Logica dei Predicati
o Logica del Primo Ordine

Il mondo è analizzato in termini di OGGETTI, PROPRIETÀ, RELAZIONI

- uno più due è uguale a tre — $1 + 2 = 3$ — $= (+(1,2),3)$
  - oggetti: uno, due, tre
  - funzioni: più
  - relazioni: è uguale a
  - costanti: 1, 2, 3
  - simboli funzionali: +
  - simboli di predicato: =

- Le caselle vicino al wumpus puzzano
  - oggetti: wumpus
  - relazioni e proprietà: essere una casella, essere vicino a, puzzare

  Per ogni oggetto x, se x è una casella e x è vicina al wumpus, allora x puzza

  - x: variabile
  - $wumpus$: costante
  - $casella, vicino, puzza$: simboli di predicato
  - $\forall$: quantificatore universale
  - connettivi proposizionali

  $$\forall x(casella(x) \land vicino(wumpus, x) \rightarrow puzza(x))$$

Atomi: relazioni tra oggetti
Quantificatori: per ogni ($\forall$), esiste ($\exists$)

Logica dei predicati: sintassi
(linguaggi del primo ordine)

$\boxed{\text{Alfabeto}}$:

1. Simboli logici:
   (a) Variabili: $x, y, z, x_1, x_2, ...$ (insieme infinito)
   (b) Connettivi proposizionali e costanti $\top, \bot$
   (c) Quantificatori: $\forall$, $\exists$
   (d) Simboli separatori (parentesi e virgola)
2. Simboli non logici
   (a) Insieme non vuoto di simboli di predicato, con associata “arità”: $\{p^n, q^m, r^k, ...\}$
   (b) Costanti: $a, b, c, a_1, a_2, ...$
   (c) Simboli funzionali, con associata “arità”: $f_1^{n_1}, f_2^{n_2}, ...$

$\boxed{\text{Linguaggi con eguaglianza}}$ $=$ è tra i simboli di predicato

TERMINI

- Ogni variabile è un termine
- Ogni costante è un termine
- Se $t_1, .., t_n$ sono termini e f^n è un simbolo funzionale, allora $f(t_1, ..., t_n)$ è un termine

Termini chiusi: senza variabili

Definizione ricorsiva dell'insieme $vars(t)$ delle variabili che occorrono in un termine t

- se t è una variabile x, allora $vars(t) = \{x\}$
- se t è una costante, allora $vars(t) = \emptyset$
- se $t = f(t_1, ..., t_n)$, allora

$$vars(t) = vars(t_1) \cup ... \cup vars(t_n)$$

FORMULE

1. Se p è un simbolo di predicato a n argomenti, e $t_1, ..., t_n$ sono termini, allora $p(t_1, ..., t_n)$ è una formula (formula atomica)
2. $\top$ e $\bot$ sono formule (atomiche)
3. se A è una formula, allora anche $\neg A$ è una formula
4. se A e B sono formule, allora anche $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A {\rightarrow} B)$, $(A \equiv B)$ sono formule
5. Se A è una formula e x una variabile, allora $\forall x A$ e $\exists x A$ sono formule
6. Nient'altro è una formula

Esempi

$fratello(caino, abele)$
$\neg fratello(giovanni, robin\_hood)$
$fratello(x, abele){\rightarrow}assassino(x)$

$\forall x(fratello(x, abele){\rightarrow}assassino(x))$
$\exists x(fratello(x, abele) \wedge assassino(x))$

$\forall x(fratello(x, y){\rightarrow}fratello(y, x))$
$\exists x(padre(x, abele) \wedge padre(x, caino))$

$\forall x \forall y(fratello(x, y) \equiv \exists z(padre(z, x) \wedge padre(z, y)))$

Variabili libere e vincolate

Scopo o **campo d'azione** di un quantificatore:

di $\forall x$ in $\forall x A$: A

di $\exists x$ in $\exists x A$: A

$$p(c) \wedge \forall x \overbrace{(q(x,c) \rightarrow \exists y \underbrace{(p(y) \vee r(x,y,z))}_{scopo\ di\ \exists y})}^{scopo\ di\ \forall x} \equiv \exists x \overbrace{\forall y \ \underbrace{q(x,y)}_{scopo\ di\ \forall y}}^{scopo\ di\ \exists x}$$

Occorrenza vincolata di una variabile: x è la variabile di un quantificatore oppure occorre nello scopo di un quantificatore $\forall x$ o $\exists x$

Occorrenza libera di x: occorrenza non vincolata

$$p(\underline{x}) \wedge \forall x (q(x, \underline{y}) \vee \neg q(c, x))$$

- x è **libera** in A sse ha almeno un'occorrenza libera in A

(variabili libere $\approx$ variabili globali   variabili vincolate $\approx$ variabili locali)

Formula chiusa : senza variabili libere

Definizione ricorsiva dell'insieme delle variabili libere in una formula

- se $A = p(t_1, ..., t_n)$ allora $free\_vars(A) = vars(t_1) \cup ... \cup vars(t_n)$
- se $A = \top$ o $A = \bot$ allora $free\_vars(A) = \emptyset$
- se $A = \neg A_1$ allora $free\_vars(A) = free\_vars(A_1)$
- se $A = A_1 \star A_2$ dove $\star$ è un connettivo binario, allora $free\_vars(A) = free\_vars(A_1) \cup free\_vars(A_2)$
- se $A = Qx\, A_1$ dove Q è un quantificatore, allora $free\_vars(A) = free\_vars(A_1) - \{x\}$

Sostituzione di variabili con termini

Se A è una formula, x una variabile e t un termine:

$$A[t/x]$$

denota la formula che si ottiene da A sostituendo ogni occorrenza LIBERA della variabile x con il termine t

Sostituzione SIMULTANEA:

$$A[t_1/x_1, ..., t_n/x_n]$$

Esempio:

$$p(x,y)[f(y)/x, f(x)/y] = p(f(y), f(x))$$
$$p(x,y)[f(y)/x][f(x)/y] = p(f(y), y)[f(x)/y] = p(f(f(x)), f(x))$$
$$p(x,y)[f(x)/y][f(y)/x] = p(x, f(x))[f(y)/x] = p(f(y), f(f(y)))$$

Solo le occorrenze libere vengono sostituite:

$$\begin{aligned} &p(x,c) \land \forall x(q(x,y) \rightarrow \exists y\, r(y))[t_1/x, t_2/y] \\ &\quad = p(t_1,c) \land \forall x(q(x,t_2) \rightarrow \exists y\, r(y)) \end{aligned}$$

Semantica

$\exists x p(x) \vee \exists y q(y) \rightarrow \exists z(p(z) \wedge q(z))$ è vera o falsa?

