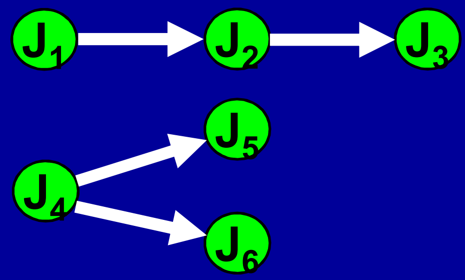
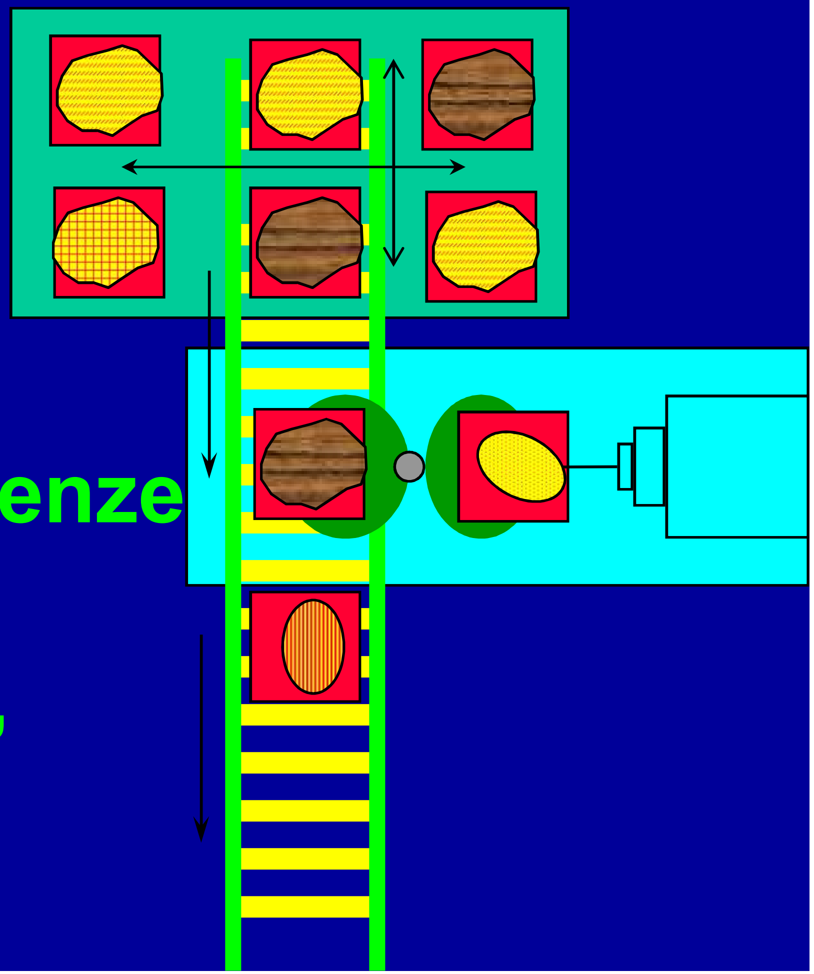
3.3 Lavori con precedenza: algoritmo di Lawler per minimizzare la massima penalità

