$1/r_j/L_{max}$

Algoritmo branch-and-bound

Branch-and-bound: nozioni di base

Dato un problema di ottimizzazione combinatoria: $P_0 = (\boldsymbol{z},\ S_0)$

$$z^* = \min \{ \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in S_0 \}$$

$$S_0 = \{ \boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^m \}$$

• in teoria, è sempre possibile risolvere il problema mediante enumerazione totale. In pratica, dato il valore elevatissimo di m, questo è inapplicabile.

• il metodo branch-and-bound si basa sull'idea di enumerare <u>tutte</u> le soluzioni in S_0 in modo "intelligente" (cioè più efficiente dell'enumerazione totale)

Branching

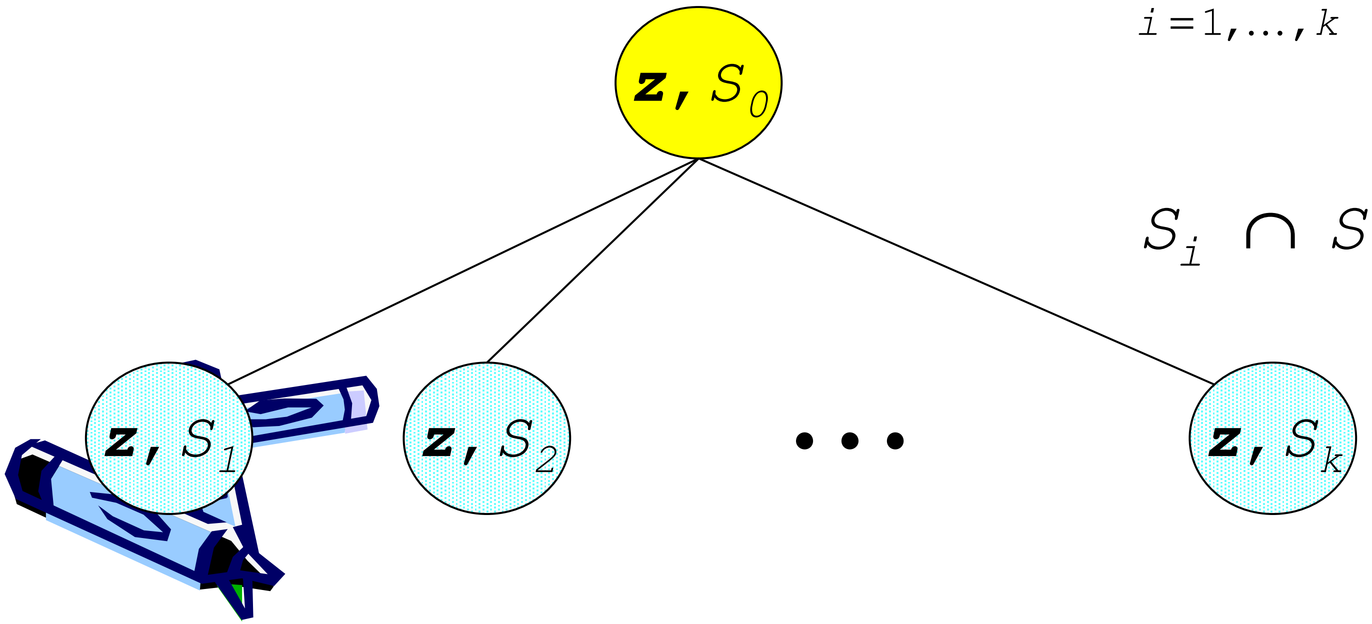
Si costruisce una partizione $\{S_1, \ldots, S_k\}$ di S_0. Allora, posto

$$z_i^* = \min \{z(x) \,:\, x \in S_i\}$$

Risulta:

$$z^* = \min (z_1^*, \ldots, z_k^*)$$

$$\bigcup_{i=1,\ldots,k} S_i = S_0$$



$$S_i \cap S_j = \emptyset, \; i \neq j$$

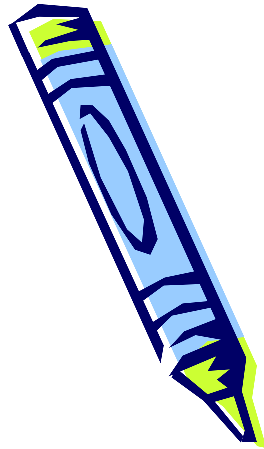
Enumerazione implicita

- Se $|S_i \cap S|=1$, $i=1,\ldots,k$, allora il calcolo di z_i^* è facile: enumerazione totale ($k = m$)

