LINGUAGGI PER LA RAPPRESENTAZIONE DELLA CONOSCENZA

Linguaggio formale: SINTASSI
SEMANTICA
\+ **Sistema di inferenza**

Sintassi: insieme delle espressioni ben formate (linguaggio)
Semantica: interpretazione $\mathcal{M}$ del linguaggio

Logiche

- Logica proposizionale: proposizioni + connettivi
- Logica del primo ordine (o Logica dei predicati):
  termini + predicati + connettivi + quantificatori
- Logica epistemica: operatori "l'agente sa che ...", "l'agente crede che ..."
- Logica temporale:
  operatori: "sarà sempre vero che ...", "in qualche momento futuro sarà vero che ...", "A è vero fino a che è vero B"

LOGICA

Si occupa della formalizzazione del ragionamento

FORMA DI UN RAGIONAMENTO:

1. SE c'è il sole,
   ALLORA fa caldo
2. c'è il sole

QUINDI: fa caldo

1. SE il compito è sufficiente,
   ALLORA sei esonerato dallo scritto
2. il compito è sufficiente

QUINDI: sei esonerato dallo scritto

Forma comune:

1. SE A, ALLORA B
2. A

QUINDI: B

$$\begin{array}{l} 1.\ A \rightarrow B \\ 2.\ A \\ \hline B \end{array}$$

LOGICA "SIMBOLICA": formalizzazione mediante simboli
LOGICA "MATEMATICA": studio della forma del ragionamento matematico

Studio della forma: Astrazione dal contenuto

ASTRARRE SIGNIFICA SEMPLIFICARE: sbarazzandosi dei dettagli, si guardano oggetti diversi da uno stesso punto di vista, e gli si può dare un trattamento uniforme

Logica e Informatica

1. **Ruolo esterno e teorico**:

   logica come meta-informatica

   Esempi:

   - nozione di calcolabilità
   - risultati di indecidibilità
   - classificazione dei problemi secondo la loro complessità

2. **Ruolo interno e pratico**:

   Esempi:

   - Fondamento di paradigmi di programmazione
     - programmazione logica (basata su metodi di dimostrazione automatica): il programmatore specifica CHE COSA si deve calcolare, senza occuparsi di COME
     - programmazione funzionale (basata sul lambda-calcolo)
   - Semantica di linguaggi di programmazione
   - Linguaggi di specifica formale
   - Specifica algebrica di tipi astratti di dati
   - Verifica di proprietà di programmi (correttezza, terminazione, ...), verifica dell'affidabilità di sistemi hardware e software
   - Linguaggio di rappresentazione e ragionamento in IA

Logica classica (proposizionale e dei predicati)

Rappresentazione di conoscenza **dichiarativa** e studio delle forme di ragionamento su questo tipo di conoscenza

1. SE c'è il sole,
   ALLORA fa caldo
2. c'è il sole

QUINDI: fa caldo

1. SE il compito è sufficiente,
   ALLORA sei esonerato dallo scritto
2. il compito è sufficiente

QUINDI: sei esonerato dallo scritto

Forma comune:

1. SE A, ALLORA B
2. A

QUINDI: B

$$\frac{A \rightarrow B \qquad A}{B}$$

1. Tutti i triangoli sono poligoni
2. $\overset{\triangle}{ABC}$ è un triangolo

QUINDI: $\overset{\triangle}{ABC}$ è un poligono

1. Tutti i pinguini sono mammiferi
2. Alberto è un pinguino

QUINDI: Alberto è un mammifero

Forma comune:

1. Tutti gli A sono B
2. l'oggetto c è un A

QUINDI: c è un B

$$\frac{\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \qquad A(c)}{B(c)}$$

Quando un ragionamento è corretto?

1. Tutti i ladri sono ricchi
2. B è ricco

QUINDI: B è un ladro

1. SE i controllori di volo scioperano, ALLORA prenderò il treno
2. O scioperano i controllori, oppure scioperano i piloti

QUINDI: prenderò il treno

1. SE i controllori di volo scioperano, ALLORA prenderò il treno
2. SE i piloti scioperano, ALLORA prenderò il treno
3. O scioperano i controllori, oppure scioperano i piloti

QUINDI: prenderò il treno

1. SE $\overset{\triangle}{ABC}$ è un triangolo equilatero, allora è un poligono regolare
2. SE $\overset{\triangle}{ABC}$ è un triangolo isoscele, allora è un poligono regolare
3. $\overset{\triangle}{ABC}$ è un triangolo equilatero oppure isoscele

---

QUINDI: $\overset{\triangle}{ABC}$ è un poligono regolare

1. Non esiste nessun numero naturale minore di zero

QUINDI: tutti i numeri naturali minori di zero sono dispari

Logica Classica

Elementi di base: **proposizioni** (o enunciati), che possono essere **VERE** o **FALSE**

Logica proposizionale: ogni enunciato è un ***atomo*** non ulteriormente analizzabile

"Caino è fratello di Abele" è rappresentato da un atomo $\Rightarrow$ p
"A ogni paziente piace qualche dottore" è rappresentato da un atomo $\Rightarrow$ q

Gli enunciati semplici (atomi o **variabili proposizionali**)
possono essere composti per formare enunciati complessi (**formule proposizionali**),
mediante operatori logici (**connettivi proposizionali**:
NOT, AND, OR, IF/THEN, IFF)

