c; \sum_{J_k \in J} p_k + \min_{J_k \in J} \{r_k\} \} \Rightarrow r_4 = 14$ $q_2 = \max \{ 10; 5 \}$
 $q_1 = \max \{ 11; 5 \}$

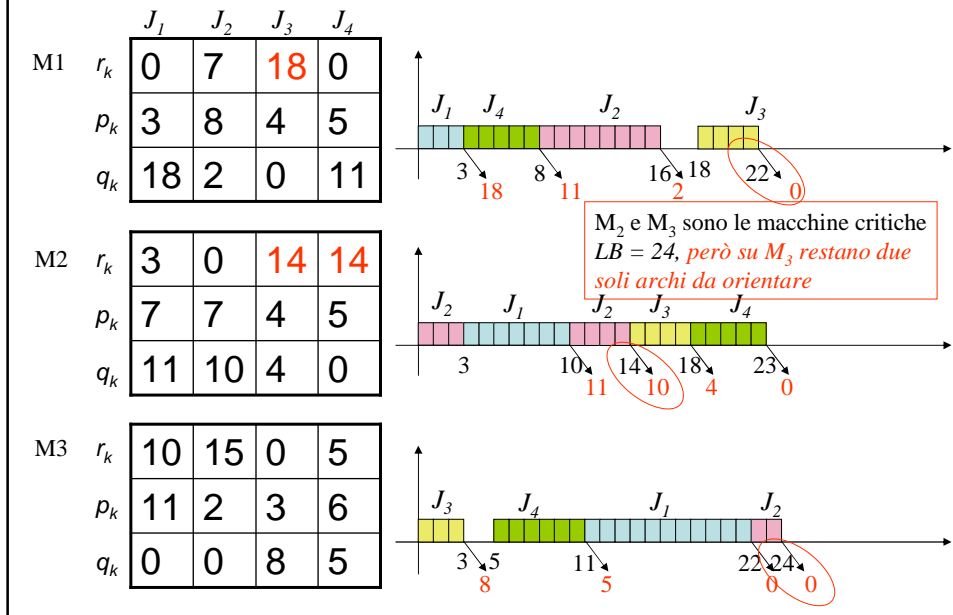
4. Aggiornamento del grafo

Prima di procedere all'analisi della macchina M_3 , si aggiornano teste, code e JPS propagando In avanti le teste e indietro le code modificate. Poi si ricalcola il JPS.



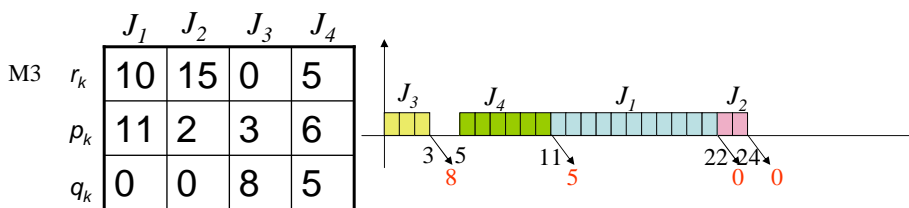
La macchina M_2 è sequenziata quasi completamente, resta da definire solo la precedenza delle coppie J_1, J_2 e J_3, J_4 .

2. Jackson's Preemptive Schedule (JPS)



3. Calcolo delle implicazioni

Macchina critica M_3 , si ordinano i job per coda crescente



1. candidato output $J_c = J_1$: $p_c=11, r_c=10, p^+ =$

	J_2	J_4	J_3
p^+	2	1	0
q_k	0	5	8

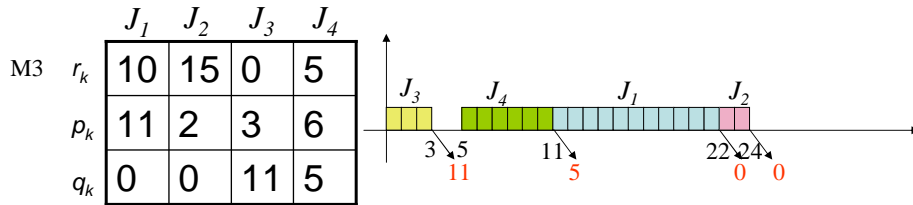
Clique $J = \{J_2, J_4, J_3\}$: c output di J se: $r_c + p_c + \sum_{J_k \in J} p_k^+ + \min_{J_k \in J} \{q_k\} > UB$
 $11 + 10 + (2+1+0) + 0 > 27$? NO