DOVE? Nel **dominio** $D = \{1, 2\}$

COME SONO INTERPRETATI p e q?

$p(x) = x$ è pari Estensione di p: $\{2\}$
$q(x) = x$ è maggiore o uguale a 1 Estensione di q: $\{1, 2\}$

$\exists x p(x)$ è vero se esiste $d \in \{1, 2\}$ tale che $d \in \{2\}$
$\exists x q(x)$ è vero se esiste $d \in \{1, 2\}$ tale che $d \in \{1, 2\}$
$\exists z(p(z) \wedge q(z))$ è vero se esiste $d \in \{1, 2\}$ tale che $d \in \{2\}$ e $d \in \{1, 2\}$

Consideriamo ora $D = \{1, 2\}$

$p(x) = x$ è pari; estensione: $\{2\}$
$q(x) = x$ è dispari; estensione: $\{1\}$

$\exists x p(x)$ è vero se esiste $d \in \{1, 2\}$ tale che $d \in \{2\}$
$\exists x q(x)$ è vero se esiste $d \in \{1, 2\}$ tale che $d \in \{1\}$
$\exists z(p(z) \wedge q(z))$ è vero se esiste $d \in \{1, 2\}$ tale che $d \in \{2\}$ e $d \in \{1\}$

Semantica (2)

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio, con costanti $\mathcal{C}$, simboli funzionali $\mathcal{F}$ e simboli di predicato $\mathcal{P}$

Interpretazione di $\mathcal{L}$:

1. Insieme non vuoto D (dominio o universo dell'interpretazione)
2. Funzione di interpretazione che associa:
   (a) a ogni $c \in \mathcal{C}$ un elemento $\mathcal{M}(c) \in D$
   (b) a ogni $f^n \in \mathcal{F}$ una funzione $\mathcal{M}(f) : D^n \longrightarrow D$
   (c) a ogni $p^n \in \mathcal{P}$ una relazione n-aria su D: $\mathcal{M}(p) \subseteq D^n$

Per linguaggi con eguaglianza: $=$ è trattata come simbolo logico e l'interpretazione di $=$ è sempre l'identità:

$$\mathcal{M}(=) \;=\; \{< d, d > \mid d \in D\}$$

Interpretazione di una formula A: interpetazione di qualsiasi linguaggio che contenga tutti i simboli non logici di A

Esempio

Sono interpretazioni di $\forall x p(a,x)$, e del linguaggio con $\mathcal{C} = \{a\},\ \mathcal{F} = \emptyset,\ \mathcal{P} = \{p\}$:

1. $\mathcal{M}_1$ con dominio $\mathbb{N}$, $\mathcal{M}(a) = 0$, e $\mathcal{M}(p) = \{\langle n, m\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid n \leq m\}$.
2. $\mathcal{M}_2$ con dominio $\mathbb{N}$, $\mathcal{M}(a) = 1$, e $\mathcal{M}(p) = \{\langle n, m\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid n \leq m\}$.
3. $\mathcal{M}_3$ con dominio $\mathbb{Z}$, $\mathcal{M}(a) = 0$, e $\mathcal{M}(p) = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}^2 \mid x \leq y\}$.
4. $\mathcal{M}_4$ con dominio S uguale all'insieme di tutte le sequenze finite di caratteri alfanumerici, $\mathcal{M}(a) = \epsilon$ (la sequenza vuota), e $\mathcal{M}(p) = \{\langle s_1, s_2\rangle \in S^2 \mid s_1$ è una sottosequenza di $s_2\}$.
5. $\mathcal{M}_5$ con dominio $D = \{0, 1, 2\}$, $\mathcal{M}(a) = 1$ e $\mathcal{M}(p) = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$

Interpretazione dei termini chiusi

1. se c è una costante in $\mathcal{L}$, l'interpretazione di c è $\mathcal{M}(c)$;
2. se $f(t_1, ..., t_n)$ è un termine chiuso, la sua interpretazione è $\mathcal{M}(f(t_1, ..., t_n)) = \mathcal{M}(f)(\mathcal{M}(t_1), ..., \mathcal{M}(t_n))$

Esempio: se $\mathcal{C} = \{zero\}$, $\mathcal{F} = \{succ, sum, times\}$ e $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, \{0\}, \{\lambda x.x + 1, +, \times\}\rangle$:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}(times(succ(succ(zero)), sum(succ(zero), zero)))\\
&\quad = \mathcal{M}(times)(\mathcal{M}(succ(succ(zero))), \mathcal{M}(sum(succ(zero), zero)))\\
&\quad = \mathcal{M}(succ(succ(zero)) \times \mathcal{M}(sum(succ(zero), zero))\\
&\quad = \mathcal{M}(succ)(\mathcal{M}(succ(zero))) \times \mathcal{M}(sum)(\mathcal{M}(succ(zero)), \mathcal{M}(zero))\\
&\quad = (\mathcal{M}(succ(zero)) + 1) \times (\mathcal{M}(succ(zero)) + \mathcal{M}(zero))\\
&\quad = (\mathcal{M}(succ)(\mathcal{M}(zero)) + 1) \times (\mathcal{M}(succ)(\mathcal{M}(zero)) + 0)\\
&\quad = ((\mathcal{M}(zero) + 1) + 1) \times ((\mathcal{M}(zero) + 1) + 0)\\
&\quad = ((0 + 1) + 1) \times ((0 + 1) + 0)\\
&\quad = 2 \times 1 = 2
\end{aligned}
$$

Interpretazione di termini con variabili

Come interpretiamo le variabili?

Assegnazione: $s : X \to D$

Interpretazione di un termine t secondo l'assegnazione s:

$$\overline{s}(t)$$

1. se $x \in X$ è una variabile, allora $\overline{s}(x) = s(x)$;
2. se c è una costante in $\mathcal{L}$, allora $\overline{s}(c) = \mathcal{M}(c)$;
3. se $f(t_1, ..., t_n)$ è un termine, allora $\overline{s}(t) = \mathcal{M}(f)(\overline{s}(t_1), ..., \overline{s}(t_n))$.