- Se k è polinomiale nelle dimensioni dell'input e il problema è NP-hard, allora calcolare z_i^* è NP-hard (se P $\neq$ NP) e, molto spesso, computazionalmente intrattabile in senso sperimentale.

- Quindi, anziché calcolare z_i^* si applica una tecnica ad-hoc nel tentativo di certificare che nessuna soluzione migliore della migliore soluzione ammissibile nota ($\bar{x}$, **ottimo corrente**) è contenuta in S_i (**valutazione del sottoproblema**). Se ha successo, il problema $(\mathbf{z}, S_i)$ è scartato (***pruning***)

Valutazione del sottoproblema



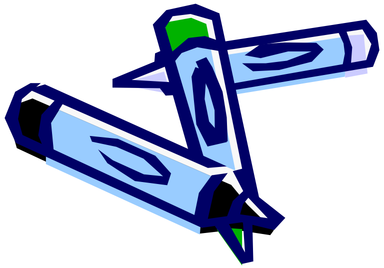
- Calcola una **limitazione inferiore L_i* di z_i***.

Se $$L_i^* \geq z(\overline{x})$$

allora S_i non contiene soluzioni ammissibili migliori di $\overline{x}$ e il sottoproblema ($\boldsymbol{z}$, S_i) è scartato

Altrimenti

Si costruisce una partizione di S_i costruendo nuovi sottoproblemi.



Calcolo di L_i*

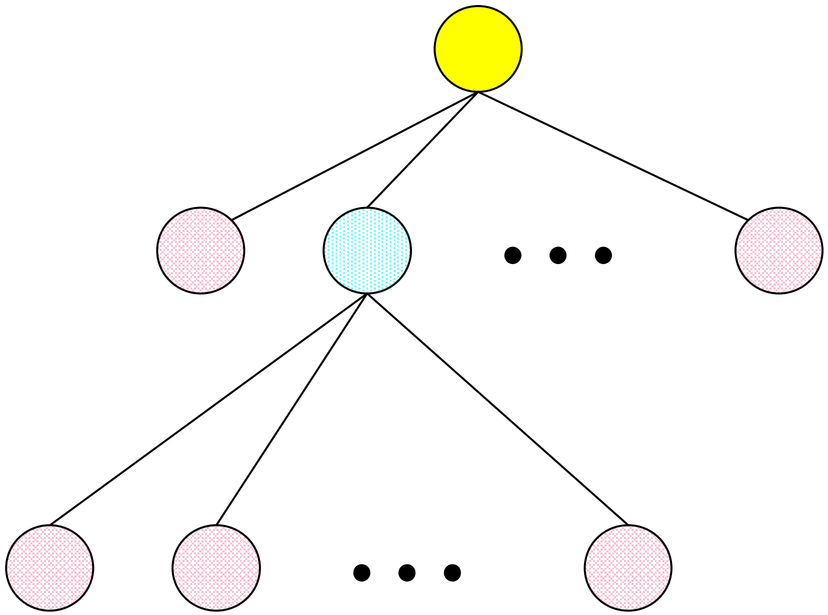
Dato un problema di ottimizzazione $P=(z, S)$ (di minimo), si definisce ***rilassamento*** di P un nuovo problema $RP=(w, \Phi)$ tale che:

(i) $S \subseteq \Phi$

(ii) $\forall\, x \in S$ risulta $w(x) \le z(x)$

- Il calcolo di L_i* si effettua risolvendo <u>in modo esatto</u> un opportuno rilassamento di (z, S_i).
- La scelta del rilassamento si basa su due esigenze, spesso contrastanti:
  - Ottenere buone approssimazioni di z_i*
  - Richiedere tempi di calcolo non elevati