Clique $J = \{J_4, J_3\}$: $11 + 10 + (1+0) + 5 > 27$? NO

Clique $J = \{J_3\}$: se $|J|=1$ si usa un'altra formula: $r_c + p_c + p_j + q_j$ oppure $r_j + p_j + p_c + q_c > UB$?
 $10 + 11 + 3 + 8$ oppure $0 + 3 + 11 + 0 > 27$? SI

3. Calcolo delle implicazioni

Ancora M_3 , non si ricalcola il JPS perché non sono cambiate teste e code



1. candidato output $J_c = J_4$: $p_c=6, r_c=5, p^+=$

	J_1	J_2	J_3
p_k^+	11	2	0
q_k	0	0	11

Clique $J = \{J_1, J_2, J_3\}$: c output di J se: $r_c + p_c + \sum_{J_k \in J} p_k^+ + \min_{J_k \in J} \{q_k\} > UB$

$$5 + 6 + (11+2+0) + 0 > 27 ? \text{ NO}$$

Clique $J = \{J_2, J_3\}$: $5 + 6 + (2+0) + 0 > 27 ? \text{ NO}$

Clique $J = \{J_3\}$: se $|J|=1$ si usa un'altra formula: $r_c + p_c + p_j + q_j$ oppure $r_j + p_j + p_c + q_c > UB ?$

$$5 + 6 + 3 + 11 \text{ oppure } 0 + 3 + 6 + 5 > 27 ? \text{ NO}$$

3. Calcolo delle implicazioni

Ancora M_3 , abbiamo implicato solo due archi. Prima di procedere con un'altra Macchina cerchiamo di implicare gli archi rimanenti con la regola:

	J_1	J_2	J_3	J_4
r_k	10	15	0	5
p_k	11	2	3	6
q_k	0	0	11	5

$$r_c + p_c + p_j + q_j \text{ oppure } r_j + p_j + p_c + q_c > UB ?$$

Per tutte le coppie (c,j). Si ottiene:

1. coppia J_1, J_2 : $10 + 11 + 2 + 0$ oppure $15 + 2 + 11 + 0 > 27 ? \text{ SI} \Rightarrow J_1 \text{ precede } J_2$

$$\text{Aggiorno } r_2 = \max\{15, 10+11\} = 21 \text{ e } q_1 = \max\{0, 2+0\} = 2$$

3. Calcolo delle implicazioni

Ancora M_3 , abbiamo implicato solo due archi. Prima di procedere con un'altra Macchina cerchiamo di implicare gli archi rimanenti con la regola:

		J_1	J_2	J_3	J_4
M3	r_k	10	21	0	5
	p_k	11	2	3	6
	q_k	2	0	11	5

$$r_c + p_c + p_j + q_j \text{ oppure } r_j + p_j + p_c + q_c > UB ?$$

Per tutte le coppie (c,j). Si ottiene:

1. coppia J_1, J_4 : $10 + 11 + 6 + 5$ oppure $5 + 6 + 11 + 2 > 27$? **SI** \Rightarrow J_4 precede J_1

Aggiorno $r_1 = \max\{10, 5+6\} = 11$ e $q_4 = \max\{5, 11+2\} = 13$



Poiché J_1 precede J_2 , aggiorno anche $r_2 = \max\{21, 11+11\} = 22$

e continuo con le altre coppie di job

3. Calcolo delle implicazioni

Ancora M_3 , abbiamo implicato solo due archi. Prima di procedere con un'altra Macchina cerchiamo di implicare gli archi rimanenti con la regola:

		J_1	J_2	J_3	J_4
M3	r_k	11	22	0	5
	p_k	11	2	3	6
	q_k	2	0	11	13

$$r_c + p_c + p_j + q_j \text{ oppure } r_j + p_j + p_c + q_c > UB ?$$

Per tutte le coppie (c,j). Si ottiene:

1. coppia J_3, J_4 : $0 + 3 + 6 + 13$ oppure $5 + 6 + 3 + 11 > 27$? **NO**

1. coppia J_2, J_4 : $22 + 2 + 6 + 13$ oppure $5 + 6 + 2 + 0 > 27$? **SI** \Rightarrow J_4 precede J_2