Esempio: $\mathcal{M}$ su $\mathbb{N}$, con $\mathcal{M}(f) = \lambda n.2 \times n$ e s tale che $s(x) = 3$:

$$\begin{aligned} \overline{s}(f(x)) &= \mathcal{M}(f)(\overline{s}(x)) \\ &= (\lambda n.2 \times n)(s(x)) \\ &= (\lambda n.2 \times n)3 \;=\; 2 \times 3 \;=\; 6 \end{aligned}$$

Interpretazione delle formule

Dipende dall'interpretazione delle variabili libere che occorrono nella formula.

$$\begin{array}{rl}
\text{Sia } \mathcal{M} & \text{su } \mathbb{N}, \\
 & \mathcal{M}(f) = \lambda n.2 \times n, \\
 & \mathcal{M}(p) = \{\langle n, m\rangle \mid n^2 \leq m\}, \\
\text{e } s & \text{tale che } s(x) = 3 \text{ e } s(y) = 5; \\
s' & \text{tale che } s'(x) = 4 \text{ e } s'(y) = 5
\end{array}$$

La formula $p(x, f(y))$ è vera in $\mathcal{M}$ secondo l'assegnazione s,

(è vero che $3^2 \leq 2 \times 5$)

Ma è falsa in $\mathcal{M}$ secondo l'assegnazione s'

(è falso che $4^2 \leq 2 \times 5$)

x-varianti

s' è una x-variante di s sse per ogni variabile y diversa da x: $s'(y) = s(y)$.

Esempio: le due assegnazioni qui sotto, s e s', sono x_4-varianti l'una dell'altra.

x_1	1
x_2	2
x_3	3
x_4	4
x_5	5
...	...

x_1	1
x_2	2
x_3	3
x_4	44
x_5	5
...	...

$$s' = s[44/x_4] \qquad \text{e} \qquad s = s'[4/x_4]$$

Notazione: $s[d/x]$ è la x-variante di s che assegna d a x

N.B. Per ogni assegnazione s e variabile x, s è una x-variante di se stessa:

$$s = s[s(x)/x]$$

A è vera in $\mathcal{M}$ secondo l'assegnazione s

s soddisfa A in $\mathcal{M}$

$$\boxed{(\mathcal{M}, s) \models A}$$

1. $(\mathcal{M}, s) \models p(t_1, ..., t_n)$ sse $\langle \overline{s}(t_1), ..., \overline{s}(t_n) \rangle \in \mathcal{M}(p)$
2. $(\mathcal{M}, s) \models \top$ e $(\mathcal{M}, s) \not\models \bot$;
3. $(\mathcal{M}, s) \models \neg A$ sse $(\mathcal{M}, s) \not\models A$;
4. $(\mathcal{M}, s) \models A \wedge B$ sse $(\mathcal{M}, s) \models A$ e $(\mathcal{M}, s) \models B$;
5. $(\mathcal{M}, s) \models A \vee B$ sse $(\mathcal{M}, s) \models A$ oppure $(\mathcal{M}, s) \models B$;
6. $(\mathcal{M}, s) \models A \rightarrow B$ sse $(\mathcal{M}, s) \not\models A$ oppure $(\mathcal{M}, s) \models B$;
7. $(\mathcal{M}, s) \models A \equiv B$ sse $(\mathcal{M}, s) \models A$ e $(\mathcal{M}, s) \models B$, oppure $(\mathcal{M}, s) \not\models A$ e $(\mathcal{M}, s) \not\models B$
8. $(\mathcal{M}, s) \models \forall x A$ sse per ogni $d \in D$: $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models A$
9. $(\mathcal{M}, s) \models \exists x A$ sse esite $d \in D$, tale che: $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models A$

Esempio

Sia $\mathcal{M}$ con $D = \{1, 2\}$, $\mathcal{M}(p) = \{2\}$ e $\mathcal{M}(q) = \{1, 2\}$, e sia s qualsiasi assegnazione su D

$(\mathcal{M}, s) \models \exists y(p(y) \wedge q(y))$ se e solo se esiste $d \in \{1, 2\}$ tale che $(\mathcal{M}, s[d/y]) \models p(y) \wedge q(y)$. Poiché ci sono solo due oggetti nel dominio, questo vale se e solo se si verifica uno di questi due casi:

1. $(\mathcal{M}, s[1/y]) \models p(y) \wedge q(y)$: perché ciò sia vero si devono verificare entrambi i casi seguenti:
   (a) $(\mathcal{M}, s[1/y]) \models p(y)$: ciò vale se e solo se $s[1/y](y) \in \mathcal{M}(p)$, cioè $1 \in \{2\}$, ma questo è falso.
   (b) $(\mathcal{M}, s[1/y]) \models q(y)$.

   Poiché (a) è falso, è falso anche il caso 1.
2. $(\mathcal{M}, s[2/y]) \models p(y) \wedge q(y)$: perché ciò sia vero si devono verificare entrambi i casi seguenti:
   (a) $(\mathcal{M}, s[2/y]) \models p(y)$: ciò vale se e solo se $s[2/y](y) \in \mathcal{M}(p)$, cioè $2 \in \{2\}$, e questo è vero.
   (b) $(\mathcal{M}, s[2/y]) \models q(y)$: ciò vale se e solo se $s[2/y](y) \in \mathcal{M}(q)$, cioè $2 \in \{1, 2\}$, e anche questo è vero.

   Quindi il caso 2 è vero.

Perciò è vero che per ogni assegnazione s, $(\mathcal{M}, s) \models \exists y(p(y) \wedge q(y))$.

Esercizi

Sia $\mathcal{M}$ l'interpretazione definita precedentemente e siano:

- $\mathcal{M}'$ uguale a $\mathcal{M}$ tranne che $\mathcal{M}(q) = \{1\}$.
- $\mathcal{M}''$ uguale a $\mathcal{M}$ tranne che $\mathcal{M}''(p) = \emptyset$.

Sia inoltre s qualsiasi assegnazione su D.

1. Verificare se $(\mathcal{M}', s) \models \exists y(p(y) \wedge q(y))$.
2. Verificare se $(\mathcal{M}, s) \models \forall x(p(x) \wedge q(x))$.
3. Verificare se $(\mathcal{M}, s) \models \forall x(p(x) \wedge q(x))$.
4. Verificare se $(\mathcal{M}', s) \models \forall x(p(x) \vee q(x))$.
5. Verificare se $(\mathcal{M}'', s) \models \forall x(p(x) \vee q(x))$.
6. Verificare se $(\mathcal{M}', s) \models \forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x)$.
7. Verificare se $(\mathcal{M}'', s) \models \forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x)$.
8. Verificare se $(\mathcal{M}, s) \models \forall x(p(x) \rightarrow q(x))$
9. Verificare se $(\mathcal{M}', s) \models \forall x(p(x) \rightarrow q(x))$
10. Verificare se $(\mathcal{M}'', s) \models \forall x(p(x) \rightarrow q(x))$