Sequenziamento delle operazioni con precedenze



magazzino con movimentazione interna



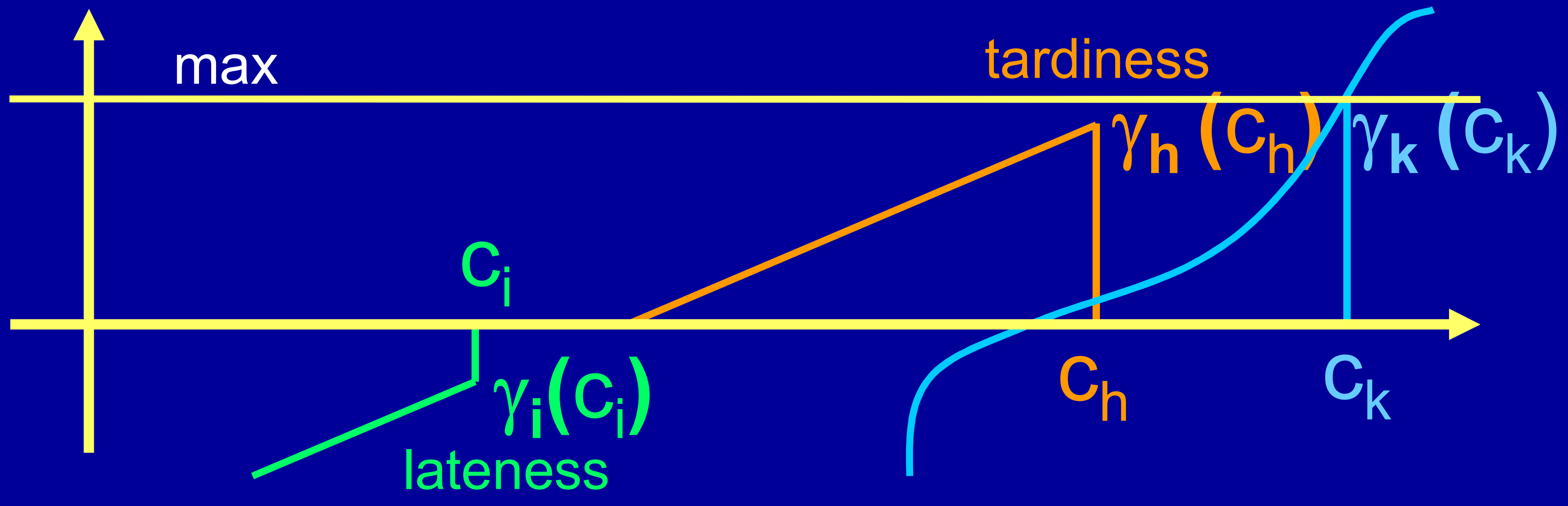
Ci possono essere precedenze fra i lavori da compiere rappresentate da un grafo, anche non connesso

Algoritmo di Lawler (1973)

$$\min_{S} \max^{*}_{i=1,\dots,n} \gamma_i (c_i)$$

γ_i **funzione non decrescente**

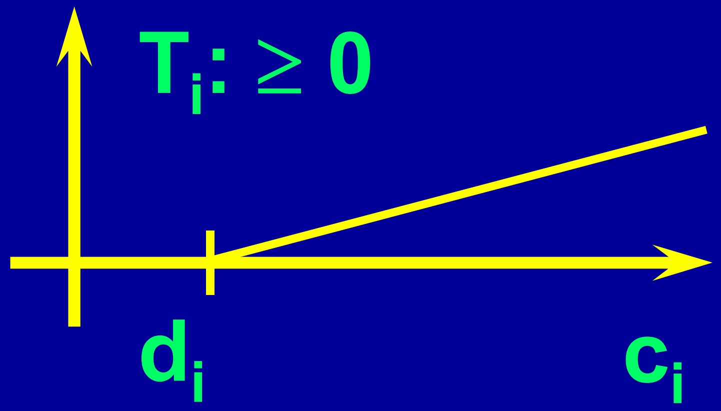
* misura regolare: non decresce con c_i



T_i: “tardiness”, fuori tempo

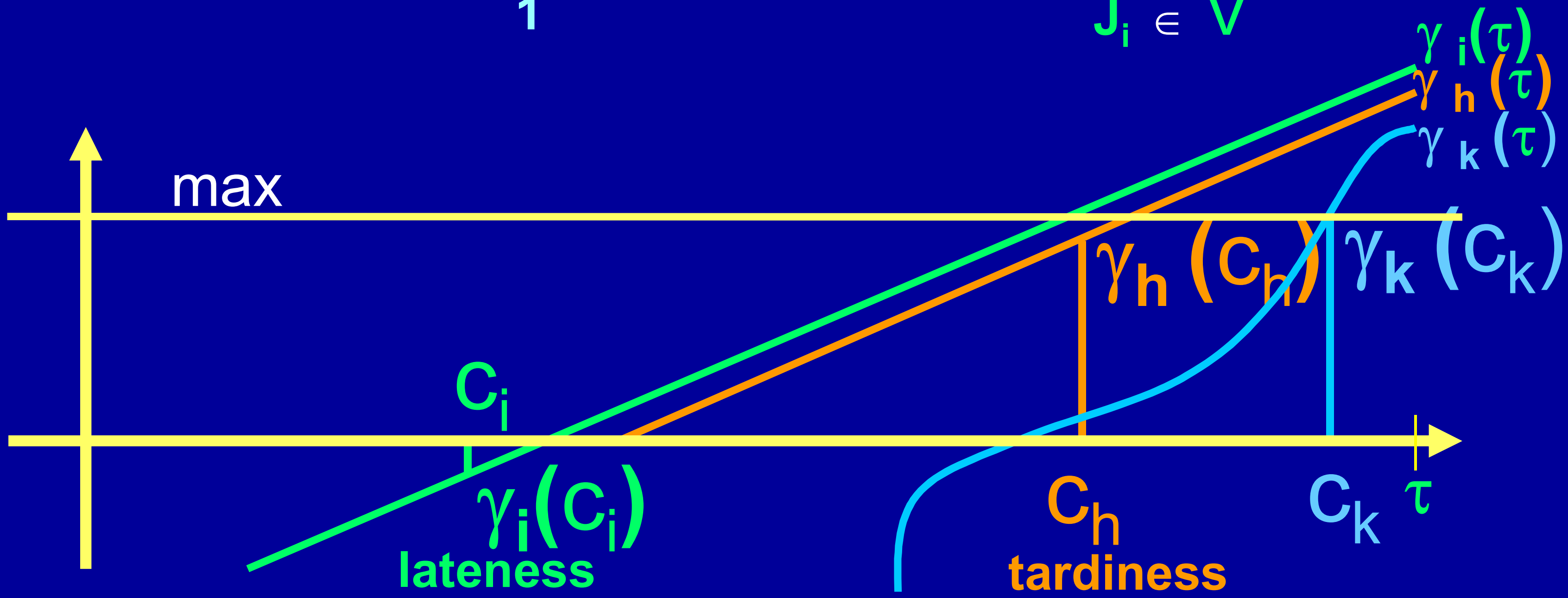
(L_i: “lateness”, ritardo che negativo diventa anticipo)