Albero di enumerazione



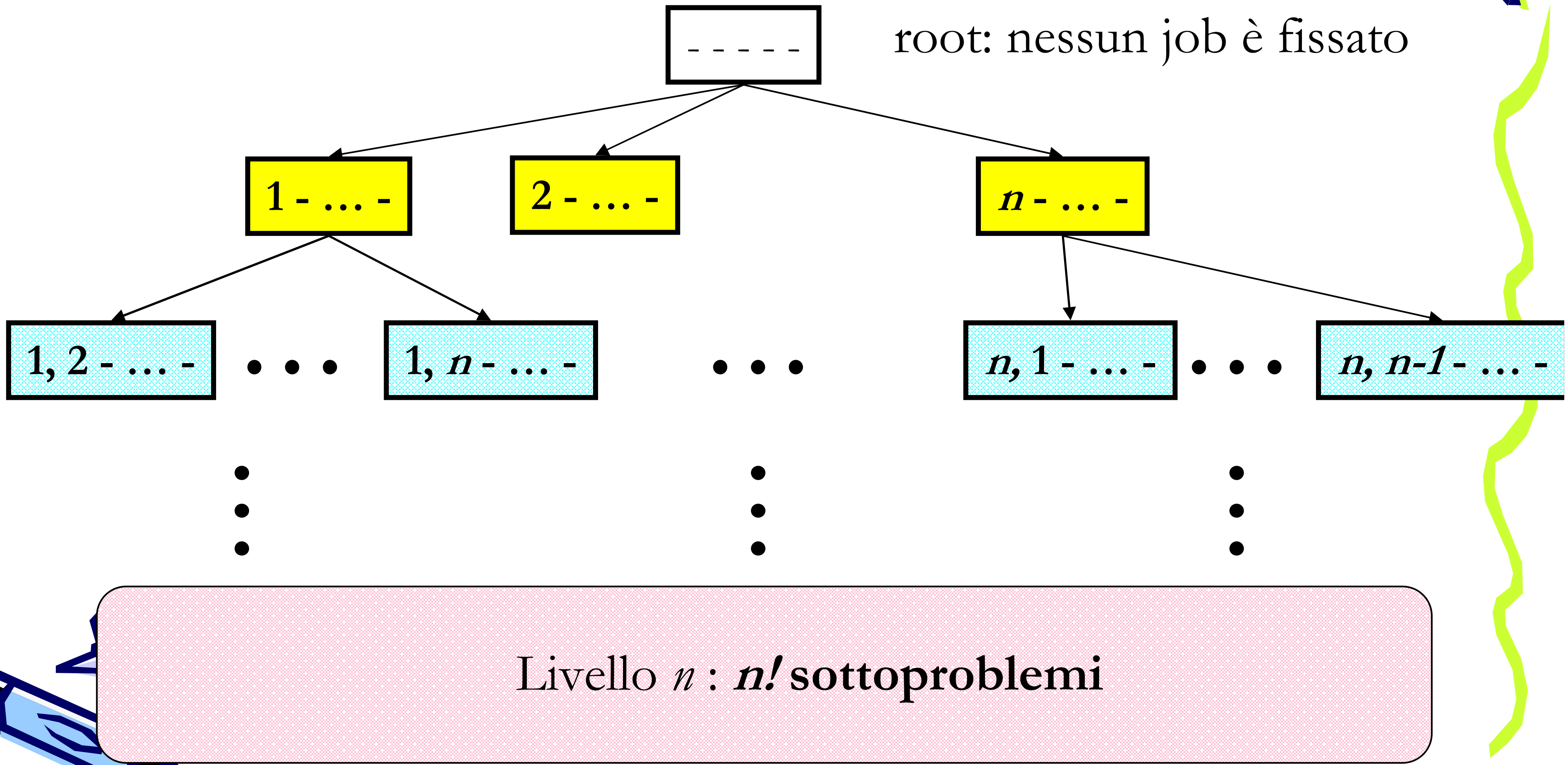
• Le foglie dell'albero di enumerazione forniscono, in ogni fase del suo sviluppo, una partizione di S_0 (***lista dei sottoproblemi candidati***).