Definizione di $(\mathcal{M}, s) \not\models A$

1. $(\mathcal{M}, s) \not\models p(t_1, ..., t_n)$ sse $\langle \overline{s}(t_1), ..., \overline{s}(t_n)\rangle \notin \mathcal{M}(p)$
2. $(\mathcal{M}, s) \not\models \top$ è sempre falso e $(\mathcal{M}, s) \not\models \bot$ è sempre vero;
3. $(\mathcal{M}, s) \not\models \neg A$ sse $(\mathcal{M}, s) \models A$;
4. $(\mathcal{M}, s) \not\models A \wedge B$ sse $(\mathcal{M}, s) \not\models A$ oppure $(\mathcal{M}, s) \not\models B$;
5. $(\mathcal{M}, s) \not\models A \vee B$ sse $(\mathcal{M}, s) \not\models A$ e $(\mathcal{M}, s) \not\models B$;
6. $(\mathcal{M}, s) \not\models A \rightarrow B$ sse $(\mathcal{M}, s) \models A$ e $(\mathcal{M}, s) \not\models B$;
7. $(\mathcal{M}, s) \not\models A \equiv B$ sse $(\mathcal{M}, s) \not\models A$ e $(\mathcal{M}, s) \models B$, oppure $(\mathcal{M}, s) \models A$ e $(\mathcal{M}, s) \not\models B$
8. $(\mathcal{M}, s) \not\models \forall x A$ sse esiste $d \in D$, tale che: $(\mathcal{M}, s[d/x]) \not\models A$
9. $(\mathcal{M}, s) \not\models \exists x A$ sse per ogni $d \in D$: $(\mathcal{M}, s[d/x]) \not\models A$

Verità e falsità di una formula in una interpretazione

$\mathcal{M} \models A$ sse per ogni assegnazione s su $\mathcal{M}$: $(\mathcal{M}, s) \models A$.

A è falsa in una interpretazione $\mathcal{M}$ sse nessuna assegnazione la soddisfa:
per ogni assegnazione s su $\mathcal{M}$: $(\mathcal{M}, s) \not\models A$

Una formula può non essere né vera né falsa in una interpretazione $\mathcal{M}$

Proprietà della verità/falsità

1. A è falsa in $\mathcal{M}$ sse $\mathcal{M} \models \neg A$;
   $\mathcal{M} \models A$ sse $\neg A$ è falsa in $\mathcal{M}$.
2. Nessuna formula può essere contemporaneamente vera e falsa in una interpretazione.
3. Se $\mathcal{M} \models A$ e $\mathcal{M} \models A \rightarrow B$, allora $\mathcal{M} \models B$.
4. $A \rightarrow B$ è falsa in $\mathcal{M}$ se e solo se $\mathcal{M} \models A$ e B è falsa in $\mathcal{M}$.
5. $\mathcal{M} \models A$ sse $\mathcal{M} \models \forall x A$. Quindi $\mathcal{M} \models A$ sse $\mathcal{M} \models \forall x_1 ... \forall x_n A$ (chiusura universale di A).
6. Se $s(x) = s'(x)$ per ogni variabile x che occorre libera in A, allora $(\mathcal{M}, s) \models A$ sse $(\mathcal{M}, s') \models A$
   (**Lemma di coincidenza**).
7. Se A è chiusa, allora per ogni $\mathcal{M}$ o $\mathcal{M} \models A$ oppure $\mathcal{M} \models \neg A$
   (o tutte le assegnazioni soddisfano A, oppure nessuna la soddisfa).

   Se A è chiusa, $\mathcal{M} \models A$ sse esiste s tale che $(\mathcal{M}, s) \models A$.

Esempio: dimostrare che $\mathcal{M} \models A$ o $\mathcal{M} \not\models A$

Sia $A = \forall x p(a, x)$ e:

$\mathcal{M}_1$ con dominio $\mathbb{N}$, $\mathcal{M}_1(a) = 0$, e
$\mathcal{M}_1(p) = \{\langle n, m \rangle \in \mathbb{N}^2 \mid n \leq m\}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 \models A \text{ sse per ogni } s\text{:} \quad & (\mathcal{M}_1, s) \models A \\
& \text{sse per ogni } n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{M}_1, s[n/x]) \models p(a, x) \\
& \text{sse per ogni } n \in \mathbb{N},\ \langle s[n/x](a), s[n/x](x) \rangle \in \mathcal{M}_1(p) \\
& \text{sse per ogni } n \in \mathbb{N},\ \langle 0, n \rangle \in \mathcal{M}_1(p) \\
& \text{sse per ogni } n \in \mathbb{N},\ 0 \leq n\text{: vero}
\end{aligned}$$

Il Programma `models`: il file di input

Il file di input specifica un modello e una formula:

```
/* Dichiarazione del dominio: contiene gli oggetti 0 e 1.
   Se volessimo dichiarare un dominio con gli oggetti
   0,1,2,3,4,5, la dichiarazione sarebbe
      dom: 0...5
   La dichiarazione ha sempre la forma
     dom: 0...n
   dove n e' un intero maggiore o uguale a 0.
   Se questa dichiarazione manca, e' come se fosse dom: 0...0 */
dom: 0...1;

# dichiarazione dell'interpretazione delle costanti.  Se una costante non
# e' dichiarata, la sua interpretazione e' 0
const a: 0;
const c: 1;

/* dichiarazione dell'interpretazione dei simboli funzionali;
   si intende che per ogni argomento (tupla) per cui non e'
   specificato il valore, la funzione ha valore 0 */
fun f: (0,1) -> 1
       (1,0) -> 0
       (0,0) -> 1;
```

```
/* dichiarazione dell'interpretazione dei simboli di predicato.
   Nell'esempio che segue, l'interpretazione di aereo e' l'insieme
   contenente 0 e 1, quella di guida contiene le coppie (1,0) e (0,1).
   Si intende che se manca la dichiarazione di un predicato, la
   sua interpretazione e' l'insieme vuoto */
pred aereo: (0) (1);
pred aviatore: (0) (1);
pred guida: (1,0) (0,1);

# la formula di cui si vuole controllare la verita'

form: Forall x (aviatore(x) -> Exists y (aereo(y) & guida(x,y))) ;

####### questo e' un commento
#  Exists y (aereo(y) & Forall x (aviatore(x) -> guida(x,y))) ;
```