$T_i := \mathrm{Max}\ (0, c_i - d_i)$



V: insieme dei lavori senza successori nel grafo delle precedenze

$$\tau := \sum_{1}^{n} p_i \qquad k: \gamma_k(\tau) = \min_{J_i \in V} \gamma_i(\tau)$$

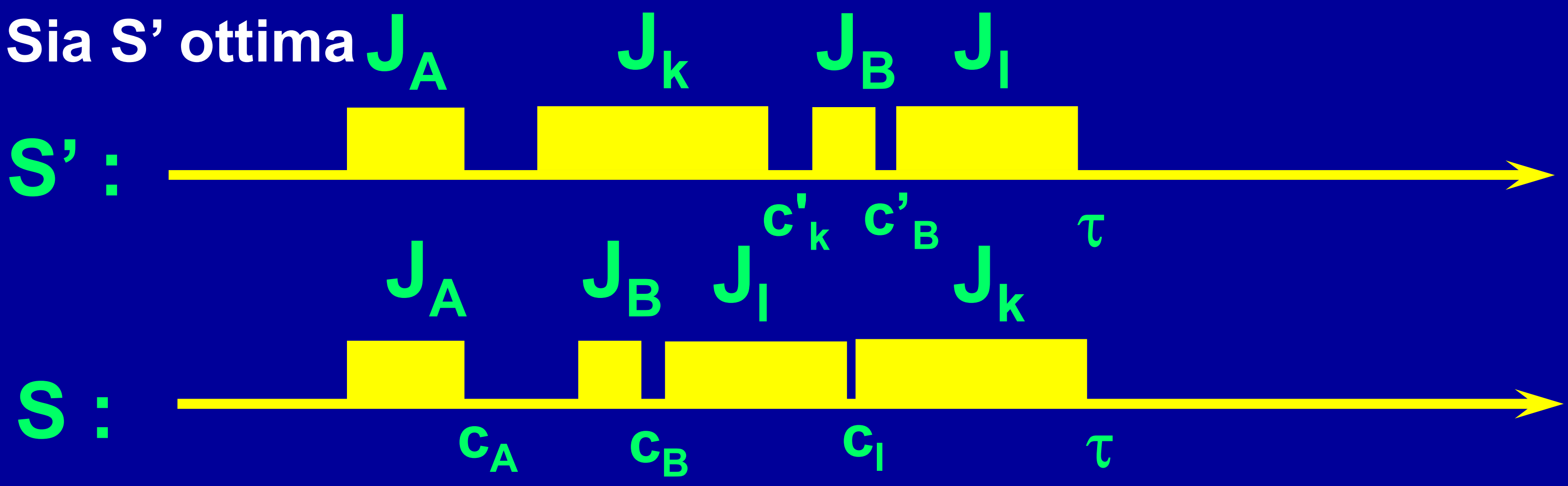


$\exists$ **S ottima: J_k è ultimo in S**

Dim: $\exists$ S ottima: J_k è ultimo in S

$$k: \gamma_k(\tau) = \min_{J_i \in V} \gamma_i(\tau)$$

Sia S' ottima



S' ottima

$\boxed{c_i \leq c'_i \quad \forall\, i \neq k} \Rightarrow \boxed{\gamma_i(c_i) \leq \gamma_i(c'_i) \quad \forall\, i \neq k}$

$$\boxed{\gamma_k(c_k) = \gamma_k(\tau) \leq \gamma_l(\tau) = \gamma_l(c'_l)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\max_{i=1,\dots,n} \gamma_i(c_i) \leq \max_{i=1,\dots,n} \gamma_i(c'_i)}$$