Aggiorno $r_2 = \max\{22, 5+6\} = 22$ e $q_4 = \max\{13, 2+0\} = 13$

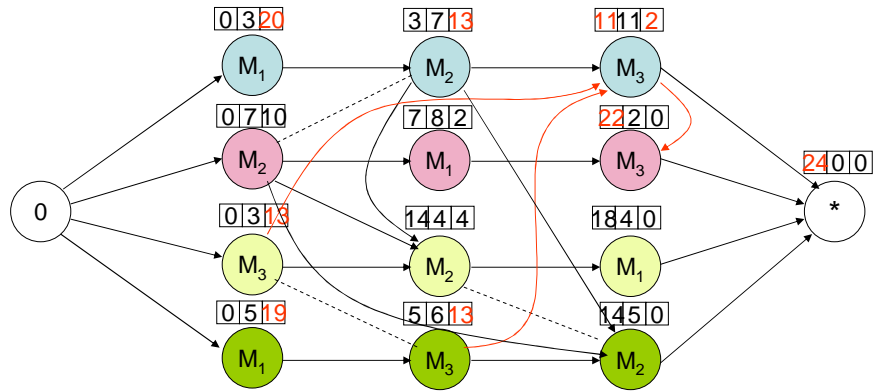
Siamo riusciti a sequenziare M_3 quasi del tutto, manca solo la coppia J_3, J_4 .

Prima di procedere con le altre macchine si propagano in avanti le teste e indietro le code

Appena aggiornate sul grafo

4. Aggiornamento del grafo

Prima di procedere all'analisi della macchina M_1 , si aggiornano teste, code e JPS propagando In avanti le teste e indietro le code modificate. Poi si ricalcola il JPS.

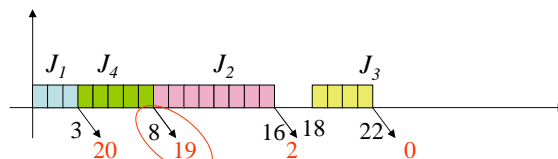


La macchina M_3 è sequenziata quasi completamente, resta da definire solo la precedenza della coppia J_3, J_4 . Gli archi ridondanti J_3, J_2 e J_4, J_2 non sono disegnati per semplicità.

3. Calcolo delle implicazioni

Resta la macchina M_1 , si ricalcola il JPS perché sono cambiate due code

	J_1	J_2	J_3	J_4
r_k	0	7	18	0
p_k	3	8	4	5
q_k	20	2	0	19



1. candidato output $J_c = J_3$: $p_c=4, r_c=18, p^+=$
- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| | J_2 | J_4 | J_1 |
| r_c | 0 | 0 | 0 |
| q_k | 2 | 19 | 20 |
- Attenzione, il LB è $27=UB$ ma non è sufficiente per terminare, perché il LB dovrebbe superare l'UB

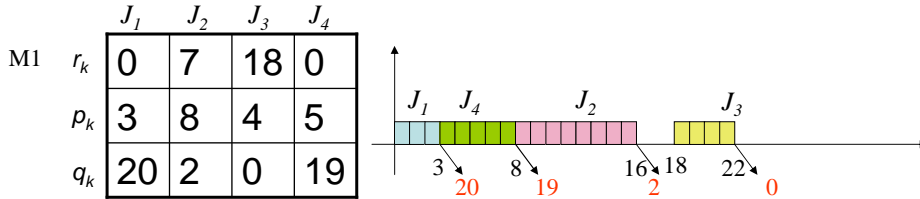
Clique $J = \{J_2, J_4, J_1\}$: c output di J se: $r_c + p_c + \sum_{J_k \in J} p_k + \min_{J_k \in J} \{q_k\} > UB$
 $18 + 4 + (0+0+0) + 2 > 27$? NO

Clique $J = \{J_4, J_1\}$: $18 + 4 + (0+0) + 19 > 27$? SI $\Rightarrow J_3$ output di $\{J_4, J_1\}$

Aggiornamento teste e code: $r_c = \max \{ r_c; \sum_{J_k \in J} p_k + \min_{J_k \in J} \{ r_k \} \} \Rightarrow r_3 = 18$ $q_1 = \max \{ 20; 4 \}$
 $q_4 = \max \{ 19; 4 \}$

3. Calcolo delle implicazioni

Ancora macchina M_1 , non si ricalcola il JPS perché non sono cambiate teste e code