Il Programma `models`: l'esecuzione

```
> models sample-input

(M,s) |= Forall x (aviatore(x)->Exists y (aereo(y)&guida(x,y)))

------------
SE E SOLO SE
------------

PER OGNI d0 in D:
   (M,s[d0/x]) |= (aviatore(x)->Exists y (aereo(y)&guida(x,y)))

------------
SE E SOLO SE
------------

PER OGNI d0 in D:
      (M,s[d0/x]) |/= aviatore(x)
   OPPURE
      (M,s[d0/x]) |= Exists y (aereo(y)&guida(x,y)))

------------
SE E SOLO SE
```

```
------------

PER OGNI d0 in D:
      (s[d0/x](x)) non in M(aviatore)
      cioe':
      (d0) non in M(aviatore)
   OPPURE
      ESISTE d1 in D, tale che:
         (M,s[d1/y,d0/x]) |= (aereo(y)&guida(x,y)))

------------
SE E SOLO SE
------------

PER OGNI d0 in D:
      (d0) non in M(aviatore)
   OPPURE
      ESISTE d1 in D, tale che:
            (M,s[d1/y,d0/x]) |= aereo(y)
         E
            (M,s[d1/y,d0/x]) |= guida(x,y))

------------
```

```
SE E SOLO SE
------------

PER OGNI d0 in D:
      (d0) non in M(aviatore)
   OPPURE
      ESISTE d1 in D, tale che:
            (s[d1/y,d0/x](y)) in M(aereo)
            cioe':
            (d1) in M(aereo)
         E
            (s[d1/y,d0/x](x),s[d1/y,d0/x](y)) in M(guida)
            cioe':
            (d0,d1) in M(guida))

------------
SE E SOLO SE
------------

      (0) non in M(aviatore)
   OPPURE
            (0) in M(aereo)
         E
```

```
            (0,0) in M(guida)
      OPPURE
            (1) in M(aereo)
         E
            (0,1) in M(guida)
E
      (1) non in M(aviatore)
   OPPURE
            (0) in M(aereo)
         E
            (1,0) in M(guida)
      OPPURE
            (1) in M(aereo)
         E
            (1,1) in M(guida)

------------
SE E SOLO SE
------------

      FALSO
   OPPURE
            VERO
```

```
         E
            FALSO
      OPPURE
            VERO
         E
            VERO
E
      FALSO
   OPPURE
            VERO
         E
            VERO
      OPPURE
            VERO
         E
            FALSO

------------
SE E SOLO SE
------------

VERO
```

Esempio

$\mathcal{C} = \{felix,\ silvestro,\ giovanni,\ riccardo\}$
$\mathcal{F} = \{padre^1\}$
$\mathcal{P} = \{gatto^1,\ fratello^2, =\}$

Sia $\mathcal{M}$ con:

- $D = \{0, 1, 2, 3\}$
- $\mathcal{M}(felix) = 0,\ \mathcal{M}(silvestro) = 1,\ \mathcal{M}(giovanni) = 2,\ \mathcal{M}(riccardo) = 2$
- $\mathcal{M}(padre) = \{< 0, 0 >, < 1, 0 >, < 2, 3 >, < 3, 2 >\}$
  $\mathcal{M}(padre) = F$ tale che $F(0) = 0,\ F(1) = 0,\ F(2) = 3,\ F(3) = 2$
- $\mathcal{M}(gatto) = \{0, 1\}$,
  $\mathcal{M}(fratello) = \{< 0, 1 >, < 1, 0 >\}$

$$A = gatto(padre(padre(silvestro)))$$

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{M} \models A & \text{sse} & \text{per ogni assegnazione } s\text{: } (\mathcal{M}, s) \models A \\
& \text{sse} & s(padre(padre(silvestro))) \in \mathcal{M}(gatto) \\
& \text{sse} & F(s(padre(silvestro))) \in \{0, 1\} \\
& \text{sse} & F(F(s(silvestro))) \in \{0, 1\} \\
& \text{sse} & F(F(1)) \in \{0, 1\} \\
& \text{sse} & F(0) \in \{0, 1\} \\
& \text{sse} & 0 \in \{0, 1\}\text{: vero}
\end{array}$$

Esempio (segue)

$$A = \exists x(padre(silvestro) = x \wedge \exists y(padre(x) = y \wedge gatto(y)))$$

$\mathcal{M} \models \exists x(padre(silvestro) = x \wedge \exists y(padre(x) = y \wedge gatto(y)))$

sse per ogni assegnazione s: $(\mathcal{M}, s) \models A$

sse esiste $d \in D$ tale che $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models padre(silvestro) = x \wedge \exists y(padre(x) = y \wedge gatto(y))$

sse esiste $d \in D$ tale che $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models padre(silvestro) = x$ e
$(\mathcal{M}, s[d/x]) \models \exists y(padre(x) = y \wedge gatto(y))$

sse esiste $d \in D$ tale che $< s[d/x](padre(silvestro)), s[d/x](x) > \in \mathcal{M}(=)$ e
esiste $d' \in D$ tale che $(\mathcal{M}, s[d/x][d'/y]) \models padre(x) = y \wedge gatto(y)$

sse esiste $d \in D$ tale che $F(1) = s[d/x](x)$ e
esiste $d' \in D$ tale che $(\mathcal{M}, s[d/x][d'/y]) \models padre(x) = y$
e $(\mathcal{M}, s[d/x][d'/y]) \models gatto(y)$

sse esiste $d \in D$ tale che $0 = d$ e
esiste $d' \in D$ tale che $s[d/x][d'/y](padre(x)) = s[d/x][d'/y](y)$
e $s[d/x][d'/y](y) \in \mathcal{M}(gatto)$

sse VERO (esiste $d \in D$ tale che $0 = d$) e
esiste $d' \in D$ tale che $F(0) = d'$ e $d' \in \mathcal{M}(gatto)$

sse esiste $d' \in D$ tale che $0 = d'$ e $d' \in \mathcal{M}(gatto)$

sse VERO perché $0 \in \{0, 1\}$.

Esercizio: determinare l'interpretazione della formula

$$\forall x(padre(x) = felix \vee padre(x) = padre(giovanni))$$

Soddisfacibilità, validità, equivalenza logica

1. A è **soddisfacibile** se esiste un'interpretazione $\mathcal{M}$ di A e un'assegnazione s su $\mathcal{M}$ tale che $(\mathcal{M}, s) \models A$.
2. A è **valida** ($\models A$) sse è vera in ogni sua interpretazione: cioè per ogni $\mathcal{M}$ e per ogni s: $(\mathcal{M}, s) \models A$.