PASSI DELL'ALGORITMO

1) $k := n \quad G := \{$ Grafo delle precedenze $\}$;

$$\tau_n := \sum_{i=1}^{n} p_i$$

2) $V := \{$ Lavori senza successori in G $\}$;

$$i(k): \ \gamma_{i(k)}(\tau) = \min_{J_i \in V} \gamma_i(\tau)$$

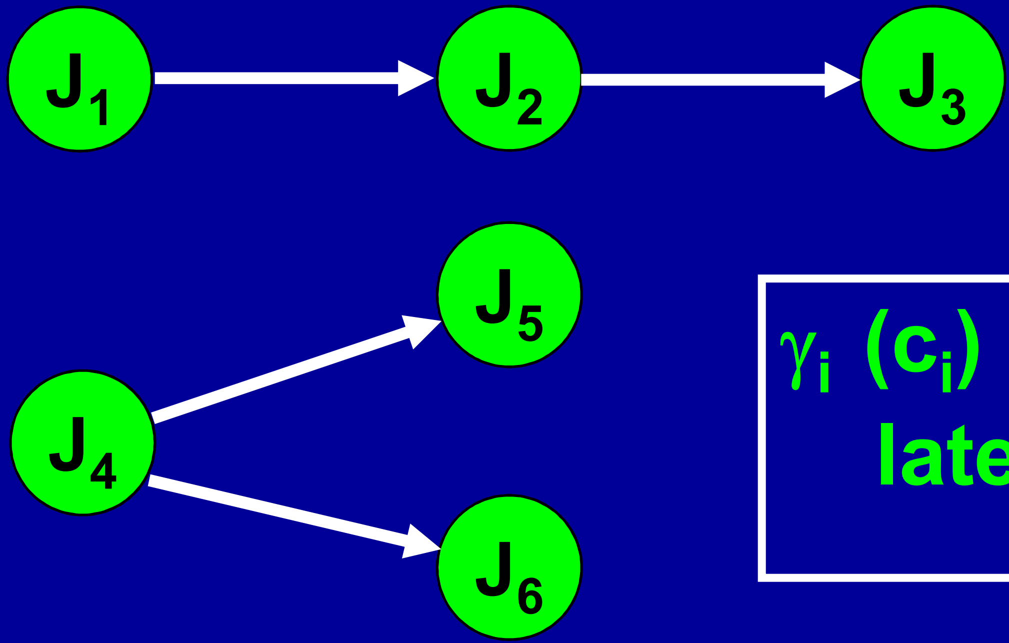
3) $\tau_k := \tau_k - p_{i(k)}$; $G := G/\{\text{ nodo } J_{i(k)}\}$;

$k := k - 1$

4) $\boxed{k \geq 1} \Rightarrow \boxed{\text{Passo 2}}$

$\boxed{k = 0} \Rightarrow \boxed{S = \{ J_{i(1)}, J_{i(2)}, \ldots J_{i(n)} \}}$

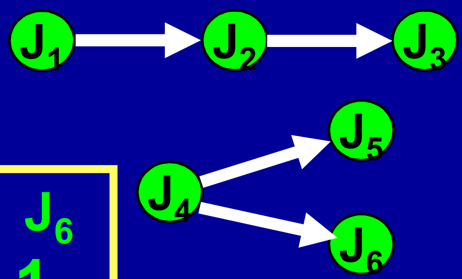
Lavori:	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
Tempi p_i :	2	3	4	3	2	1
Cons. d_i :	3	6	9	7	11	7



$\gamma_i\ (c_i) = c_i - d_i$

lateness

$\gamma_i\ (c_i) = c_i - d_i$



Lavori:	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
Tempi p_i :	2	3	4	3	2	1
Cons. d_i :	3	6	9	7	11	7

Lavori J_i:	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
$\gamma_i\ (\tau_n)$:	*	*	6	*	<u>4</u>	8
$\gamma_i\ (\tau_5)$:	*	*	<u>4</u>	*		6
$\gamma_i\ (\tau_4)$:	*	3		*		<u>2</u>
$\gamma_i\ (\tau_3)$:	*	2		<u>1</u>		
$\gamma_i\ (\tau_2)$:	*	-1				
$\gamma_i\ (\tau_1)$:	-1					