"Caino è fratello di Abele OPPURE a ogni paziente piace qualche dottore" $\Rightarrow$ $p \vee q$
"Caino NON è fratello di Abele" $\Rightarrow$ $\neg p$
"Caino è fratello di Abele E a ogni paziente piace qualche dottore" $\Rightarrow$ $p \wedge q$
"SE Caino è fratello di Abele, ALLORA a ogni paziente piace qualche dottore" $\Rightarrow$ $p \rightarrow q$
"Caino è fratello di Abele SE E SOLO SE a ogni paziente piace qualche dottore" $\Rightarrow$ $p \equiv q$

Ricorsivamente:
"SE Caino NON è fratello di Abele, ALLORA Caino è fratello di Abele OPPURE a ogni paziente piace qualche dottore" $\Rightarrow$ $\neg p \rightarrow (p \vee q)$

Logica Proposizionale Classica

La logica proposizionale studia il significato dei connettivi e le forme di ragionamento corretto rappresentabili mediante formule proposizionali

SINTASSI

La sintassi di un linguaggio determina quali sono le espressioni corrette del linguaggio.

Espressioni della logica proposizionale: formule

Un linguaggio proposizionale è costruito sulla base di un determinato insieme P di variabili proposizionali

$P = \{p, q, r\}$
$P' = \{p_0, p_1, p_2, ...\}$
$P'' = \{caino\_fratello\_di\_abele, pazienti\_dottori, ...\}$

Definizione induttiva dell'insieme delle formule proposizionali di un linguaggio basato su P

Dato un insieme P di variabili proposizionali, l'insieme delle formule proposizionali costruite sulla base di P, $Prop[P]$, è definito induttivamente:

1. ogni variabile proposizionale è una formula
2. $\top$ e $\bot$ sono formule
3. se A è una formula, allora anche $\neg A$ è una formula
4. se A e B sono formule, allora anche $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \equiv B)$ sono formule
5. nient'altro è una formula

1. $P \subseteq Prop[P]$
2. $\top \in Prop[P]$ e $\bot \in Prop[P]$
3. se $A \in Prop[P]$, allora $\neg A \in Prop[P]$
4. se $A \in Prop[P]$ e $B \in Prop[P]$, allora
   $(A \wedge B) \in Prop[P]$, $(A \vee B) \in Prop[P]$,
   $(A \rightarrow B) \in Prop[P]$ e $(A \equiv B) \in Prop[P]$
5. nient'altro è in $Prop[P]$

Esempio

Se $P = \{p, q, r, s\}$, sono in $Prop[P]$:

$p,\ q,\ r,\ s,\ \top,\ \bot,$
$\neg p,\ \neg q,\ \neg r,\ \neg s,\ \neg\top,\ \neg\bot,$
$(p \wedge q),\ (p \vee q),\ (q \rightarrow r),\ (r \equiv s),\ \ldots$
$\neg(p \wedge q),\ ((p \vee q) \equiv (q \rightarrow r)),\ ((q \rightarrow r) \vee \neg s),\ \ldots$
$(\neg(p \wedge q) \rightarrow ((p \vee q) \equiv (q \rightarrow r))),\ (((q \rightarrow r) \vee \neg s) \wedge \neg\top),\ \ldots$

Convenzioni sull'uso delle parentesi

- si possono omettere le parentesi esterne: $(p \wedge q)$ si può scrivere $p \wedge q$
- associatività: da sinistra a destra (se non indicato altrimenti dall'uso di parentesi)

$$((p \wedge q) \wedge r) \text{ si può scrivere } p \wedge q \wedge r$$
$$((p \rightarrow q) \rightarrow r) \text{ si può scrivere } p \rightarrow q \rightarrow r$$
$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \text{ NON si può scrivere } p \rightarrow q \rightarrow r$$

- precedenza dei connettivi: $\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \equiv$
  (se non indicato altrimenti dall'uso di parentesi)

$$(p \rightarrow (q \wedge r)) \text{ si può scrivere } p \rightarrow q \wedge r$$
$$\neg(p \rightarrow (q \wedge r)) \text{ si può scrivere } \neg(p \rightarrow q \wedge r)$$
$$\neg(p \rightarrow (q \wedge r)) \text{ NON si può scrivere } \neg p \rightarrow q \wedge r$$
$$(p \rightarrow (q \equiv r)) \text{ NON si può scrivere } p \rightarrow q \equiv r$$

Quindi:

$$s \rightarrow p \wedge q \vee \neg r \quad \text{abbrevia} \quad (s \rightarrow ((p \wedge q) \vee \neg r))$$
$$p \rightarrow (p \rightarrow r \wedge q) \quad \text{abbrevia} \quad (p \rightarrow (p \rightarrow (r \wedge q)))$$
$$p \equiv \neg q \equiv r \vee s \quad \text{abbrevia} \quad ((p \equiv \neg q) \equiv (r \vee s))$$
$$p \wedge q \rightarrow r \text{ è diverso da } p \wedge (q \rightarrow r)$$

Semantica

$$\boxed{\text{Linguaggio}} \Longrightarrow \boxed{\text{Dominio}}$$

$$\boxed{\text{Prop[P]}} \Longrightarrow \boxed{Bool = \{T, F\}}$$

Correttezza dei ragionamenti

Un ragionamento è corretto se ogni volta che le premesse sono vere, è vera anche la conclusione

La semantica della logica proposizionale stabilisce il significato dei connettivi logici.