1. candidato output $J_c = J_2$: $p_c=8, r_c=7, p^+=$

	J_3	J_4	J_1
r_k	4	1	0
p_k	2	19	20
q_k			

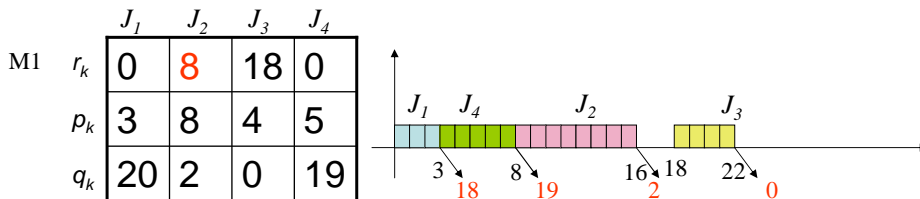
Clique $J = \{J_3, J_4, J_1\}$: c output di J se: $r_c + p_c + \sum_{J_k \in J} p_k^+ + \min_{J_k \in J} \{q_k\} > UB$
 $7 + 8 + (4+1+0) + 2 > 27$? **NO**

Clique $J = \{J_4, J_1\}$: $7 + 8 + (1+0) + 19 > 27$? **SI** $\Rightarrow J_2$ output di $\{J_4, J_1\}$

Aggiornamento teste e code: $r_c = \max\{r_c; \sum_{J_k \in J} p_k^+ + \min_{J_k \in J} \{r_k\}\} \Rightarrow r_2 = 8$ $q_1 = \max\{20; 4\}$
 $q_4 = \max\{19; 4\}$

3. Calcolo delle implicazioni

Ancora macchina M_1 , si ricalcola il JPS perché è cambiata una testa



1. candidato output $J_c = J_4$: $p_c=5, r_c=0, p^+=$

	J_3	J_2	J_1
r_k	4	8	3
p_k	0	2	20
q_k			

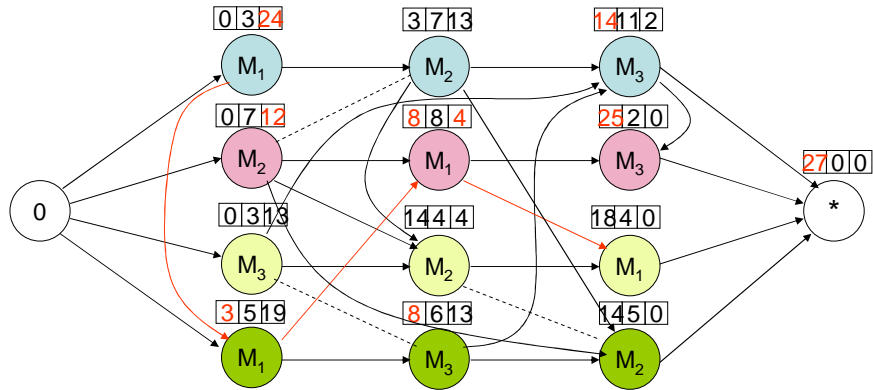
Clique $J = \{J_3, J_2, J_1\}$: c output di J se: $r_c + p_c + \sum_{J_k \in J} p_k^+ + \min_{J_k \in J} \{q_k\} > UB$
 $0 + 5 + (4+8+3) + 0 > 27$? **NO**

Clique $J = \{J_2, J_1\}$: $0 + 5 + (8+3) + 2 > 27$? **NO**

Clique $J = \{J_1\}$: se $|J|=1$ si usa un'altra formula: $r_c + p_c + p_j + q_j$ oppure $r_j + p_j + p_c + q_c > UB$?
 $0 + 5 + 3 + 20$ oppure $0 + 3 + 5 + 19 > 27$? **SI**

4. Aggiornamento del grafo

Prima di ritornare ad analizzare le macchine non sequenziate, si aggiornano teste e code propagando in avanti le teste e indietro le code modificate.



Restano solo tre archi da sequenziare. Avendo modificato teste e code possiamo riprovare Ad applicare la regola:

$$r_c + p_c + p_j + q_j \text{ oppure } r_j + p_j + p_c + q_c > UB ?$$

3. Calcolo delle implicazioni

Macchina M_2 , abbiamo fissato quasi tutti gli archi, restano solo le coppie J_1, J_2 e J_3, J_4

$$r_1 + p_1 + p_2 + q_2 \text{ oppure } r_2 + p_2 + p_1 + q_1 > UB ?$$

$$3 + 7 + 7 + 12 \text{ oppure } 0 + 7 + 7 + 13 > 27 ? \text{ SI} \Rightarrow J_1 \text{ precede } J_2$$

$$r_3 + p_3 + p_4 + q_4 \text{ oppure } r_4 + p_4 + p_3 + q_3 > UB ?$$

$$14 + 4 + 5 + 0 \text{ oppure } 14 + 5 + 4 + 4 > 27 ? \text{ NO}$$

Sulla macchina M_1 resta da sequenziare la coppia J_3, J_4

Macchina M_3 , abbiamo fissato quasi tutti gli archi, resta solo la coppia J_3, J_4