   A è valida sse $\neg A$ non è soddisfacibile.
3. A è **contraddittoria** sse essa è falsa in ogni interpretazione: non esistono $\mathcal{M}$ e s tali che $(\mathcal{M}, s) \models A$.
4. A **implica logicamente** B sse per ogni $\mathcal{M}$ e s, se $(M, s) \models A$, allora $(M, s) \models B$.
5. A e B sono **logicamente equivalenti** ($A \leftrightarrow B$) sse

$$\text{per ogni } \mathcal{M} \text{ e } s\text{: } (\mathcal{M}, s) \models A \text{ sse } (\mathcal{M}, s) \models B.$$

Conseguenza logica

6. Sia S un insieme di formule: $(\mathcal{M}, s) \models S$ sse per ogni formula C in S, $(\mathcal{M}, s) \models C$.
7. A è una **conseguenza logica** di S

$$S \models A$$

sse per ogni $\mathcal{M}$ e s, se $(\mathcal{M}, s) \models C$ per ogni formula $C \in S$, allora anche $(\mathcal{M}, s) \models A$.

$S \models A$ è più forte della relazione "A è vera in tutte le interpretazioni in cui sono vere tutte le formule in S".

- $S \models A \Leftrightarrow$ per ogni $\mathcal{M}, s$: $[(\mathcal{M}, s) \models S \Rightarrow (\mathcal{M}, s) \models A]$
- A è vera in tutte le interpretazioni in cui sono vere tutte le formule in $S \Leftrightarrow$
  per ogni $\mathcal{M}$: $\mathcal{M} \models S \Rightarrow \mathcal{M} \models A \Leftrightarrow$
  per ogni $\mathcal{M}$ [per ogni s : $(\mathcal{M}, s) \models S \Rightarrow$ per ogni s : $(\mathcal{M}, s) \models A$]

Infatti, per la proprietà 5 a pagina 19:

per ogni $\mathcal{M}$, se $\mathcal{M} \models p(x)$ allora $\mathcal{M} \models \forall x\, p(x)$.

Ma $p(x) \not\models \forall x\, p(x)$:

Sia $\mathcal{M}$ con dominio $D = \{0, 1\}$

$\mathcal{M}(p) = \{0\}$,

e s tale che $s(x) = 0$.

Allora $(\mathcal{M}, s) \models p(x)$, ma $(\mathcal{M}, s) \not\models \forall x\, p(x)$.

Quindi non per ogni $\mathcal{M}$ e s, se $(\mathcal{M}, s) \models p(x)$ allora $(\mathcal{M}, s) \models \forall x\, p(x)$.

Logica dei predicati e linguaggio naturale

1. Esiste un corvo nero: $\exists x(corvo(x) \wedge nero(x))$

2. Tutti sono corvi e sono neri: $\forall x(corvo(x) \wedge nero(x))$

3. $\exists x(corvo(x) \rightarrow nero(x))$ è vero in ogni interpretazione in cui esista un oggetto d^* che non è un corvo (oppure esiste almeno un oggetto nero d^*):

Se	$d^* \notin \mathcal{M}(corvo)$ (d^* non è un corvo)
oppure se	$d^* \in \mathcal{M}(nero)$ (d^* è nero)
allora per ogni s:	$(\mathcal{M}, s[d^*/x]) \not\models corvo(x)$ oppure
	$(\mathcal{M}, s[d^*/x]) \models nero(x)$.
Questo vale sse	$(\mathcal{M}, s[d^*/x]) \models corvo(x) \rightarrow nero(x)$,
che implica	esiste $d \in D$ tale che
	$(\mathcal{M}, s[d/x]) \models corvo(x) \rightarrow nero(x)$,
cioè	$(\mathcal{M}, s) \models \exists x(corvo(x) \rightarrow nero(x))$

4. Tutti i corvi sono neri: $\forall x(corvo(x) \rightarrow nero(x))$

$\boxed{\textbf{Affermazioni "vere a vuoto"}}$: $\forall x(corvo(x) \rightarrow nero(x))$ è vera in ogni interpretazione in cui non esistano corvi:

Per ogni $d \in D$, $d \notin \mathcal{M}(corvo)$ (non ci sono corvi)

vale sse:	per ogni s e per ogni $d \in D$, $(\mathcal{M}, s[d/x]) \not\models corvo(x)$.
Ciò implica che:	per ogni s e per ogni $d \in D$, $(\mathcal{M}, s[d/x]) \not\models corvo(x)$ oppure $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models nero(x)$,
che equivale a:	per ogni s e per ogni $d \in D$, $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models corvo(x) \rightarrow nero(x)$,
cioè:	per ogni s, $(\mathcal{M}, s) \models \forall x(corvo(x) \rightarrow nero(x))$.

$\forall x(corvo(x) \rightarrow nero(x))$ è falsa sse esiste un oggetto d tale che $(\mathcal{M}, s[d/x]) \not\models corvo(x) \rightarrow nero(x)$, cioè tale che:

$$(\mathcal{M}, s[d/x]) \models corvo(x) \text{ e } (\mathcal{M}, s[d/x]) \not\models nero(x)$$

(esiste un corvo che non è nero: un controesempio)

In particolare, esiste un corvo.

Dunque, se non esistono corvi, $\forall x(corvo(x) \rightarrow nero(x))$ non può essere falsa, quindi è vera.

Affermazioni "vere a vuoto"

È vero o falso che:

- Ogni numero in $\{1,3,5,7\}$ è dispari
- Ogni numero in $\{1,3,4,5,7\}$ è dispari
- Ogni numero dispari compreso tra 2 e 8 è primo
- Ogni numero dispari compreso tra 2 e 10 è primo

Perché 2 e 4 sono false?

È vero o falso che:

- Ogni numero appartenente all'insieme vuoto è dispari
- Ogni numero maggiore di 10 e minore di 3 è primo
- qualsiasi sia P: per ogni numero naturale $k < 0$ vale $P(k)$
- Per ogni proprietà P, per ogni $k \in \emptyset$ vale $P(k)$

Alcune formule valide

1. $\forall x p(x) \rightarrow p(t)$
   Assumiamo che la formula non sia valida: esiste una sua interpretazione $\mathcal{M}$ e un'assegnazione s su $\mathcal{M}$ tali che $(\mathcal{M}, s) \not\models \forall x\, p(x) \rightarrow p(t)$; cioè valgono (a) e (b):
   (a) $(\mathcal{M}, s) \models \forall x\, p(x)$
   $\Leftrightarrow$ per ogni $d \in D$, $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models p(x)$,
   $\Leftrightarrow$ per ogni $d \in D$: $s[d/x](x) \in \mathcal{M}(p)$;
   $\Leftrightarrow$ per ogni $d \in D$: $d \in \mathcal{M}(p)$.
   (b) $(\mathcal{M}, s) \not\models p(t)$.
   Dunque, se $s(t) = d^*$, $d^* \notin \mathcal{M}(p)$.