Il significato delle variabili proposizionali può variare (possono essere interpretate in modi diversi).

Qual è il significato di $p \wedge q$? Dipende dal significato di p e q:
se p è vero e q è vero, allora $p \wedge q$ è vero, altrimenti è falso.

Interpretazione di un linguaggio: determina come interpretare le variabili proposizionali

Interpretazione di P

$\mathcal{M}$: assegnazione di un booleano (valore di verità) a ogni variabile in P

$$\mathcal{M} : \; P \longrightarrow Bool \quad .$$

Esempio:
se $P = \{p, q, r\}$, ci sono 8 possibili interpretazioni di P:

	p	q	r
$\mathcal{M}_1$	T	T	T
$\mathcal{M}_2$	T	T	F
$\mathcal{M}_3$	T	F	T
$\mathcal{M}_4$	T	F	F

	p	q	r
$\mathcal{M}_5$	F	T	T
$\mathcal{M}_6$	F	T	F
$\mathcal{M}_7$	F	F	T
$\mathcal{M}_8$	F	F	F

Interpretazione di una formula F: interpretazione del linguaggio di F (l'insieme delle variabili proposizionali che occorrono in F).

Semantica dei connettivi logici

$$\boxed{\{\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \equiv\}} \implies \boxed{\text{Funzioni booleane}}$$

	NOT
T	F
F	T

		AND	OR	IMP	IFF
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

$$\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
\neg & \Longrightarrow & NOT & \wedge & \Longrightarrow & AND \\
\vee & \Longrightarrow & OR & \rightarrow & \Longrightarrow & IMP \\
\equiv & \Longrightarrow & IFF & & &
\end{array}$$

Definizione induttiva del "significato" delle formule in una interpretazione

$\mathcal{M} \models A$: A è **vera** in $\mathcal{M}$

Se $\mathcal{M} : \ P \longrightarrow Bool$, definiamo $\mathcal{M} \models A$ per induzione su A:

1. $\mathcal{M} \models p$ sse $\mathcal{M}(p) = T$, se $p \in P$;
2. $\mathcal{M} \models \top$ e $\mathcal{M} \not\models \bot$;
3. $\mathcal{M} \models \neg A$ sse $\mathcal{M} \not\models A$
4. $\mathcal{M} \models A \wedge B$ sse $\mathcal{M} \models A$ e $\mathcal{M} \models B$
5. $\mathcal{M} \models A \vee B$ sse $\mathcal{M} \models A$ oppure $\mathcal{M} \models B$
6. $\mathcal{M} \models A {\rightarrow} B$ sse $\mathcal{M} \not\models A$ oppure $\mathcal{M} \models B$
7. $\mathcal{M} \models A \equiv B$ sse $\mathcal{M} \models A$ e $\mathcal{M} \models B$, oppure $\mathcal{M} \not\models A$ e $\mathcal{M} \not\models B$

Valore di verità di una formula in una interpretazione

$\overline{\mathcal{M}}(A) = T$ sse $\mathcal{M} \models A$:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \equiv B$
T	T	F	T	T	T	T
T	F		F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F		F	F	T	T

Calcolo di $\overline{\mathcal{M}}(A)$: esempio

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(\neg p \vee q) \rightarrow r$
T	T	F	F	T	F

Tavola di verità di una formula: calcolo del suo valore in ogni interpretazione

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(\neg p \vee q) \rightarrow r$
T	T	T	F	T	T
F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T
T	T	F	F	T	F
F	T	F	T	T	F
T	F	F	F	F	T
F	F	F	T	T	F

Vedere anche il programma **truthtable**, accessibile dalla pagina del corso

www.dia.uniroma3.it/∼cialdea/ocaml/logica/truthtable/

```
> truthtable -help
Uso: truthtable [-o <output-file>] <input-file>
  -o nome del file di output
  -help   Display this list of options
```

Il file `formula` contiene il testo `p -> q & r .`

```
> truthtable formula
p | q | r || (p->(q&r))
T | T | T ||   T
T | T | F ||   F
T | F | T ||   F
T | F | F ||   F
F | T | T ||   T
F | T | F ||   T
F | F | T ||   T
F | F | F ||   T

CNF: ((-pvq)&(-pvr))
DNF: (-pv(q&r))
```

Logica e linguaggio naturale

- La negazione inverte il valore di verità del suo argomento
- Una congiunzione ($\wedge$) è vera se e solo se entrambi gli argomenti sono veri
- Una doppia implicazione ($\equiv$) è vera se e solo se i due argomenti hanno lo stesso valore di verità: IFF è l'uguaglianza sui booleani
  "sarai promosso (p) *se e solo se* avrai scritto almeno 125 programmi corretti (c)": $p \equiv c$
  "*condizione necessaria e sufficiente* per passare l'esame (p) è studiare (s) e avere fortuna (f)": $p \equiv (s \wedge f)$
- La disgiunzione ($\vee$) è l'OR inclusivo

p	q	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \equiv q$	$\neg(p \equiv q)$
T	T	T	F	T	F
T	F	T	T	F	T
F	T	T	T	F	T
F	F	F	F	T	F