• Arresto:

- o la lista dei problemi candidati è vuota
- o si ottiene una soluzione ammissibile di valore L_0

Branch-and-bound per $1/r_j/L_{max}$

branching: al livello h dell'albero di enumerazione si fissa in tutti i modi possibili il job in posizione h (**schedule *parziale***):



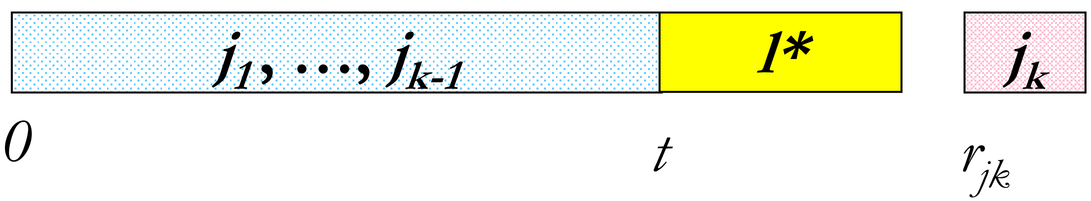
Valutazione del sottoproblema

• Rilassamento preemptivo: $1/r_j, prmp/L_{max}$ è risolto all'ottimo dalla regola PEDD (perché è un rilassamento?)

• Consideriamo un problema al livello k-1, in cui i job $j_1, \ldots, j_{k-1}$ sono fissati nelle prime k-1 posizioni: il sottoproblema $j_1, \ldots, j_{k-1}, \boldsymbol{j_k}$ deve essere generato solo se:

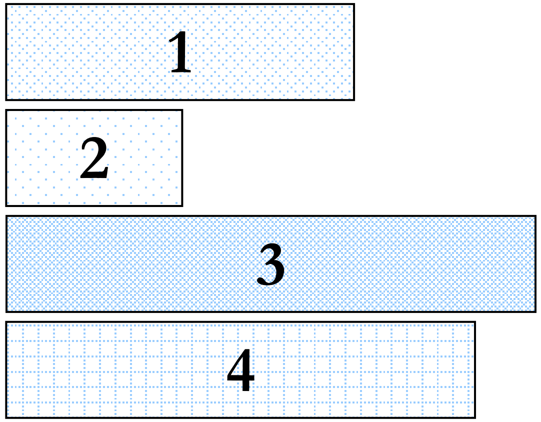
$$r_{j_k} < \min_{l \in J} (\max(t, r_l) + p_l) = \max(t, r_{l^*}) + p_{l^*}$$

altrimenti si otterrebbe un sottoproblema dominato da:

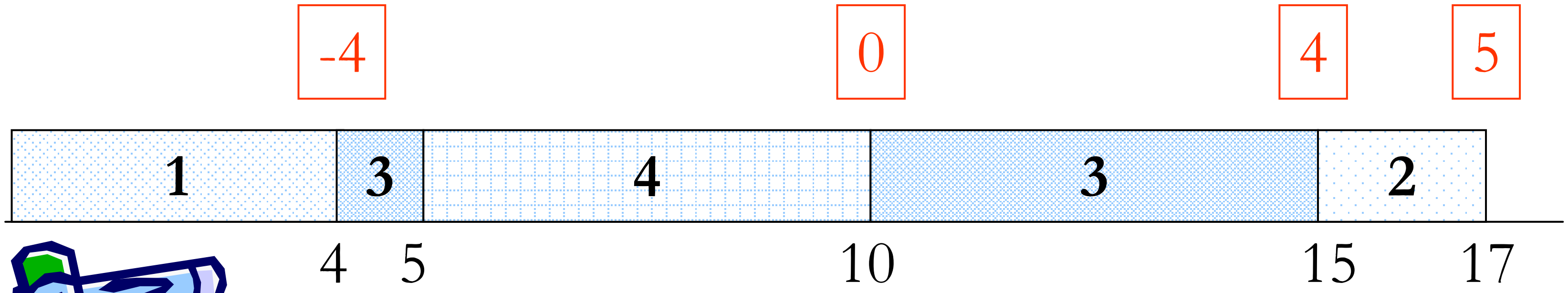


Esercizio

job	1	2	3	4
p_j	4	2	6	5
r_j	0	1	3	5
d_j	8	12	11	10



nodo radice:



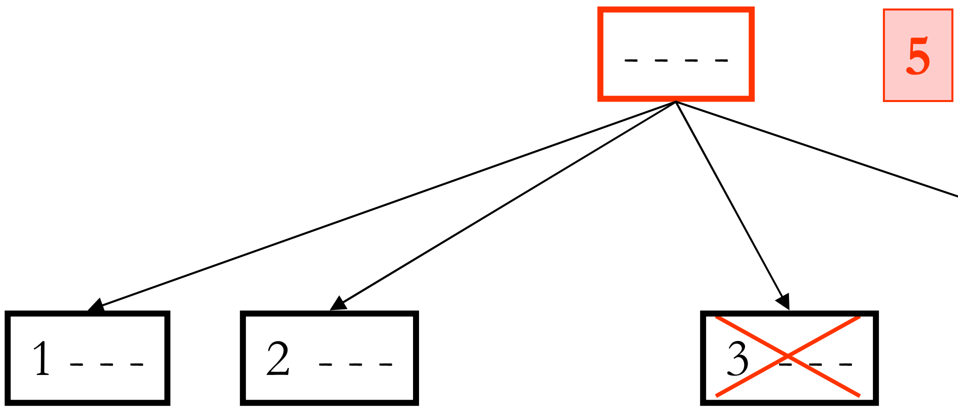
$L_0 = 5$

Branching

job	1	2	3	4
p_j	4	2	6	5
r_j	0	1	3	5
d_j	8	12	11	10

ottimo corrente: (1,2,3,4)

