UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Collegio Didattico di Ingegneria Informatica
Ottimizzazione della Logistica

Esercizio

Un'azienda deve costruire degli impianti per servire n=6 clienti (1,…,6) ed individua allo scopo m=4 siti possibili (A,B,C,D). I costi da sostenere sono: i costi di attivazione degli impianti (che si assumono fissi) ed i costi di afferenza dei clienti ai siti. Questi dati sono forniti in tabella.

Costi variabili		Siti potenziali			
		A	**B**	**C**	**D**
Clienti	**1**	4	10	6	9
	2	8	2	2	2
	3	2	1	7	2
	4	5	5	1	1
	5	1	3	1	4
	6	1	3	6	2
Costi fissi		11	7	10	13

1. Trovare un lower bound alla soluzione ottima del problema utilizzando l'algoritmo di Erlenkotter.
2. Trovare un upper bound alla soluzione ottima del problema attivando i soli impianti bloccati al punto 1 e quindi chiudendo quelli (eventuali) che è conveniente chiudere secondo una logica greedy.
3. Trovare la soluzione ottima del problema con un algoritmo di branch and bound basato sul lower bound di Erlenkotter.

Algoritmo di Erlenkotter

1. Inizializza le variabili duali $z_i = min_j\{c_{ij}\}$
2. Finché ci sono clienti non bloccati:
   a. scegli tra i clienti non bloccati il cliente h con minimo valore di $\alpha_i = \left|\{i: c_{ij} \leq z_i\}\right|$, cioè $h = min\{\alpha_i: i\ non\ bloccato\}$
   b. calcola per ogni impianto j=1,…,m i valori $\beta_j = \begin{cases} f_j - \sum_{i=1}^{n} w_{ij} & se\ \ c_{hj} \leq z_h \\ c_{hj} - z_h & se\ \ c_{hj} > z_h \end{cases}$
   c. incrementa z_h del minimo β_j e aggiorna w_{hj} di conseguenza, cioè: $z_h \coloneqq z_h + min_j\{\beta_j\}$ e $w_{hj} \coloneqq \max\{0, z_h - c_{hj}\}$, per j=1,…,m
   d. blocca tutti gli impianti con $f_j = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}$ e blocca tutti i clienti con $c_{ij} \leq z_i$ e j bloccato.

Soluzione

Applicando l'algoritmo di Erlenkotter al problema dato, si inizializzano le variabili z_i come segue:
$z_1 = 4, z_2 = 2, z_3 = 1, z_4 = 1, z_5 = 1, z_6 = 1,$

Quindi si esegue il passo 2 (iterativo):
Alla prima iterazione:
$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 2, \alpha_5 = 2, \alpha_6 = 1$. Tra le 3 possibilità si sceglie h=1.
Di conseguenza si ha:
$\beta_A = 11, \beta_B = 6, \beta_c = 2, \beta_D = 5$. Si aggiorna $z_1 = 6$ e $w_{1A} = 2$.

Alla seconda iterazione:
$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 2, \alpha_5 = 2, \alpha_6 = 1$. Tra le 2 possibilità si sceglie h=3.

Di conseguenza si ha:
$\beta_A = 1, \beta_B = 7, \beta_c = 6, \beta_D = 1.$ Si aggiorna $z_3 = 2$ e $w_{3B} = 1.$

Alla terza iterazione:
$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 3, \alpha_4 = 2, \alpha_5 = 2, \alpha_6 = 1.$ Si sceglie necessariamente h=6.
Di conseguenza si ha:
$\beta_A = 9, \beta_B = 2, \beta_c = 5, \beta_D = 1.$ Si aggiorna $z_6 = 2$ e $w_{6A} = 1.$

Alla quarta iterazione:
$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 3, \alpha_4 = 2, \alpha_5 = 2, \alpha_6 = 2.$ Si sceglie h=1.
Di conseguenza si ha:
$\beta_A = 8, \beta_B = 4, \beta_c = 10, \beta_D = 3.$ Si aggiorna $z_1 = 9$ e $w_{1A} = 5, w_{1C} = 3$

Alla quinta iterazione:
$\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 3, \alpha_4 = 2, \alpha_5 = 2, \alpha_6 = 2.$ Si sceglie h=4.
Di conseguenza si ha:
$\beta_A = 4, \beta_B = 4, \beta_c = 7, \beta_D = 13.$ Si aggiorna $z_4 = 5$ e $w_{4C} = 4, w_{4D} = 4$