   Contraddizione
2. $\neg \forall x p(x) \equiv \exists x \neg p(x)$
3. $\forall x p(x) \equiv \neg \exists x \neg p(x)$
4. $\exists x p(x) \equiv \neg \forall x \neg p(x)$
5. $\neg \exists x p(x) \equiv \forall x \neg p(x)$
6. $\exists x \neg p(x) \equiv \neg \forall x p(x)$
7. $\forall x (p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow (\forall x p(x) \rightarrow \forall x q(x))$
8. $\forall x (p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow (\exists x p(x) \rightarrow \exists x q(x))$
9. $\forall x (p(x) \wedge q(x)) \equiv (\forall x p(x) \wedge \forall x q(x))$

10. $\exists x(p(x) \vee q(z)) \equiv (\exists x p(x) \vee \exists x q(x))$

11. $\forall x p(x) \vee \forall x q(x) \rightarrow \forall x(p(x) \vee q(x))$

12. $\exists x(p(x) \wedge q(x)) \rightarrow \exists x p(x) \wedge \exists x q(x)$

13. $\exists y \forall x p(x, y) \rightarrow \forall x \exists y p(x, y)$

14. se A non contiene x libera, allora

$$\models \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B)$$

15. se A non contiene x libera, allora

$$\models \forall x(B \rightarrow A) \rightarrow (\exists x B \rightarrow A)$$

Esercizio: dimostrare la validità di tali formule

Alcune formule non valide

1. $(\forall x p(x) \rightarrow \forall x q(x)) \rightarrow \forall x(p(x) \rightarrow q(x))$

   $\forall x p(x) \rightarrow \forall x q(x)$ è vera quando $\forall x p(x)$ è falsa (non tutti gli oggetti del dominio sono in $\mathcal{M}(p)$). Ma non è detto che, in questo caso, ogni oggetto in $\mathcal{M}(p)$ sia anche in $\mathcal{M}(q)$.

   Contromodello: $D = \{0, 1\}$, $\mathcal{M}(p) = \{0\}$, $\mathcal{M}(q) = \emptyset$.

2. $\forall x(p(x) \vee q(x)) \rightarrow \forall x p(x) \vee \forall x q(x)$

   Pensare alle interpretazioni di p e q: "essere pari" e "essere dispari"

3. $\exists x p(x) \wedge \exists x q(x) \rightarrow \exists x(p(x) \wedge q(x))$

   Come al punto precedente

4. $\forall x \exists y p(x, y) \rightarrow \exists y \forall x p(x, y)$

   Pensare alla differenza tra continuità (per ogni $x_0 \in I$ esiste $\delta > 0$ ... : δ dipende da x_0) e continuità uniforme (esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x_0 \in I$ ... : δ è lo stesso per ogni punto)

Esercizio: completare le dimostrazioni della non validità di tali formule

Per dimostrare che:

- la formula A è valida: per assurdo; si assume che esista un contromodello $(\mathcal{M}, s)$ di A e si giunge ad un assurdo;
- la formula A non è valida: si costruisce un contromodello: $(\mathcal{M}, s) \not\models A$

Per dimostrare che:

- $S \models A$:
  - per assurdo: si assume che esistano un'interpretazione $\mathcal{M}$ e un'assegnazione s, tali che $(\mathcal{M}, s) \models S$ e $(\mathcal{M}, s) \not\models A$, e si giunge ad un assurdo;
  - dimostrazione diretta: si assume che $\mathcal{M}$ e s siano qualsiasi interpretazione e assegnazione tali che $(\mathcal{M}, s) \models S$, e si dimostra che $(\mathcal{M}, s) \models A$
- $S \not\models A$: si costruisce un contromodello, cioè un'interpretazione $\mathcal{M}$ e un'assegnazione s, tali che $(\mathcal{M}, s) \models S$ e $(\mathcal{M}, s) \not\models A$.

Forme normali prenesse

Una formula è in forma normale prenessa se ha la forma:

$$\underbrace{Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n}_{prefisso} \ \underbrace{A}_{matrice}$$

la matrice è senza quantificatori

Ogni formula è logicamente equivalente a una formula in forma normale prenessa.

Per trasformare una formula in forma prenessa si utilizzano le seguenti equivalenze logiche:

- Ridenominazione di variabili vincolate:

$$\left.\begin{array}{l} \models \forall x A \equiv \forall y A[y/x] \\ \models \exists x A \equiv \exists y A[y/x] \end{array}\right\} \ y \text{ nuova}$$

- Se x non occorre in B, allora:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\forall x A \wedge B & \leftrightarrow & \forall x(A \wedge B) & \exists x A \wedge B & \leftrightarrow & \exists x(A \wedge B) \\
\forall x A \vee B & \leftrightarrow & \forall x(A \vee B) & \exists x A \vee B & \leftrightarrow & \exists x(A \vee B) \\
\forall x A \rightarrow B & \leftrightarrow & \exists x(A \rightarrow B) & \exists x A \rightarrow B & \leftrightarrow & \forall x(A \rightarrow B) \\
B \rightarrow \forall x A & \leftrightarrow & \forall x(B \rightarrow A) & B \rightarrow \exists x A & \leftrightarrow & \exists x(B \rightarrow A) \\
\neg \forall x A & \leftrightarrow & \exists x \neg A & \neg \exists x A & \leftrightarrow & \forall x \neg A
\end{array}$$

$$\forall x A \rightarrow B \ \leftrightarrow \ \neg \forall x A \vee B \ \leftrightarrow \ \exists x \neg A \vee B \ \leftrightarrow \ \exists x(\neg A \vee B) \ \leftrightarrow \ \exists x(A \rightarrow B)$$

Trasformazione di formule in forma prenessa
Esempio

$$\neg(\forall x \exists y\, p(x,y) \vee (\forall x\, p(x,c) \rightarrow \exists y\, q(y)))$$

$$\Rightarrow\ \neg(\forall x \exists y\, p(x,y) \vee (\forall x_1\, p(x_1,c) \rightarrow \exists y_1\, q(y_1)))$$

$$\Rightarrow\ \neg\forall x(\exists y\, p(x,y) \vee \exists x_1\, (p(x_1,c) \rightarrow \exists y_1\, q(y_1)))$$

$$\Rightarrow\ \neg\forall x \exists y\, (p(x,y) \vee \exists x_1 \exists y_1\, (p(x_1,c) \rightarrow q(y_1)))$$

$$\Rightarrow\ \neg\forall x \exists y \exists x_1 \exists y_1\, (p(x,y) \vee (p(x_1,c) \rightarrow q(y_1)))$$

$$\Rightarrow\ \exists x \neg\exists y \exists x_1 \exists y_1\, (p(x,y) \vee (p(x_1,c) \rightarrow q(y_1)))$$

$$\Rightarrow\ \exists x \forall y \forall x_1 \forall y_1\, \neg(p(x,y) \vee (p(x_1,c) \rightarrow q(y_1)))$$

Sostituzione di variabili con termini

È sempre vero che $\models \forall x A \rightarrow A[t/x]$?