$\boxed{\bar{z} = 7}$

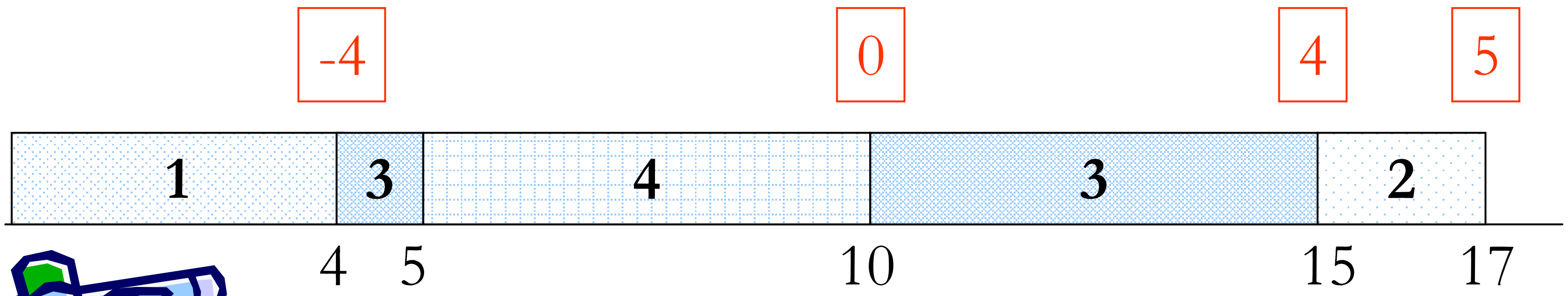


$r_3 > r_2 + p_2$ $\quad$ $r_4 > r_2 + p_2$

Eliminati per dominanza

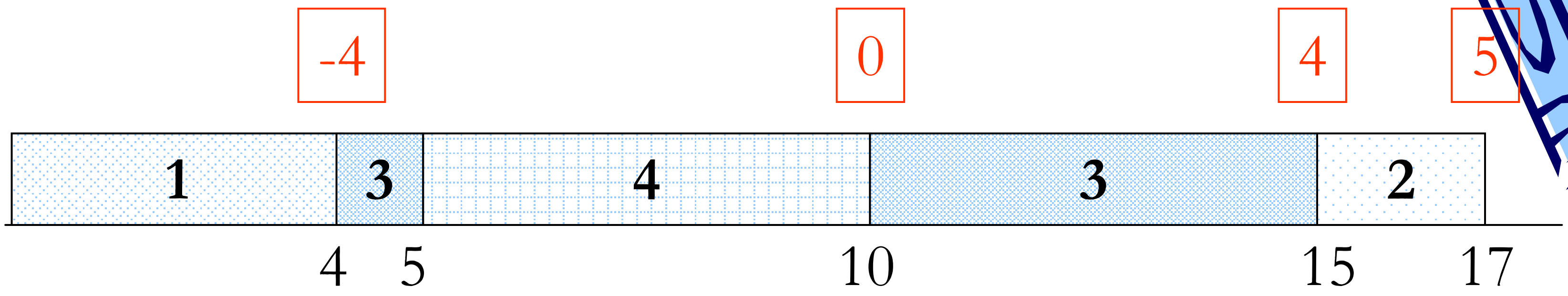
Valutazione di (1 - - -)

job	1	2	3	4
p_j	4	2	6	5
r_j	0	1	3	5
d_j	8	12	11	10



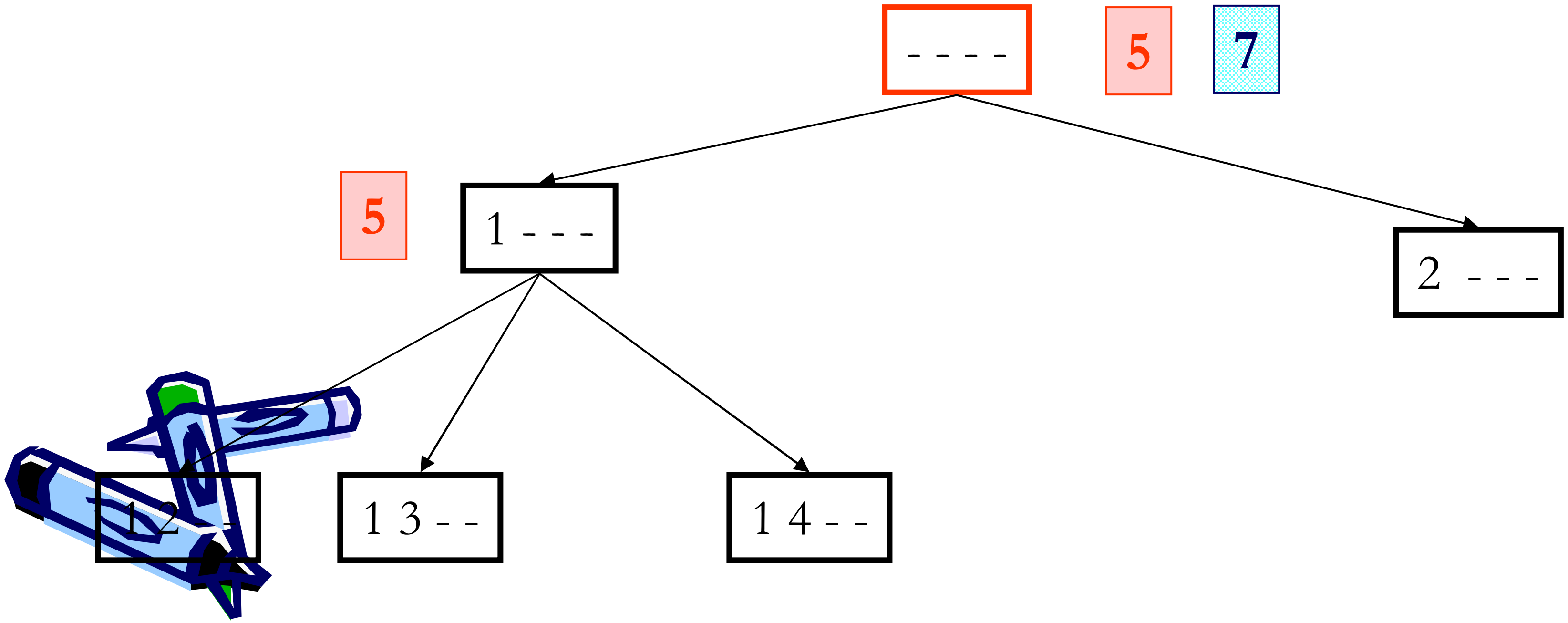
L(1,---) = 5

Valutazione di (1 - - -)