"Andrò al cinema (c) o al teatro (t): $\neg(c \equiv t)$
"`xs=[]` (p) oppure `ys=[]` (q)": $p \vee q$

Implicazione

- L'implicazione ($\rightarrow$) è l'*implicazione materiale*:

  $A \rightarrow B$ è falsa se e solo se A è vera e B è falsa

  Se A è falsa: $A \rightarrow B$ è vera
  se B è vera: $A \rightarrow B$ è vera

- "Se x è una potenza di 2 maggiore di 1, allora x è pari" è vero sempre (per ogni x):

  anche se $x = 10$
  anche se $x = 7$

Antonio dice "se piove, vengo a prenderti alla stazione"

1. Piove, e A. va alla stazione: ha detto la verità?
2. Piove, e A. non va alla stazione: ha detto la verità?
3. Non piove, e Antonio va lo stesso: ha detto la verità?
4. Non piove, e A. non va alla stazione: ha detto la verità?

Modelli, contromodelli, formule soddisfacibili

- Una interpretazione $\mathcal{M}$ è un **modello** di F (o *soddisfa* F) sse $\mathcal{M} \models F$.

  Esempio: $A = (p \rightarrow q) \vee q$. Se $\mathcal{M}(p) = F$ e $\mathcal{M}(q) = F$, allora $\mathcal{M}$ è un modello di A.

- Una interpretazione $\mathcal{M}$ è un **contromodello** di F sse $\mathcal{M} \not\models F$.

  Esempio: se $\mathcal{M}'(p) = T$ e $\mathcal{M}'(q) = F$, $\mathcal{M}'$ è un contromodello di A.

- F è **soddisfacibile** sse esiste un modello di F.

  Esempio: poiché esiste un modello di A ($\mathcal{M}$ tale che $\mathcal{M}(p) = F$ e $\mathcal{M}(q) = F$), A è soddisfacibile.

Formule logicamente valide

- F è **logicamente valida** o è una **tautologia** ($\models F$) se e solo se per ogni interpretazione $\mathcal{M}$ di F, $\mathcal{M} \models F$; cioè se non esistono contromodelli di F

  Esempi:

  $A = (p \rightarrow q) \vee q$ è soddisfacibile, ma non è valida: esiste anche un contromodello di A.

  $p \rightarrow (p \vee q)$ è una tautologia:

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

Alcune tautologie

(dimostrarle per esercizio)

1. $A \rightarrow A$ (identità)
2. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (affermazione del conseguente)
3. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ (negazione dell'antecedente)
4. $\bot \rightarrow B$ (*ex falso quodlibet*)
5. $A \vee \neg A$ (terzo escluso)
6. $\neg(A \wedge \neg A)$ (non contraddizione)
7. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$ (riduzione all'assurdo)
8. $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ (legge di Pierce)

Esempio: per dimostrare che la legge di Pierce è una tautologia, possiamo costruirne la tavola di verità e verificare che è vera in ogni interpretazione:

```
> truthtable pierce
B | A || (((A->B)->A)->A)
T | T ||   T
T | F ||   T
F | T ||   T
F | F ||   T

CNF: T
DNF: T
```

Oppure possiamo ragionare come segue:

Sia $\mathcal{M}$ una qualsiasi interpretazione: dimostriamo che se $\mathcal{M} \models (A \rightarrow B) \rightarrow A$ allora $\mathcal{M} \models A$. Supponiamo dunque $\mathcal{M} \models (A \rightarrow B) \rightarrow A$: si hanno due possibilità:

– $\mathcal{M} \not\models A \rightarrow B$, quindi in particolare $\mathcal{M} \models A$.

– $\mathcal{M} \models A$.

In entrambi i casi $\mathcal{M} \models A$.

Formule contraddittorie

- F è una **contraddizione** (o è insoddisfacibile) se e solo se per ogni interpretazione $\mathcal{M}$ di F, $\mathcal{M} \not\models F$; cioè se non esistono modelli di F

  Esempio: $\neg(p \rightarrow (p \vee q))$

- A è una tautologia se e solo se $\neg A$ è una contraddizione
- A è una contraddizione se e solo se $\neg A$ è una tautologia
- A è una contraddizione se e solo se A non è soddisfacibile

Equivalenza logica

A e B sono logicamente equivalenti ($A \leftrightarrow B$) sse

$$\models A \equiv B$$

cioè se per ogni interpretazione $\mathcal{M}$ di A e B:

$$\mathcal{M} \models A \text{ sse } \mathcal{M} \models B$$

Alcune equivalenze logiche importanti:

1. $A \wedge \neg A \leftrightarrow \bot$
2. Commutatività e associatività di $\wedge$ e $\vee$:

$$\begin{aligned} A \wedge B &\leftrightarrow B \wedge A, \\ A \vee B &\leftrightarrow B \vee A, \\ A \wedge (B \wedge C) &\leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C, \\ A \vee (B \vee C) &\leftrightarrow (A \vee B) \vee C \end{aligned}$$

3. Leggi distributive:

$$\begin{aligned} (A \vee (B \wedge C)) &\leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \\ (A \wedge (B \vee C)) &\leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \end{aligned}$$

4. Leggi di De Morgan:

$$\begin{array}{rcl} \neg(A \vee B) & \leftrightarrow & (\neg A \wedge \neg B) \\ \neg(A \wedge B) & \leftrightarrow & (\neg A \vee \neg B) \end{array}$$

