Esercizio 1

Un'azienda deve costruire degli impianti capacitati per servire 6 clienti (1,…,6) ed individua allo scopo 4 siti possibili (A,B,C,D). I costi da sostenere sono: i costi di attivazione degli impianti (che si assumono fissi) ed i costi di afferenza dei clienti ai siti. Questi dati sono forniti in tabella.

Costi variabili		Siti potenziali			
		A	**B**	**C**	**D**
Clienti	**1**	13	10	3	1
	2	6	14	1	0
	3	7	0	1	0
	4	0	1	6	4
	5	0	2	11	3
	6	0	1	9	14
Costi fissi		20	17	18	21

La capacità di un impianto è 8 e la domanda dei clienti è 2 per i clienti 1,2,5,6 e 4 per i clienti 3,4.

1. Rilassare il vincolo di capacità facendo uso del rilassamento Lagrangiano.
2. Dopo aver fissato a 0,5 il valore dei moltiplicatori Lagrangiani, trovare un lower bound alla soluzione ottima del problema utilizzando l'algoritmo di Erlenkotter.
3. Risolvere in modo esatto il rilassamento Lagrangiano (sempre per λ=0,5) con il branch and bound di Erlenkotter.
4. Verificare l'ammissibilità della soluzione ottima trovata e, se ammissibile, discuterne il gap di ottimalità.

Soluzione

1. si tratta di rilassare i 4 vincoli di capacità per ciascun impianto: $\sum_i d_i y_{ij} \le k_j$, dove $k_j = 8$ per ciascun impianto mentre $d_1 = d_2 = d_5 = d_6 = 2$, $d_3 = d_4 = 4$. La funzione obiettivo avrà quindi un termine $-\sum_j k_j \lambda_j$ dipendente solo da λ mentre il resto del problema sarà esattamente equivalente ad un problema di plant location non capacitato con costi di afferenza modificati $c_{ij} + d_i \lambda_j$. Fissando λ_j=0,5 per tutti i moltiplicatori si ottiene una matrice di afferenza aggiornata

Costi variabili		Siti potenziali			
		A	**B**	**C**	**D**
Clienti	**1**	14	11	4	2
	2	7	15	2	1
	3	9	2	3	2
	4	2	3	8	6
	5	1	3	12	4
	6	1	2	10	15
Costi fissi		20	17	18	21

2. Calcolo LB =47 e UB=51 (attivando gli impianti bloccati BCD e poi chiudendo C o D)

	A	B	C	D
1	14	11	4	2
2	7	15	2	1
3	9	2	3	2
4	2	3	8	6
5	1	3	12	4
6	1	2	10	15
	20	17	18	21

A	B	C	D
54	53	57	51

14
9
3
6
4
11
47

	0	3	10	12
	2	0	7	8
	0	1	0	1
	4	3	0	0
	3	1	0	0
	10	9	1	0
	19	17	18	21
diff	1	0	0	0

AB	AC	AD	BC	BD	CD
11	4	2	4	2	2
7	2	1	2	1	1
2	3	2	2	2	2
2	2	2	3	3	6
1	1	1	3	3	4
1	1	1	2	2	10
37	38	41	35	38	39
61	51	50	51	51	64

ABC	ABD	ACD	BCD		ABCD
4	2	2	2		2
2	1	1	1		1
2	2	2	2		2
2	2	2	3		2
1	1	1	3		1
1	1	1	2		1
55	58	59	56		76
67	67	68	69		85

3. Branch and bound

Nodo 1: NON attivo B (primo impianto ad andare nella condizione di blocco)

LB = 47 si bloccano C e D. Attivare CD determina un UB=64 (peggiore dell'UB corrente). Genero due nodi figli imponendo l'apertura/chiusura di C (nodi 3 e 4)

Nodo 2: attivo B (primo impianto ad andare nella condizione di blocco)

LB = 17 + 34=51 = UB corrente, chiudo il nodo

Nodo 3: NON attivo B e C.

LB= 50 si bloccano A e D. Attivare AD determina un UB=50 (migliore dell'UB corrente). Aggiorno l'UB corrente a 50 e chiudo il nodo (LB=UB).

Nodo 4: NON attivo B e attivo C.

LB= 18 + 33=51 > UB corrente, chiudo il nodo.

La soluzione ottima è l'UB corrente (50, cioè attivo A e D).

4. Tornando al problema capacitato, otteniamo che la soluzione è ammissibile. La funzione obiettivo originale ha valore (attivando A e D e facendo afferire i primi 3 clienti a D e i secondi ad A) 42, che è quindi un UB per il problema capacitato, mentre il LB è il valore ottimo del problema non capacitato (cioè 50) meno il termine $\sum_j k_j \lambda_j = 16$, viene cioè LB=34. La soluzione ottima intera è compresa quindi tra 34 e 42, con un gap relativo del $100\frac{42-34}{34} = 23{,}5\%$.

Si osserva in effetti che la soluzione trovata è ottima, come si può verificare risolvendo in maniera esatta rilassamento Lagrangiano per λ=0 con il branch and bound di Erlenkotter (che fornisce LB=50).