Alla sesta iterazione:
$\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 3, \alpha_4 = 4, \alpha_5 = 2, \alpha_6 = 2.$ Si sceglie h=5.
Di conseguenza si ha:
$\beta_A = 5, \beta_B = 2, \beta_c = 3, \beta_D = 3.$ Si aggiorna $z_5 = 3$ e $w_{5A} = 2, w_{5C} = 2$

Alla settima iterazione:
$\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 3, \alpha_4 = 4, \alpha_5 = 3, \alpha_6 = 2.$ Si sceglie necessariamente h=6.
Di conseguenza si ha:
$\beta_A = 3, \beta_B = 1, \beta_c = 4, \beta_D = 9.$ Si aggiorna $z_6 = 3$ e $w_{6A} = 2, w_{6D} = 1$

All'ottava iterazione:
$\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 3, \alpha_4 = 4, \alpha_5 = 2, \alpha_6 = 3.$ Si sceglie h=1.
Di conseguenza si ha:
$\beta_A = 2, \beta_B = 1, \beta_c = 1, \beta_D = 8.$ Si aggiorna $z_5 = 10$ e $w_{1A} = 6, w_{1C} = 4, w_{1D} = 1$
Si bloccano l'impianto C e, di conseguenza, i clienti 1, 2, 4, 5.

Alla nona iterazione:
$\alpha_3 = 3, \alpha_6 = 3.$ Si sceglie h=3.
Di conseguenza si ha:
$\beta_A = 1, \beta_B = 6, \beta_c = 5, \beta_D = 7.$ Si aggiorna $z_3 = 3$ e $w_{3A} = 1, w_{3B} = 1, w_{3D} = 1$
Si bloccano l'impianto A e i clienti 2, 6.

Essendo tutti i clienti bloccati termina la fase 2. Il lower bound è $\sum_{i=1}^{n} z_i = 26$
Attivando gli impianti bloccati (A e C) si ottiene come upper bound il valore 32. Provando a chiudere A o C l'upper bound non migliora.

Algoritmo di **Branch and Bound**

Si parte dal nodo 0 con LB=26 e UB=32. Si effettua un branch su una variabile di attivazione corrispondente a uno degli impianti bloccati, per es. x_A

Nodo 1: $x_A = 0$

Per il calcolo del lower bound è necessario applicare nuovamente l'algoritmo di Erlenkotter a un'istanza priva dell'impianto A:

Costi variabili		Siti potenziali			
			B	**C**	**D**
Clienti	**1**		10	6	9
	2		2	2	2
	3		1	7	2
	4		5	1	1
	5		3	1	4
	6		3	6	2
Costi fissi			7	10	13

Si ottiene quanto segue. Si inizializzano le variabili z_i:
$z_1 = 6, z_2 = 2, z_3 = 1, z_4 = 1, z_5 = 1, z_6 = 2,$

Quindi si esegue il passo iterativo. Alla prima iterazione:
$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 2, \alpha_5 = 1, \alpha_6 = 1$. Tra le possibilità si sceglie h=1.
Di conseguenza si ha:
$\beta_B = 4, \beta_c = 10, \beta_D = 3$. Si aggiorna $z_1 = 9$ e $w_{1D} = 3$.

Alla seconda iterazione:
$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 2, \alpha_5 = 1, \alpha_6 = 1$. Si sceglie h=3.
Di conseguenza si ha:
$\beta_B = 7, \beta_c = 6, \beta_D = 1$. Si aggiorna $z_3 = 2$ e $w_{3B} = 1$.

Alla terza iterazione:
$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 2, \alpha_4 = 2, \alpha_5 = 1, \alpha_6 = 1$. Si sceglie h=5.
Di conseguenza si ha:
$\beta_B = 2, \beta_c = 7, \beta_D = 3$. Si aggiorna $z_5 = 3$ e $w_{5B} = 2$.

Alla quarta iterazione:
$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 2, \alpha_4 = 2, \alpha_5 = 2, \alpha_6 = 1$. Si sceglie h=6.
Di conseguenza si ha:
$\beta_B = 1, \beta_c = 4, \beta_D = 13$. Si aggiorna $z_6 = 3$ e $w_{6C} = 1$.