5. Doppia negazione: $A \leftrightarrow \neg\neg A$

6. Leggi di assorbimento:

$$\begin{array}{rcl} A \vee (A \wedge B) & \leftrightarrow & A \\ A \wedge (A \vee B) & \leftrightarrow & A \end{array}$$

7. Definibilità di $\equiv$:

$$A \equiv B \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

8. Interdefinibilità dei connettivi logici $\rightarrow, \wedge, \vee$:

$$\begin{array}{c} A \rightarrow B \leftrightarrow \neg A \vee B \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B) \\ \neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg(\neg A \vee B) \leftrightarrow A \wedge \neg B \\ A \wedge B \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B) \leftrightarrow \neg(A \rightarrow \neg B) \\ A \vee B \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg A \rightarrow B \end{array}$$

9. Contrapposizione:

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

Esercizio: dimostrare le equivalenze logiche precedenti

Forme Normali Congiuntive (FNC) e Disgiuntive (FND)

LETTERALE: atomo (p) o negazione di un atomo ($\neg p$)

Una formula è in FNC sse ha la forma

$$D_1 \wedge \ldots \wedge D_k$$

dove ogni D_i è una disgiunzione di letterali

$$\boxed{\text{Ogni formula è logicamente equivalente a una formula in FNC}}$$

Una formula è in FND sse ha la forma

$$C_1 \vee \ldots \vee C_k$$

dove ogni C_i è una congiunzione di letterali

$$\boxed{\text{Ogni formula è logicamente equivalente a una formula in FND}}$$

Esempio: trasformazione in FNC di

$$\neg(\neg(p \vee \neg q) \rightarrow \neg(q \vee (r \wedge (s \rightarrow p))))$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \neg(p \vee \neg q) \wedge \neg\neg(q \vee (r \wedge (\neg s \vee p))) \\
\Rightarrow \quad & \neg(p \vee \neg q) \wedge (q \vee (r \wedge (\neg s \vee p))) \\
\Rightarrow \quad & (\neg p \wedge \neg\neg q) \wedge (q \vee (r \wedge (\neg s \vee p))) \\
\Rightarrow \quad & (\neg p \wedge q) \wedge (q \vee (r \wedge (\neg s \vee p))) \\
\Rightarrow \quad & (\neg p \wedge q) \wedge ((q \vee r) \wedge (q \vee (\neg s \vee p))) \\
& \neg p \wedge q \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee \neg s \vee p)
\end{aligned}$$

Esercizio: Trovare forme normali congiuntive e disgiuntive logicamente equivalenti a

1. $(A \rightarrow B) \vee (\neg A \wedge C)$
2. $A \equiv (B \wedge \neg A)$

Vedere anche il programma **truthtable**, accessibile dalla pagina del corso

Trasformazione di formule in forma normale congiuntiva

1. Eliminare le implicazioni e le doppie implicazioni

$$A \rightarrow B \;\leftrightarrow\; \neg A \vee B$$

$$\neg(A \rightarrow B) \;\leftrightarrow\; A \wedge \neg B$$

$$A \equiv B \;\leftrightarrow\; (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$$

$$\neg(A \equiv B) \;\leftrightarrow\; (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$$

2. Portare le negazioni sugli atomi

$$\neg(A \vee B) \;\leftrightarrow\; \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \;\leftrightarrow\; \neg A \vee \neg B$$

$$\neg\neg A \;\leftrightarrow\; A$$

3. Distribuire $\vee$ su $\wedge$

$$(A \wedge B) \vee C \;\leftrightarrow\; (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$C \vee (A \wedge B) \;\leftrightarrow\; (C \vee A) \wedge (C \vee B)$$

Algoritmo per la trasformazione in CNF

1. Eliminare le implicazioni e le doppie implicazioni e portare le negazioni sugli atomi (trasformare A in *forma normale negativa* – NNF)
2. Ricorsivamente:
   - se A ha la forma $B \vee C$:
     distribuire l'or più esterno su tutte le congiunzioni nella formula $CNF(B) \vee CNF(C)$
   - se A ha la forma $B \wedge C$:
     il risultato è $CNF(B) \wedge CNF(C)$
   - altrimenti (A è un letterale) il risultato è A
3. Eventualmente, semplificare la formula ottenuta

Esercizi

Per ciascuno dei seguenti enunciati: a) determinare un linguaggio per esprimerlo, b) scrivere una formula proposizionale che lo rappresenti, c) determinare un modello e un contromodello.

1. Condizione necessaria per passare l'esame è studiare o avere fortuna.
2. Condizione sufficiente perché faccia caldo è che sia estate e non piova
3. Se nevica, diventa più freddo
4. Solo se colpisci il vetro con un martello lo romperai
5. Condizione necessaria e sufficiente perché $A\overset{\triangle}{B}C$ sia un triangolo isoscele è che abbia esattamente tre lati e che abbia almeno due angoli uguali.
6. È falso che la lista `xs` è vuota oppure il valore di `found` è `true`
7. La lista `xs` non è vuota e il valore di `found` è `false`
8. Prendo il libro e arrivo
9. Arrivo e prendo il libro
10. Puoi andare al cinema o alla festa, ma non puoi fare tutte e due le cose
11. Per dare l'esame, devi studiare
12. Tutti i corvi sono neri
13. Qualcuno è colpevole

Formule e funzioni booleane

I connettivi che abbiamo introdotto sono sufficienti a esprimere tutte le possibili funzioni booleane?