15	i(n)=5
13	i(5)=3
9	i(4)=6
8	i(3)=4
5	i(2)=2
2	i(1)=1

Sequenza ottima: $J_{i(1)}\ J_{i(2)}\ \ldots J_{i(k)}\ \ldots\ J_{i(n-1)}\ J_{i(n)}$

n = 6

3.4 Algoritmo di Smith modificato: sequenze efficienti rispetto al completamento medio e il ritardo massimo

Algoritmo di Smith modificato

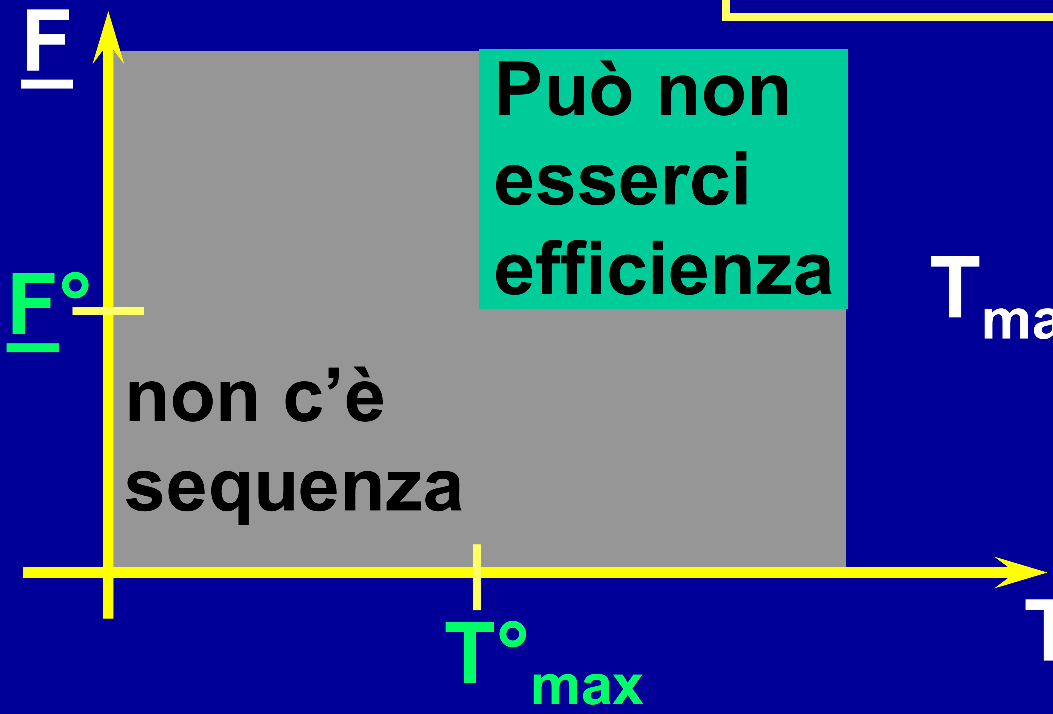
$\boxed{1980}$

Efficiente rispetto $\underline{F}$ e T_{max}

$S°$: Efficiente: $\nexists\, S'$:

$\boxed{\underline{F}' < \underline{F}° \qquad T'_{max} \leq T°_{max}}$

$\boxed{\underline{F}' \leq \underline{F}° \qquad T'_{max} < T°_{max}}$



$$T_{max} := \max_{1}^{n}{}_{i}\, T_i$$

Algoritmo di Smith (1956)