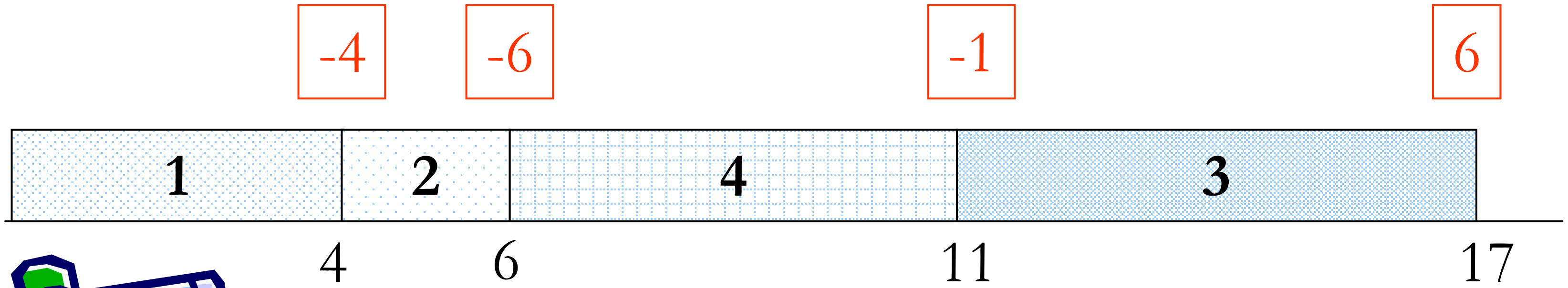
L(1,---) = 5

la condizione di pruning fallisce



Valutazione di (1 2 - -)

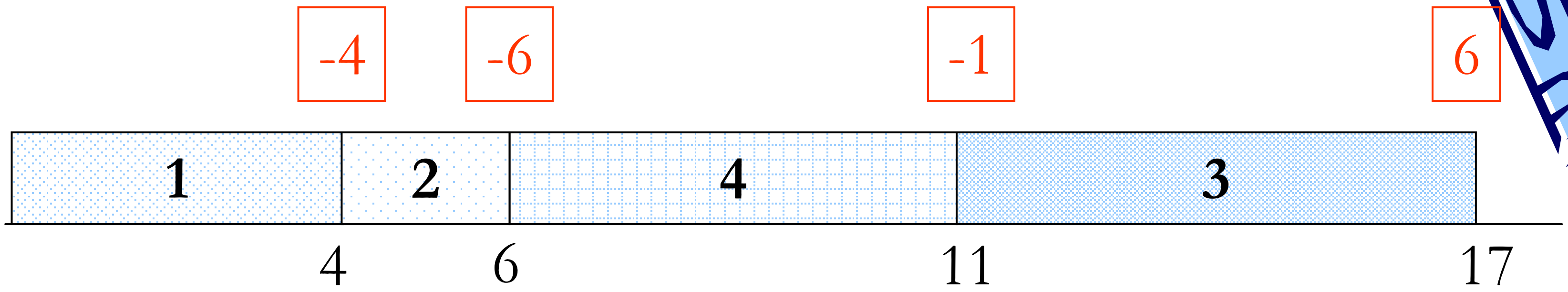
job	1	2	3	4
p_j	4	2	6	5
r_j	0	1	3	5
d_j	8	12	11	10