Ogni formula A determina una funzione booleana f_A

Sia $A[p_1, ...p_k]$ una formula con k lettere proposizionali.

A corrisponde a una funzione booleana a k argomenti: per ogni possibile assegnazione $\mathcal{M}$:

$$f_A(\mathcal{M}(p_1), ..., \mathcal{M}(p_k)) = \overline{\mathcal{M}}(A)$$

Esempio: $A = p \vee \neg q$

$$f_A \text{ è tale che: } \begin{cases} f_A(T,T) = T & f_A(F,T) = F \\ f_A(T,F) = T & f_A(F,F) = T \end{cases}$$

Se $\models A \equiv B$, allora $f_A = f_B$

Ogni funzione booleana è determinata da qualche formula

Ogni funzione booleana a k argomenti corrisponde a una formula proposizionale (o a una classe di equivalenza di fbf):

Per ogni funzione booleana f esiste una formula A tale che $f_A = f$

Adeguatezza dei connettivi

Se $f : Bool^k \rightarrow Bool$,

allora esiste $A_f \in Prop[p_1, ..., p_k]$ tale che per ogni assegnazione $\mathcal{M} : \{p_1, ..., p_k\} \rightarrow Bool$:

$$\overline{\mathcal{M}}(A_f) = f(\mathcal{M}(p_1), ..., \mathcal{M}(p_k))$$

A_f si può costruire utilizzando soltanto $\vee, \wedge, \neg$:

$$\boxed{\{\vee, \wedge, \neg\} \text{ è un } \textbf{insieme adeguato} \text{ di connettivi}}$$

Esempio di costruzione di A_f:

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$		$A[p_1, p_2]$
T	T	F		
T	F	T	$\Longrightarrow$	$(p_1 \wedge \neg p_2) \vee$
F	T	T	$\Longrightarrow$	$(\neg p_1 \wedge p_2) \vee$
F	F	T	$\Longrightarrow$	$(\neg p_1 \wedge \neg p_2)$

(forma normale disgiuntiva)

Esercizio: Definire una qualsiasi funzione booleana a 3 argomenti, descrivendone i valori in forma di tabella, e determinare una formula con tre lettere proposizionali che la rappresenta.

Due connettivi particolari

Esistono connettivi che da soli sono sufficienti ad esprimere tutte le funzioni booleane:

- Il **tratto di Sheffer** (o negazione alternativa) è il connettivo con la seguente tavola di verità:

A	B	$A \mid B$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

$\{\mid\}$ è un insieme adeguato di connettivi. Infatti

$$\begin{aligned} \neg A &\leftrightarrow A \mid A \\ A \vee B &\leftrightarrow ((A \mid A) \mid (B \mid B)) \end{aligned}$$

(verificarlo per esercizio)

- La **negazione congiunta**, la cui tavola di verità è:

A	B	$A \downarrow B$
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

costituisce un insieme adeguato di connettivi. Infatti

$$\begin{aligned} \neg A &\leftrightarrow A \downarrow A \\ A \wedge B &\leftrightarrow ((A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)) \end{aligned}$$

(verificarlo per esercizio)

Conseguenza logica

- $\mathcal{M}$ è un modello di un insieme di formule S sse è un modello di ciascuna formula in S

- A è una **conseguenza logica** di un insieme di formule S

$$S \models A$$

sse ogni modello di S è un modello di A

$$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r \models r$$

Infatti: sia $\mathcal{M}$ una qualsiasi interpretazione tale che:

1. $\mathcal{M} \models p \vee q$
2. $\mathcal{M} \models p \rightarrow r$
3. $\mathcal{M} \models q \rightarrow r$

Per 1, $\mathcal{M}(p) = T$ oppure $\mathcal{M}(q) = T$.
Nel primo caso, $\mathcal{M}(r) = T$ (per 2)
Nel secondo caso $\mathcal{M}(r) = T$ (per 3)
Quindi, in ogni caso, $\mathcal{M}(r) = T$.

$$p, q \rightarrow p \not\models q$$

Infatti, se $\mathcal{M}(p) = T$ e $\mathcal{M}(q) = F$: $\mathcal{M} \models p$, $\mathcal{M} \models q \rightarrow p$, ma $\mathcal{M} \not\models q$.

Ragionamenti corretti

Un ragionamento che dalle ipotesi S conclude A è corretto sse $S \models A$.

Per verificare se $A_1, ..., A_n \models B$ si può:

- Fare la tavola di verità per $A_1 \wedge .... \wedge A_n \rightarrow B$ e controllare se è una tautologia
- Cercare un contromodello per $A_1 \wedge .... \wedge A_n \rightarrow B$: se la ricerca (sistematica) fallisce, allora $A_1, ..., A_n \models B$
- *Dimostrare* B a partire da $A_1, ..., A_n$, utilizzando un insieme di "regole di ragionamento" corrette
- Implementare un metodo di dimostrazione automatica ed eseguire il programma sul problema $A_1, ..., A_n \models B$

Per dimostrare che $A_1, ..., A_n \not\models B$ c'è un unico metodo: trovare un'interpretazione $\mathcal{M}$ tale che $\mathcal{M} \models \{A_1, ..., A_n\}$ e $\mathcal{M} \not\models B$.