min $\underline{F}$

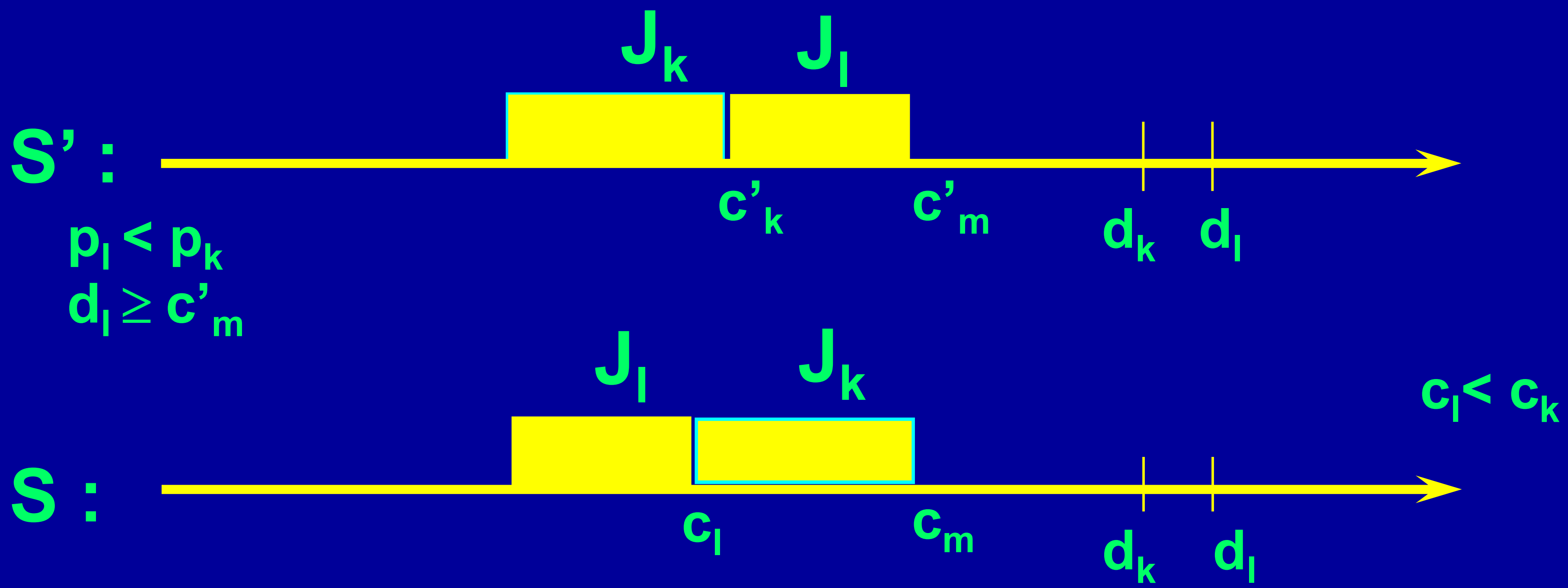
$S : T_{max} = 0$

$\exists$ soluzione $\Leftrightarrow$ [S EDD $\Rightarrow$ $L_{max} \leq 0$]

Se le sequenze EDD danno $L_{max} \leq 0$:

$c_m := \sum_{r=1}^{n} p_r$ $\quad r_i = 0$ tutti i pezzi disponibili al tempo iniziale

$\underline{F} = \frac{1}{n} \sum_i (c_i - r_i) = \underline{c}$ flusso medio una sequenza è minima se e solo se l’ultimo lavoro è di lunghezza massima, tra quelli che possono essere sequenziati in ultimo :



$n\underline{F}' = n\underline{F} - c_l + c'_k > n\underline{F}$

$\underline{F}$’ non è ottimo

$$\underline{F} = \underline{c} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} {}_i\, c_i$$

Passi dell'algoritmo di Smith (1956)

1) $k := n \quad U := \{ J_1 \dots J_n \}; \quad \tau_n := \sum_{r=1}^{n} p_r$

2) $i(k): J_{i(k)} \in U$ $\Rightarrow$ (i) $d_{i(k)} \geq \tau$ ($\exists$ per ipotesi)
(ii) $\forall J_l \in U \quad d_l \geq \tau$

$\Downarrow$

$p_l \leq p_{i(k)}$

2) $i(k)$: $J_{i(k)} \in U$ $\Rightarrow$ (i) $d_{i(k)} \geq \tau$ ($\exists$ per ipotesi)

(ii) $\forall J_l \in U \quad d_l \geq \tau$

$\Downarrow$

$p_l \leq p_{i(k)}$

Il passo 2 pone al posto k-esimo il lavoro di peso massimo tra quelli che ci possono stare con il vincolo $T_{max} = 0$

$\boxed{\text{il vincolo } T_{max} = 0 \text{ equivale a } L_{max} \leq 0}$

3) $\tau_k := \tau_k - p_{i(k)}$; $U := U / \{ J_{i(k)} \}$; $k := k - 1$

4) $\boxed{k \geq 1} \longrightarrow \boxed{\text{Passo } 2}$

$\boxed{k = 0} \longrightarrow \boxed{S = \{ J_{i(1)}, J_{i(2)}, \ldots J_{i(n)} \}}$