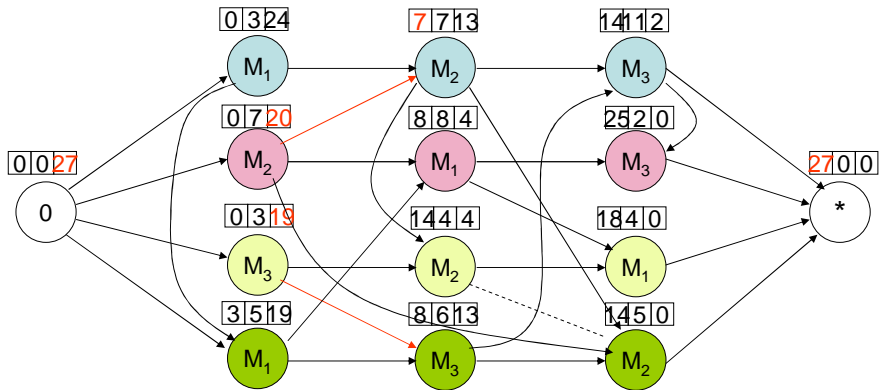
$$r_3 + p_3 + p_4 + q_4 \text{ oppure } r_4 + p_4 + p_3 + q_3 > UB ?$$

$$0 + 3 + 6 + 13 \text{ oppure } 8 + 6 + 3 + 13 > 27 ? \text{ SI} \Rightarrow J_3 \text{ precede } J_4$$

La macchina M_3 è completamente sequenziata J_3, J_4, J_1, J_2

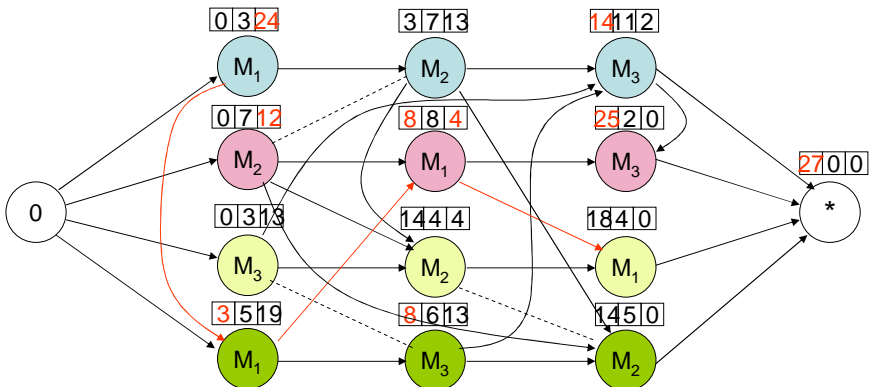
4. Aggiornamento del grafo

In realtà il problema è risolto in quanto comunque si orienti l'arco rimasto otteniamo una soluzione ammissibile con makespan 27, esistono quindi due soluzioni con makespan minore o uguale a 27, e dunque ottime.



Branch and bound

Torniamo a pag. 25. Solo per curiosità vediamo come avremmo dovuto procedere se non avessimo verificato la possibilità di implicare gli archi rimasti.



Restano solo due archi da sequenziare. Possiamo provare a risolvere il problema con il Branch and Bound. Scegliamo un arco su cui fare branch, ad esempio con la regola

$$\text{Max}_{\substack{(i,j) \text{ non} \\ \text{sequenziati}}} \{ \min \{ r_i + p_i + p_j + q_j; r_j + p_j + p_i + q_i \} \}$$