Uso delle tavole di verità. Cavalieri e furfanti

A dice: "Io sono un furfante oppure B è un cavaliere". Cosa sono A e B?

$$A = \text{"A è un cavaliere"} \qquad\qquad B = \text{"B è un cavaliere"}$$

Descrizione del problema:

1. $A \rightarrow (\neg A \vee B)$
2. $\neg A \rightarrow \neg(\neg A \vee B)$

Con le tavole di verità possiamo determinare quali sono le interpretazioni di A e B in cui le due formule 1 e 2 sono entrambe vere, e rispondere dunque alla domanda "cosa sono A e B?":

A	B	$A \rightarrow (\neg A \vee B)$	$\neg A \rightarrow \neg(\neg A \vee B)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	F

Quindi l'unica interpetazione in cui 1 e 2 sono entrambe vere è quella in cui A e B sono entrambe vere: A e B sono entrambi cavalieri.

In altri termini:

$$A \rightarrow (\neg A \vee B), \neg A \rightarrow \neg(\neg A \vee B) \models A$$

$$A \rightarrow (\neg A \vee B), \neg A \rightarrow \neg(\neg A \vee B) \models B$$

Ragionamento per assurdo: ricerca di un contromodello

A dice: "Io sono un furfante oppure B è un cavaliere". Cosa sono A e B?

1. $A \rightarrow (\neg A \vee B)$
2. $\neg A \rightarrow \neg(\neg A \vee B)$

Il problema è quello di determinare se A oppure $\neg A$ è una conseguenza logica di 1 e 2, e se B oppure $\neg B$ è una conseguenza logica di 1 e 2.

Per determinare se A è una conseguenza logica di 1 e 2:

tutti i modelli di 1 e 2 sono modelli di A.

Sia $\mathcal{M}$ una qualunque interpretazione che rende vere 1 e 2 e supponiamo (per assurdo) che $\mathcal{M} \not\models A$.

$$
\begin{array}{lll}
\Rightarrow & \mathcal{M} \models \neg A & \text{def. di } \neg \\
\Rightarrow & \mathcal{M} \models \neg(\neg A \vee B) & \text{2 e def. di } \rightarrow \\
\Rightarrow & \mathcal{M} \not\models \neg A \vee B & \\
\Rightarrow & \mathcal{M} \not\models \neg A & \text{def. di } \vee \\
\Rightarrow & \mathcal{M} \models A & \\
\Rightarrow & \text{contraddizione} &
\end{array}
$$

Quindi $\mathcal{M} \not\models A$ è assurdo e deve essere $\mathcal{M} \models A$.

Esercizio. Determinare con lo stesso metodo che B è una conseguenza logica di 1 e 2.

Ragionamento per assurdo

È stato compiuto un furto. I ladri sono fuggiti con un furgone. Sono implicati tre uomini: A, B, C. Si sa che C non lavora mai senza la complicità di A e B non sa guidare. A è colpevole?

Linguaggio: A (A è colpevole), B, C

Ipotesi: $S = \{A \vee B \vee C,\ C \rightarrow A,\ B \rightarrow (A \vee C)\}$
Tesi: A

Controllare se $A \vee B \vee C,\ C \rightarrow A,\ B \rightarrow (A \vee C) \models A$

Per assurdo:
Assumiamo che esista $\mathcal{M}$ tale che:
1. $\mathcal{M} \models A \vee B \vee C$
2. $\mathcal{M} \models C \rightarrow A$
3. $\mathcal{M} \models B \rightarrow (A \vee C)$
4. $\mathcal{M} \not\models A$, cioè $\mathcal{M}(A) = F$

Quindi:

$\mathcal{M} \not\models C$, altrimenti 2 sarebbe falso
$\mathcal{M} \not\models A \vee C$
$\mathcal{M} \not\models B$, altrimenti 3 sarebbe falso

Ma allora anche 1 è falso: assurdo

Ragionamento diretto

Per ogni interpretazione $\mathcal{M}$, se $\mathcal{M} \models S$, allora
$\mathcal{M} \models A$

Ragionamento per casi

$$A \vee B \vee C,\ C \rightarrow A,\ B \rightarrow (A \vee C) \models A$$

Sia $\mathcal{M}$ qualsiasi interpretazione tale che $\mathcal{M} \models S$:
poiché $\mathcal{M} \models A \vee B \vee C$, o $\mathcal{M} \models A$, oppure $\mathcal{M} \models B$, oppure $\mathcal{M} \models C$. Mostriamo che in tutti e tre i casi $\mathcal{M} \models A$:

a) se $\mathcal{M} \models A$, allora $\mathcal{M} \models A$

b) se $\mathcal{M} \models B$, allora $\mathcal{M} \models A \vee C$ (da 3):

   b1) se $\mathcal{M} \models A$, allora $\mathcal{M} \models A$

   b2) se $\mathcal{M} \models C$ allora $\mathcal{M} \models A$, per 2

   quindi nel caso b) $\mathcal{M} \models A$

c) se $\mathcal{M} \models C$, allora $\mathcal{M} \models A$, per 2

Una logica Λ è definita da:

- Sintassi
  - Alfabeto $\mathcal{A}$ (insieme non vuoto di simboli)
  - Linguaggio $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}^*$ (formule ben formate: fbf)
    Spesso definito induttivamente
    $\Rightarrow$ principio di induzione strutturale sulle fbf
    $\Rightarrow$ ricorsione sulle fbf

- Semantica
- **Apparato deduttivo (sistema di inferenza)**
  - **Assiomi** $Ax \subseteq \mathcal{L}$
  - **Regole di inferenza** $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, ...\}$, con $R_i \subseteq \mathcal{L}^{n_i}$
    (relazioni su fbf)

$$\frac{A_1, ..., A_{n_{i-1}}}{A_n}$$

Se Ax e $\mathcal{R}$ sono decidibili: teoria assiomatica

Sistema di inferenza hilbertiano per la logica proposizionale

- Linguaggio proposizionale con $\rightarrow$ e $\neg$
- Assiomi:

A1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

A3. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$

- Regola di inferenza: $\dfrac{A \qquad A \rightarrow B}{B}$ (MPP)

Se $\dfrac{A_1, ..., A_n}{A}$ è una regola di inferenza $\mathcal{R}$, allora A deriva da $A_1, ..., A_n$ mediante $\mathcal{R}$.

Derivazioni e dimostrazioni

Derivazione di A da S: sequenza $A_1, ..., A_n$ di formule tale che $A_n = A$ e per ogni i:

- A_i è un assioma, oppure
- $A_i \in S$, oppure
- A_i deriva da formule precedenti mediante una regola di inferenza

Se esiste una derivazione di A da S allora A è derivabile da S:

$$S \vdash A$$

Una derivazione di A da $\emptyset$ è una **dimostrazione** di A.
Se esiste una dimostrazione di A:

$$\vdash A$$

allora A è dimostrabile (o è un **teorema**)

Esempio: $\vdash_H p \rightarrow p$

1.	$(p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p))$	*Assioma A2*
2.	$p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p)$	*Assioma A1*
3.	$(p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p)$	$MPP(1,2)$
4.	$p \rightarrow (p \rightarrow p)$	*Assioma A1*
5.	$p \rightarrow p$	$MPP(3,4)$

Sostituibilità nelle derivazioni:

Se $S \vdash A$ allora $S[B/p] \vdash A[B/p]$

Semantica di una logica Λ

1. Interpretazione del linguaggio $\mathcal{M}$
   - Dominio di interpretazione D
   - Funzione di interpretazione $\mathcal{L} \longrightarrow D$
2. Nozione di verità in una interpretazione $\mathcal{M} \models A$

Validità $\boxed{\models A}$: per ogni $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models A$

Soddisfacibilità: esiste $\mathcal{M}$, tale che $\mathcal{M} \models A$

Conseguenza logica $\boxed{S \models A}$: per ogni $\mathcal{M}$, se $\mathcal{M} \models G$ per ogni G in S, allora $\mathcal{M} \models A$

Corrispondenza tra apparato deduttivo e semantica

$$S \models A \quad \text{sse} \quad S \vdash A$$

$$\models A \quad \text{sse} \quad \vdash A \qquad \text{(debole)}$$

Il sistema Hilbertiano è corretto e completo rispetto alla semantica della logica proposizionale:

- Se $S \vdash A$ allora $S \models A$: **correttezza**
- Se $S \models A$ allora $S \vdash A$: **completezza**

Proprietà della derivabilità

- Se $S \subseteq S'$ e $S \vdash A$, allora $S' \vdash A$ (**monotonicità**)
- $S \vdash A$ sse esiste un sottoinsieme finito S' di S tale che $S' \vdash A$ (**compattezza**)
- Se $S' \vdash A$ e per ogni $B \in S'$, $S \vdash B$, allora $S \vdash A$ (**taglio**)
- Una teoria assiomatica è **semidecidibile**

Possibili proprietà di $S \models A$

- Se $S \subseteq S'$ e $S \models A$, allora $S' \models A$ (monotonicità)
- $S \models A$ sse esiste un sottoinsieme finito S' di S tale che $S' \models A$ (compattezza)
- se $S' \models A$ e per ogni $B \in S'$, $S \models B$, allora $S \models A$ (taglio)
- L'insieme delle formule valide è ricorsivo (decidibilità)
- L'insieme delle formule valide è ricorsivamente enumerabile (semidecidibilità)

Chiusura deduttiva di S: $\mathcal{T}(S) = \{A \mid S \vdash A\}$

$\mathcal{T}(S)$ è anche chiamata la **teoria** di S e le formule di S sono gli *assiomi* della teoria

Limiti di un sistema deduttivo

Esistono

- logiche non monotone

  $elefante(pippo) \models grigio(pippo)$

  $elefante(pippo), albino(pippo) \not\models grigio(pippo)$

- logiche non compatte

  PA teoria dell'aritmetica del secondo ordine:

  $PA \models A$ sse A è vera nell'interpretazione standard su $\mathbb{N}$

  $$PA, q(0), q(1), q(2), ... \models \forall x q(x)$$

  ma $\forall x q(x)$ non è conseguenza logica di alcun sottoinsieme finito di $PA \cup \{q(0), q(1), q(2), ...\}$

- logiche in cui non vale il taglio
- logiche non decidibili (logica dei predicati)
- logiche non semidecidibili