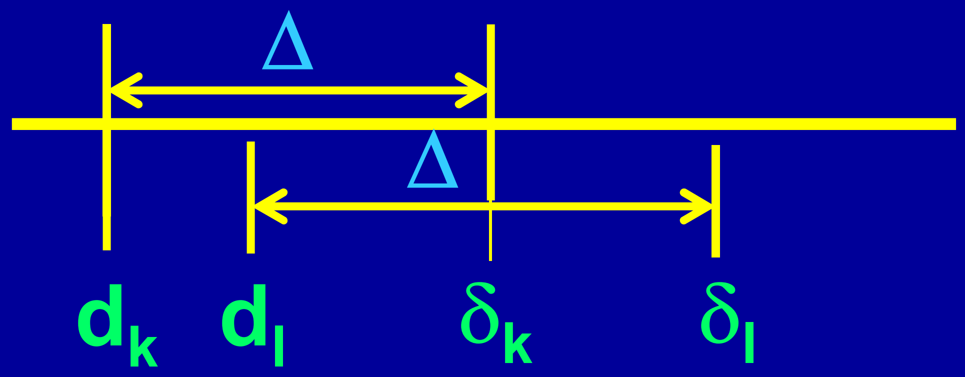
Algoritmo di Smith modificato: Efficiente rispetto $\underline{F}$ e T_{max}

Dati:

una sequenza EDD dei lavori: $\{ J_1 \dots J_n \}$

$\Delta \geq T_{max}$ della data EDD

$$\boxed{\delta_i := d_i + \Delta}$$



Modifica dell'algoritmo

2) i(k): $J_{i(k)} \in U$ $\Rightarrow$

(i) $d_{i(k)} \geq \tau$ (∃ per ipotesi)

(ii) $\forall\ J_l \in U \quad d_l \geq \tau$

$\Downarrow$

$p_l \leq p_{i(k)}$

diviene

2') i(k): $J_{i(k)} \in U$ $\Rightarrow$

(i) $\delta_{i(k)} \geq \tau$ (∃ per ipotesi)

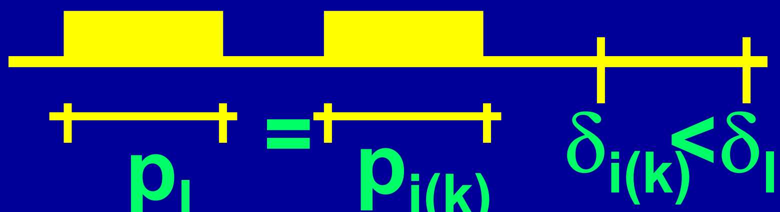
(ii) $\forall\ J_l \in U \quad \delta_l \geq \tau$

$\Downarrow$

$p_l < p_{i(k)}$

$p_l = p_{i(k)} \Rightarrow \delta_l \leq \delta_{i(k)}$

NO!



$$\underline{F}^\circ := \min \quad \underline{F}$$
$$T_{max} \leq \Delta$$

Risultato dell'algoritmo modificato

La condizione modificata dà:

$$\Delta^\circ := \min L_{max}$$
$$\underline{F} \leq \underline{F}^\circ$$

$\boxed{\text{Se } \Delta° \geq 0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta° := \min_{\underline{F} \leq \underline{F}°} L_{max}}$

l'algoritmo dà

$$\boxed{\Delta° = T°_{max} = \min_{\underline{F} \leq \underline{F}°} T_{max}}$$

$$\boxed{\underline{F}° = \min_{T_{max} \leq \Delta° = T°_{max}} \underline{F}}$$