5. Scelta dell'arco per il branch

Macchina M_2 , restano due coppie J_1, J_2 J_3, J_4

$$\text{Min } \{r_1 + p_1 + p_2 + q_2 ; r_2 + p_2 + p_1 + q_1\} = 27$$

$$3 + 7 + 7 + 12 ; 0 + 7 + 7 + 13$$

$$\text{Min } \{r_3 + p_3 + p_4 + q_4 ; r_4 + p_4 + p_3 + q_3\} = 23$$

$$14 + 4 + 5 + 0 ; 14 + 5 + 4 + 4$$

Macchina M_3 , resta solo la coppia J_3, J_4

$$\text{Min } \{r_3 + p_3 + p_4 + q_4 ; r_4 + p_4 + p_3 + q_3\} = 22$$

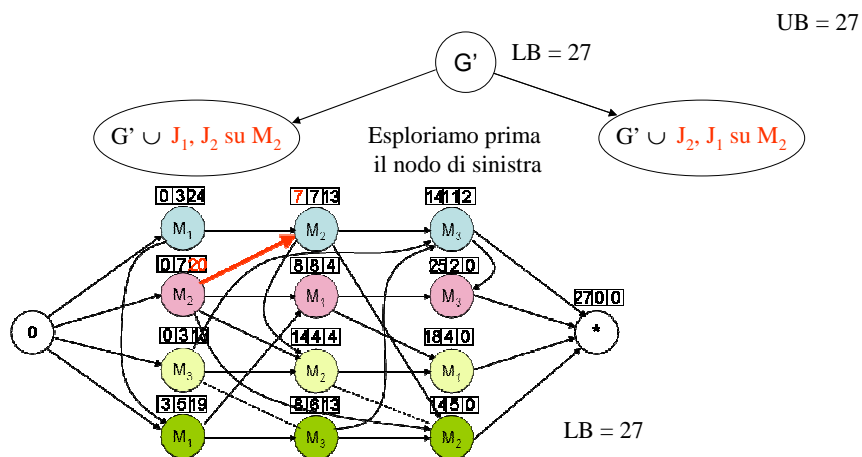
$$0 + 3 + 6 + 13 ; 8 + 6 + 3 + 13$$

$\text{Max } \{27, 23, 22\} = 27 \Rightarrow$ Branch sulla coppia J_1, J_2 della macchina M_2

A questo punto dobbiamo risolvere 2 sottoproblemi, uno con la sequenza J_1, J_2

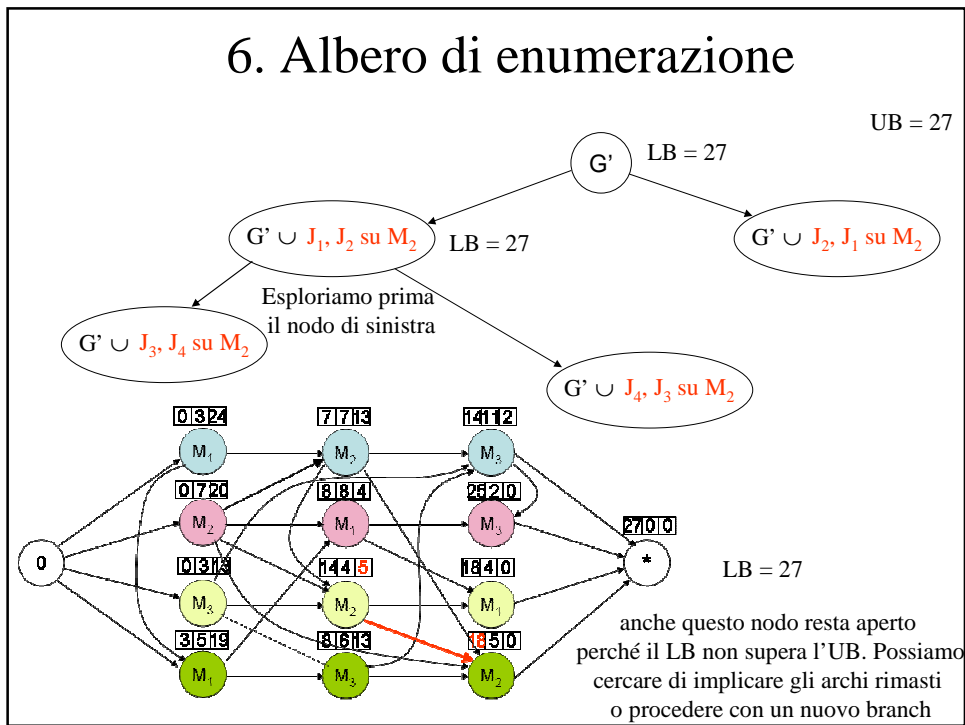
e uno con la sequenza J_2, J_1 sulla macchina M_2