Alla quinta iterazione:
$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 2, \alpha_4 = 2, \alpha_5 = 2, \alpha_6 = 2$. Si sceglie h=1.
Di conseguenza si ha:
$\beta_B = 1, \beta_c = 5, \beta_D = 12$. Si aggiorna $z_1 = 10$ e $w_{1B} = 4, w_{1C} = 1$

Alla sesta iterazione:
$\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 2, \alpha_4 = 2, \alpha_5 = 2, \alpha_6 = 2$. Si sceglie h=3.
Di conseguenza si ha:
$\beta_B = 6, \beta_c = 5, \beta_D = 11$. Si aggiorna $z_3 = 7$ e $w_{3A} = 6, w_{3C} = 5$

Alla settima iterazione:
$\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 3, \alpha_4 = 2, \alpha_5 = 2, \alpha_6 = 2$. Si sceglie h=4.
Di conseguenza si ha:
$\beta_B = 4, \beta_c = 4, \beta_D = 6$. Si aggiorna $z_3 = 5$ e $w_{4B} = 4, w_{4C} = 4$
Si bloccano l'impianto C e i clienti 1,2,3,4,5.

All'ottava iterazione:
$\alpha_6 = 2$. Si sceglie h=6.
Di conseguenza si ha:
$\beta_B = 1, \beta_c = 3, \beta_D = 6$. Si aggiorna $z_6 = 4$ e $w_{6B} = 1, w_{6D} = 2$
Si bloccano l'impianto B e il cliente 6.

Il nodo 1 fornisce quindi un LB=31 e un insieme di impianti bloccati B,C. Attivando questi impianti si ricava una soluzione ammissibile di costo 31, migliore dell'ottimo corrente. Quindi si aggiorna l'UB=31, potendo così chiudere il nodo 1 dell'albero di enumerazione (LB ≥ UB).

Va ancora esaminato l'altro ramo dell'albero di enumerazione.

<u>Nodo 2</u>: $x_A = 1$

Per il calcolo del lower bound è necessario applicare nuovamente l'algoritmo di Erlenkotter. L'istanza da studiare deve tenere conto del fatto che certamente va pagato il costo di attivazione dell'impianto A. Questo costo (11) è pertanto una costante e non entra nel calcolo di Erlenkotter ma andrà aggiunto al lower bound di Erlenkotter calcolato sull'istanza seguente in cui l'attivazione di A è a costo zero:

Costi variabili		Siti potenziali			
		A	**B**	**C**	**D**
Clienti	**1**	4	10	6	9
	2	8	2	2	2
	3	2	1	7	2
	4	5	5	1	1
	5	1	3	1	4
	6	1	3	6	2
Costi fissi		0	7	10	13

Quindi si avrà: LB=11+$\sum_{i=1}^{n} z_i$

Si ottiene quanto segue. Si inizializzano le variabili z_i:
$z_1 = 4$, $z_2 = 2$, $z_3 = 1$, $z_4 = 1$, $z_5 = 1$, $z_6 = 1$,
Sono immediatamente bloccati l'impianto A e i clienti 1, 5, 6.

Alla prima iterazione:
$\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 2$. Si sceglie h=3.
Di conseguenza si ha:
$\beta_A = 1$, $\beta_B = 7$, $\beta_c = 6$, $\beta_D = 1$.   Si aggiorna $z_3 = 2$ e $w_{3B} = 1$.
Si blocca il cliente 3.

Alla seconda iterazione:
$\alpha_2 = 3$, $\alpha_4 = 2$. Si sceglie h=4.
Di conseguenza si ha:
$\beta_A = 4$, $\beta_B = 4$, $\beta_c = 10$, $\beta_D = 13$.   Si aggiorna $z_4 = 5$ e $w_{4c} = w_{4D} = 4$.
Si blocca il cliente 4.

Alla terza iterazione si sceglie necessariamente h=2.
Di conseguenza si ha:
$\beta_A = 6$, $\beta_B = 6$, $\beta_c = 6$, $\beta_D = 9$.   Si aggiorna $z_2 = 8$ e $w_{2B} = w_{2c} = w_{2D} = 6$.
Si bloccano gli impianti B e C e il cliente 2.

Il nodo 2 fornisce quindi un LB=11+$\sum_{i=1}^{n} z_i = 32$ e un insieme di impianti bloccati B,C. Si può quindi chiudere anche il nodo 2 dell'albero di enumerazione (LB> UB).

Non essendoci altri nodi da esaminare si conclude che l'ottimo del problema è l'UB corrente 31, associato alla soluzione ottima: attiva B e C.