Efficienza rispetto $\underline{F}$ e T_{max}

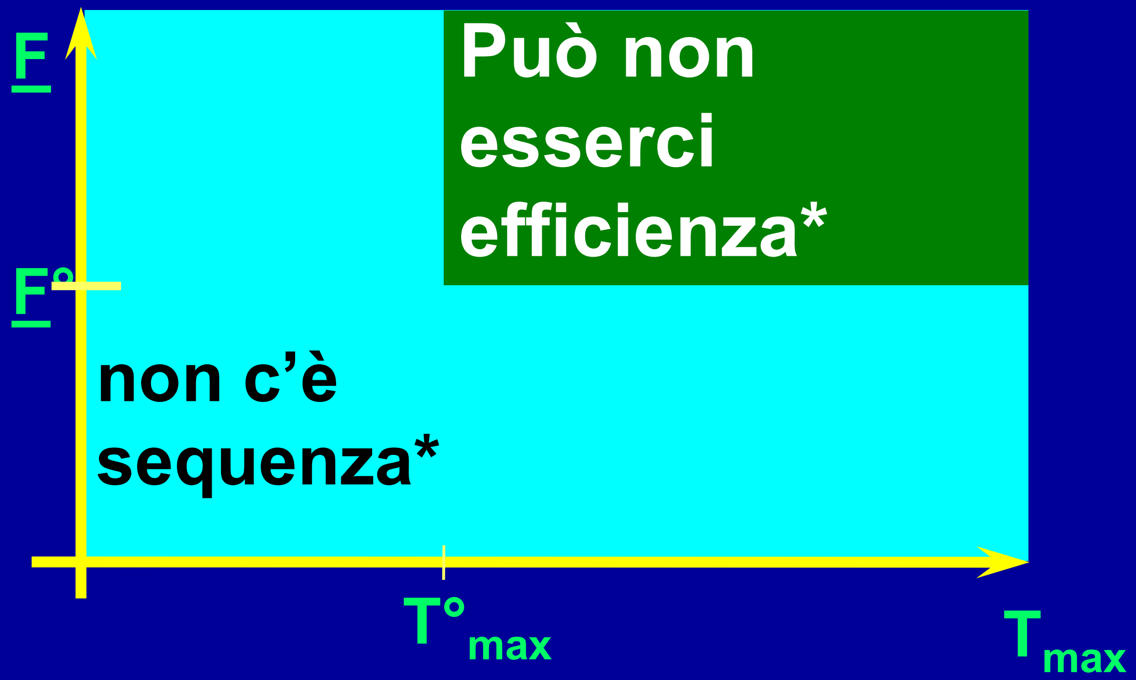
$$\underline{F}^{\circ} = \min_{T_{max} \le T^{\circ}_{max}} \underline{F}$$

$$\underline{F} < \underline{F}^{\circ} \qquad T_{max} \le T^{\circ}_{max}$$

S° è Efficiente: $\nexists$ S:

$$T^{\circ}_{max} = \min_{\underline{F} \le \underline{F}^{\circ}} T_{max}$$

$$\underline{F} \le \underline{F}^{\circ} \qquad T_{max} < T^{\circ}_{max}$$



L'algoritmo dà una sequenza S efficiente rispetto a $\underline{F}$ e T_{max}

$$\underline{F}' < \underline{F}° \longrightarrow T'_{max} > \min_{\underline{F} \leq \underline{F}°} T_{max} = T°_{max}$$

$$T'_{max} < T°_{max} \longrightarrow \underline{F}' > \min_{T_{max} \leq T°_{max}} \underline{F} = \underline{F}°$$

Att. : Se i(k) non è unico al passo 2' ogni scelta diversa porterà a sequenze efficienti diverse

Efficienza rispetto $\underline{F}$ e T_{max}

Esempio: curva di efficienza

Lavori:	J_1	J_2	J_3	J_4
Tempi p_i :	2	4	3	1
Cons. d_i :	1	2	4	6

Punto 1

Passo 1: $\Delta = \sum_{1}^{n}{}_{i}\, p_i = 10$

Passo 2: Smith mod. dà: $J_4\, J_1\, J_3\, J_2$

$$\boxed{\underline{F}° = 5 \quad T°_{max} = 8}$$

Efficienza rispetto $\underline{F}$ e T_{max}

Esempio: curva di efficienza

Lavori:	J_1	J_2	J_3	J_4
Tempi p_i :	2	4	3	1
Cons. d_i :	1	2	4	6

Punto 2

Passo 1: $\Delta = 8 - 1 = 7 \geq 0$

Passo 2: Smith mod. dà: $J_4\, J_1\, J_2\, J_3$

$\boxed{\underline{F}° = 5.25 \quad T°_{max} = 6}$

Efficienza rispetto $\underline{F}$ e T_{max}

Esempio: curva di efficienza

Lavori:	J_1	J_2	J_3	J_4
Tempi p_i :	2	4	3	1
Cons. d_i :	1	2	4	6

Punto 3

Passo 1: $\Delta = 6 - 1 = 5 \geq 0$

Passo 2: Smith mod. dà: $J_1\ J_2\ J_3\ J_4$

$\underline{F}° = 6.75 \quad T°_{max} = 5$

Efficienza rispetto $\underline{F}$ e T_{max}

Esempio: curva di efficienza

Lavori:	J_1	J_2	J_3	J_4
Tempi p_i :	2	4	3	1
Cons. d_i :	1	2	4	6

Punto ...

Passo 1: $\Delta = 5 - 1 = 4 \geq 0$

Passo 2: non ci sono sequenze con $T°_{max} \leq 4$

Efficienza rispetto $\underline{F}$ e T_{max}

Esempio: curva di efficienza: ✸ punti calcolati