6. Albero di enumerazione

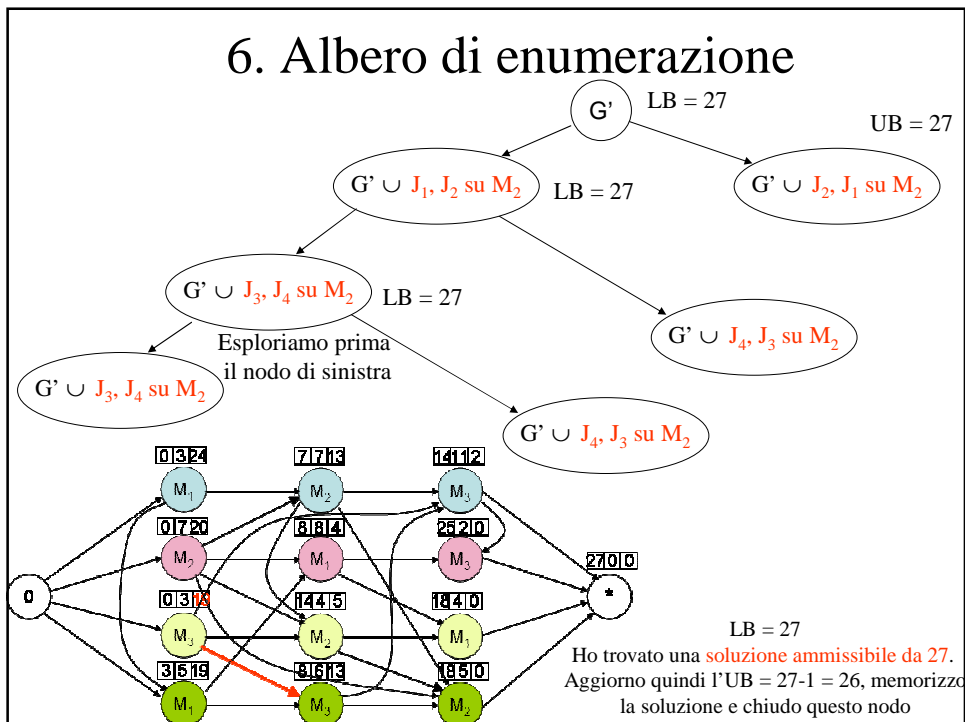


questo nodo resta aperto perché il LB non supera l'UB. Possiamo Cercare di implicare gli archi rimasti o procedere con un nuovo branch