Esempio: $\forall x \exists y\, (x < y)$ è vero nell'interpretazione standard su $\mathbb{N}$

Quindi anche $\exists y\, (0 < y)$, $\exists y\, (1 < y)$, ..., $\exists y\, (2+1 < y)$

Se $t = y+1$: è vero che $\exists y\, (y+1 < y)$?

Non per ogni termine t: $\models \forall x \exists y\, (x < y) \rightarrow \exists y\, (t < y)$

$A[t/x]$ non "dice" sempre di t quello che A dice di x:

$\exists y\, (x < y)$ "dice" che esiste un numero maggiore di x,
ma $\exists y\, (y+1 < y)$ non dice che esiste un numero maggiore di $y+1$.

Ci si deve assicurare che nessuna variabile in t venga "catturata" da un quantificatore in A

t è $\boxed{\text{sostituibile per } x \text{ in } A}$ sse nessuna occorrenza libera di x in A si trova nel campo d'azione di un quantificatore $\forall y$ o $\exists y$, dove y occorre in t

$f(y)$ è sostituibile per x in $\forall z P(z, x)$,
è sostituibile per x in $\forall x P(z, x)$,
non è sostituibile per x in $\forall y P(y, x)$,
non è sostituibile per x in $\exists y P(y, x)$

Se t è sostituibile per x in A, allora

$$\models \forall x A \rightarrow A[t/x]$$

$$\models A[t/x] \rightarrow \exists x A$$

Se t è un termine chiuso, o se $t = x$, allora t è sostituibile per x in A, quindi $\models \forall x A \rightarrow A[t/x]$

Quando scriviamo $A[t/x]$, intendiamo sempre che t è sostituibile per x in A

Sistema di inferenza hilbertiano

- Linguaggio del primo ordine con $\rightarrow$, $\neg$ e $\forall$
- Assiomi:
  1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
  2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
  3. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$
  4. $\forall x A \rightarrow A[t/x]$ se t è sostituibile per x in A
  5. $\forall x (A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x A \rightarrow \forall x B)$ se A non contiene x libera
- Regole di inferenza:
  1. MPP: $\dfrac{A \qquad A \rightarrow B}{B}$
  2. Generalizzazione $\dfrac{A}{\forall x A}$

Gli altri connettivi e $\exists$ sono simboli definiti

Teorie del primo ordine

Linguaggio del primo ordine

Sistema di inferenza :

- assiomi logici
- regole di inferenza
- **assiomi propri** (o non logici), che descrivono il dominio di interesse

Il sistema costituito dai soli assiomi logici e regole di inferenza è il

$$\boxed{\textbf{Calcolo dei Predicati del Primo Ordine}}$$

Esempi di teorie

- Teoria dei grafi non orientati
  $\mathcal{P} = \{R^2\}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
  Assioma proprio: $\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$
- Teoria degli ordini parziali
  $\mathcal{P} = \{<\}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$

  Assiomi propri: $\forall x \neg (x < x)$
  $\forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$
- Teorie con uguaglianza
  $= \in \mathcal{P}$

  Assiomi propri: $\forall x (x = x)$ (riflessivita')
  $\forall x \forall y (x = y \rightarrow (A \rightarrow A'))$
  dove A' si ottiene da A sostituendo alcune (non necessariamente tutte) occorrenze libere di x con y

  Sono derivabili:
  $\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$
  $\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$

- Teoria dei numeri

  $\mathcal{P} = \{=\}, \quad \mathcal{F} = \{succ, +, \times\}, \quad \mathcal{C} = \{0\}$

  Assiomi propri: assiomi per l'uguaglianza +

  $\forall x \neg(0 = succ(x))$

  $\forall x \forall y (succ(x) = succ(y) \rightarrow x = y)$

  $\forall x (x + 0 = x)$

  $\forall x \forall y (x + succ(y) = succ(x + y))$

  $\forall x (x \times 0 = 0)$

  $\forall x \forall y (x \times succ(y) = x + (x \times y))$

  $A[0/x] \wedge \forall x (A \rightarrow A[succ(x)/x]) \rightarrow \forall x A$

  (schema d'assiomi: principio di induzione matematica)

Proprietà della logica dei predicati

- **Semidecidibilità**

  Se $\mathcal{I}$ è un sistema di inferenza, in cui la proprietà di essere un assioma di $\mathcal{I}$ e la relazione di derivabilità mediante ciascuna regola di inferenza di $\mathcal{I}$ sono nozioni decidibili, e se il linguaggio è numerabile, allora la nozione di derivabilità in $\mathcal{I}$ è semidecidibile:

  $$\boxed{S \vdash_{\mathcal{I}} A \text{ è semidecidibile}}$$

  (l'insieme delle formule valide è ricorsivamente enumerabile)

- **Indecidibilità**

  Il calcolo dei predicati è **INDECIDIBILE**

  > Se $\mathcal{L}$ è un linguaggio con almeno una costante e un simbolo di predicato binario, allora l'insieme delle formule valide di $\mathcal{L}$ non è ricorsivo

  Casi di decidibilità:

  – calcolo monadico (i predicati sono tutti a un solo argomento)

  – formule puramente esistenziali:

  $$\exists x_1 ... \exists x_n A$$

  A senza quantificatori né simboli funzionali

  – formule puramente universali:

  $$\forall x_1 ... \forall x_n A$$

  A senza quantificatori né simboli funzionali

- **Compattezza**

  Se $S \models A$ allora esiste S_0 finito, $S_0 \subseteq S$, tale che $S_0 \models A$.

$$\begin{aligned} S \models A \Longrightarrow\ & S \vdash A \text{ (completezza)} \\ \Longrightarrow\ & S_0 \vdash A \text{ per un } S_0 \subseteq S \text{ finito} \\ \Longrightarrow\ & S_0 \models A \text{ (correttezza)} \end{aligned}$$

Equivalentemente:

Se ogni sottoinsieme finito di S è soddisfacibile, allora S è soddisfacibile

$$\begin{aligned} S \text{ insoddisfacibile } \Longrightarrow\ & S \models \bot \text{ (completezza)} \\ \Longrightarrow\ & S_0 \models \bot \text{ per un } S_0 \subseteq S \text{ finito} \\ \Longrightarrow\ & S_0 \text{ insoddisfacibile (correttezza)} \end{aligned}$$