EOQ CON BACKLOGGING

IL PROBLEMA DI GESTIONE DELLE SCORTE

DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Si vuole risolvere un problema di lot sizing tempo continuo a domanda costante d=2 unità per periodo.

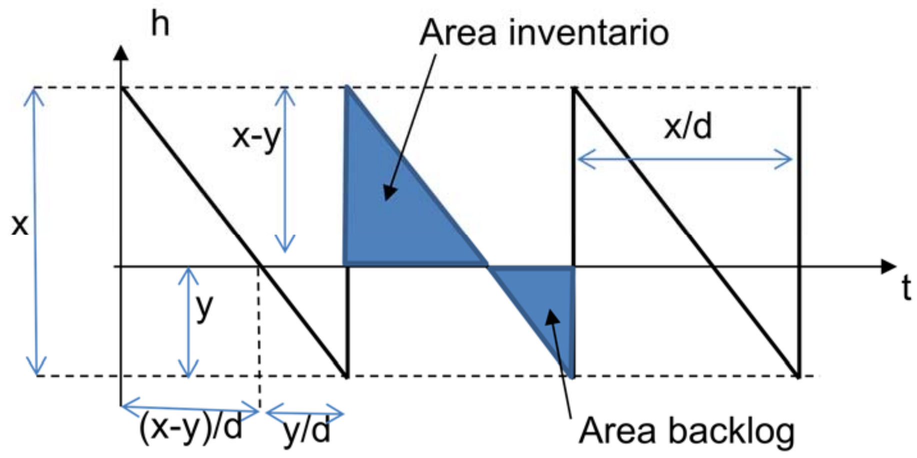
Si ha che:

- il costo fisso di produzione è F=6
- il costo variabile di produzione è v=5 per unità prodotta
- il costo di immagazzinamento è h=1 per unità prodotta per periodo
- il costo di backlog è b=2 per unità prodotta per periodo

OBIETTIVO

Determinare la dimensione x del lotto economico e la quantità y del massimo backlog formulando un opportuno problema di PNL e risolvendo il problema con le condizioni KKT.

FORMULAZIONE



In figura è riportato l'andamento del magazzino.
Le componenti del costo di produzione sono 3 per ogni periodo produttivo:

1. Costo di produzione: $F + vx$
2. Costo di immagazzinamento (area del triangolo superiore): $h\,\frac{(x-y)^2}{2d}$
3. Costo di backlog (area del triangolo inferiore): $b\,\frac{y^2}{2d}$

Poiché nell'unità di tempo si hanno $\frac{d}{x}$ periodi produttivi, la formulazione del problema di minimizzare il costo totale nell'unità di tempo è:

$$\min \frac{d}{x}\left(F + vx + h\frac{(x-y)^2}{2d} + b\frac{y^2}{2d}\right)$$
$$\begin{cases} x \geq y \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Si noti che nella formulazione è stato omesso il vincolo ridondante $x \geq 0$. E' evidente che non ci sono punti di non qualificazione dei vincoli nell'insieme ammissibile e che la funzione obiettivo è coerciva, quindi il punto di minimo globale deve essere un punto KKT.

Sostituendo i valori numerici nella funzione obiettivo si ha:

$$\min f(x) = \frac{12}{x} + 10 + \frac{(x-y)^2}{2x} + \frac{y^2}{x}$$

La $f(x)$ si può riscrivere come:

$$\min f(x) = \frac{12}{x} + 10 + \frac{x^2 + 3y^2 - 2xy}{2x} = \frac{12}{x} + 10 + \frac{x}{2} + \frac{3y^2}{2x} - y$$

Il gradiente della funzione vale:

$$\nabla f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{3y^2}{2x^2} \\ \frac{3y}{x} - 1 \end{pmatrix}$$

La ricerca dei punti KKT parte dalla definizione della funzione Lagrangiana:

$$L(x) = f(x) - \mu_1 g_1(x) - \mu_2 g_2(x)$$

Dove $g_1(x) = x - y \geq 0$ e $g_2(x) = y \geq 0$.

Caso 1. Nessun vincolo attivo: $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Nell'interno della regione ammissibile la condizione $\nabla L = 0$ si ottiene annullando il gradiente di $f(x)$:

$$\begin{cases} -\dfrac{12}{x^2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{3y^2}{2x^2} = 0 \\ \dfrac{3y}{x} - 1 = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava $y = \frac{x}{3}$
Sostituendo nella prima si ha:

$$-\frac{12}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = 0$$

Ovvero:

$$x = \sqrt{36} = 6$$

Il solo punto KKT nell'intermo dell'insieme ammissibile è quindi $\binom{x}{y} = \binom{6}{2}$.

Caso 2. Attivo solo il primo vincolo: $g_1(x) = x - y = 0$, quindi : $\mu_2 = 0$. Si ha:

$$\nabla L(x) = \nabla f(x) - \mu_1 \nabla g_1(x)$$

Poiché $\nabla g_1(x) = \binom{1}{-1}$ si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} -\dfrac{12}{x^2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{3y^2}{2x^2} - \mu_1 = 0 \\ \dfrac{3y}{x} - 1 + \mu_1 = 0 \\ x = y \end{cases}$$

Ovvero:

$$\begin{cases} -\dfrac{12}{x^2} - 1 - \mu_1 = 0 \\ 2 + \mu_1 = 0 \\ x = y \end{cases}$$

Che ammette soluzione solo per $\mu_1 = -2$, quindi non ammissibile per le KKT.

Caso 3. Attivo solo il secondo vincolo: $g_2(x) = y = 0$, quindi : $\mu_1 = 0$. Si ha:

$$\nabla L(x) = \nabla f(x) - \mu_2 \nabla g_2(x)$$

Poiché $\nabla g_2(x) = \binom{0}{1}$ si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} -\dfrac{12}{x^2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3y^2}{2x^2}=0 \\ \dfrac{3y}{x}-1-\mu_2=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Ovvero:

$$\begin{cases} -\dfrac{12}{x^2}+\dfrac{1}{2}=0 \\ -1-\mu_2=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Che ammette soluzione solo per $\mu_1=-1$, quindi non ammissibile per le KKT.

Caso 4. Attivi primo e secondo vincolo: $g_1(x)=x-y=0$; $g_2(x)=y=0$. Si ha:

$$L(x)=f(x)-\mu_1 g_1(x)-\mu_2 g_2(x)$$

Si ottiene quindi il sistema:

$$\begin{cases} -\dfrac{12}{x^2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3y^2}{2x^2}-\mu_1=0 \\ \dfrac{3y}{x}-1+\mu_1-\mu_2=0 \\ x=y \\ y=0 \end{cases}$$

Che ammette l'unica soluzione $x=y=0$ in cui la funzione Lagrangiana non è definita. Quindi dobbiamo scartare questo punto (in effetti al fine di una corretta formulazione del problema avremmo dovuto definire il problema con un vincolo $x \geq \varepsilon$, per un qualche $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere perché l'origine non può far parte dell'insieme ammissibile. Comunque per $x \to 0$ si ha che $f(x) \to +\infty$ quindi l'ottimo non può aversi per x "piccolo").

In conclusione, la soluzione ottima è quindi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.