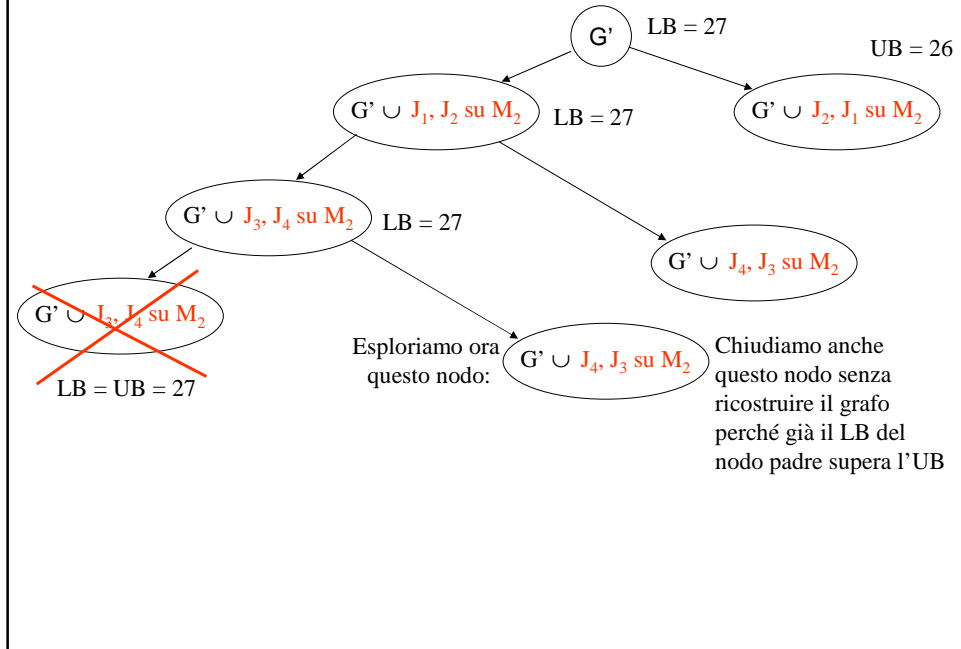
6. Albero di enumerazione



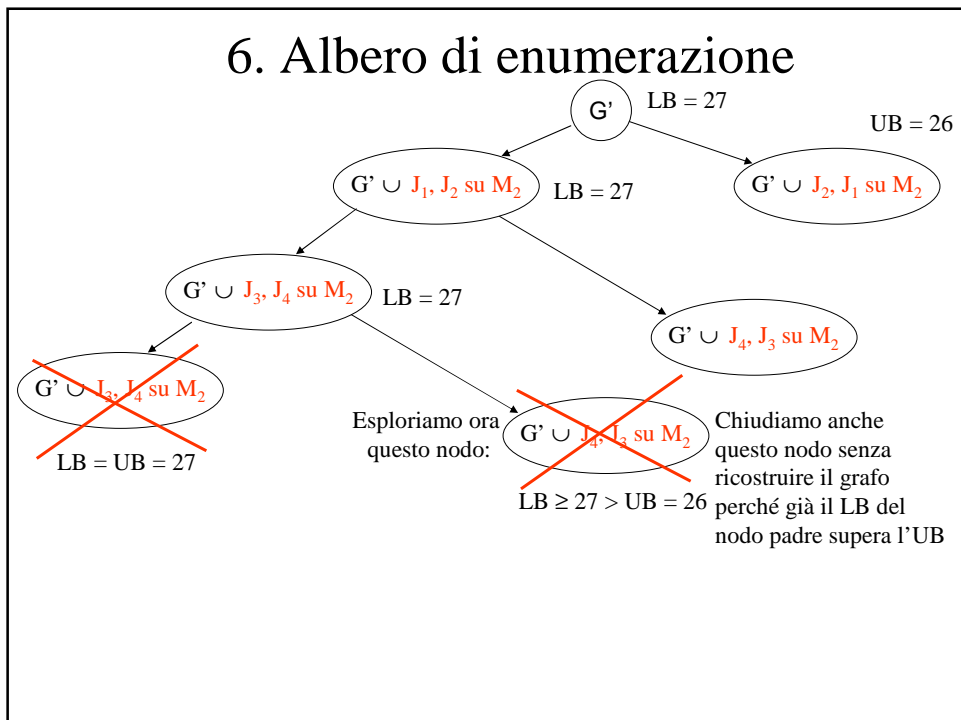
6. Albero di enumerazione



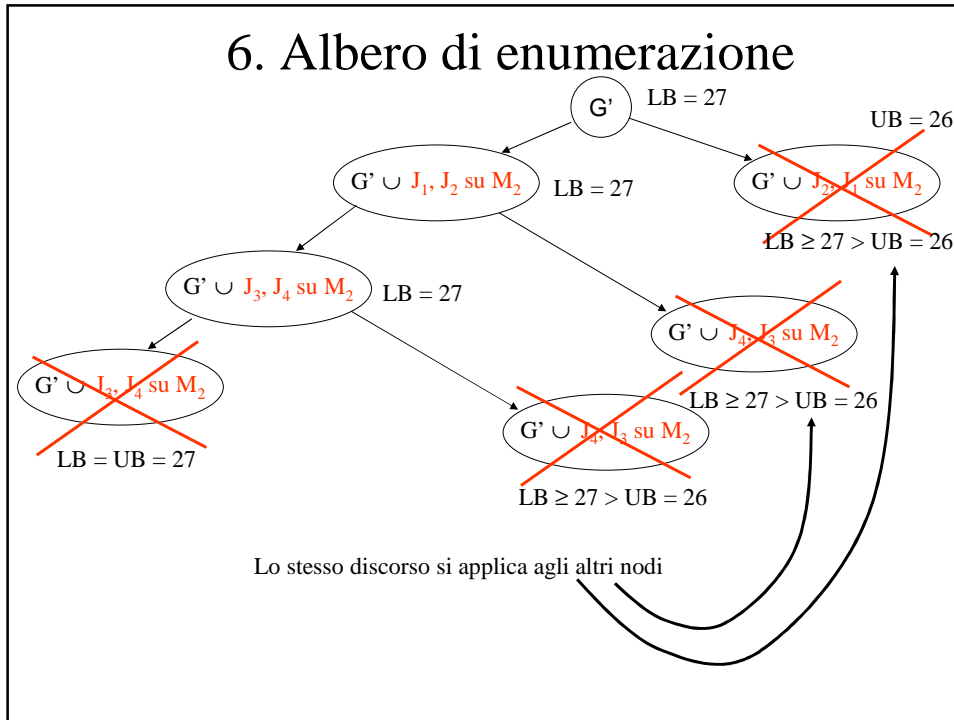
6. Albero di enumerazione



6. Albero di enumerazione



6. Albero di enumerazione



6. Albero di enumerazione