L(1,2--) = 6

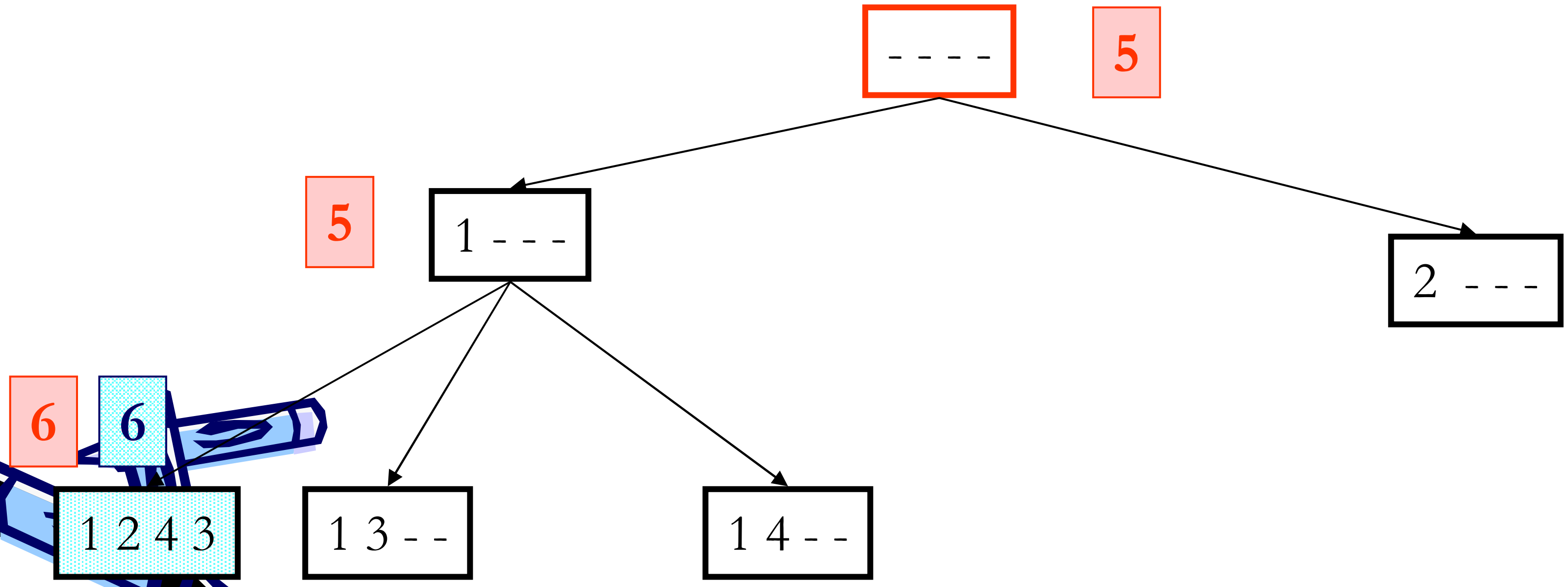
Soluzione ammissibile $\bar{z} = 6$

Valutazione di (1 2 - -)



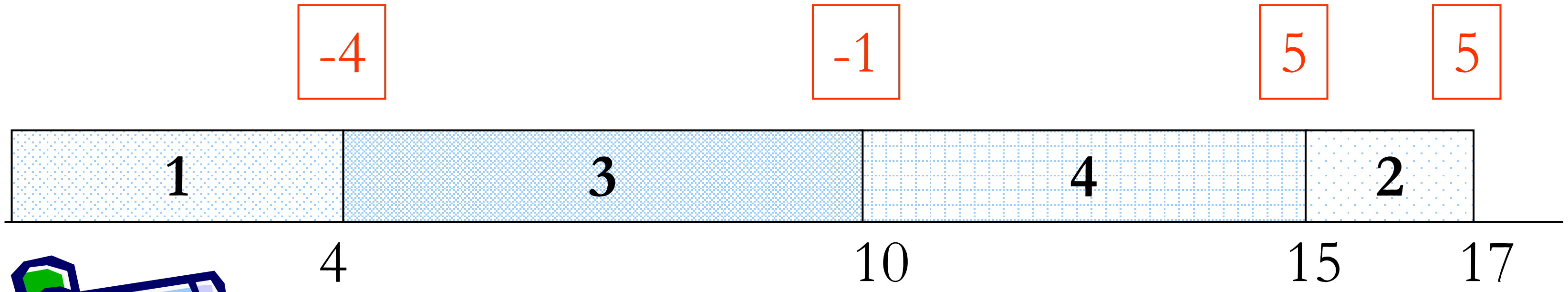
$L(1,2--) = 6$

sottoproblema chiuso per ottimalità



Valutazione di (1 3 - -)

job	1	2	3	4
p_j	4	2	6	5
r_j	0	1	3	5
d_j	8	12	11	10

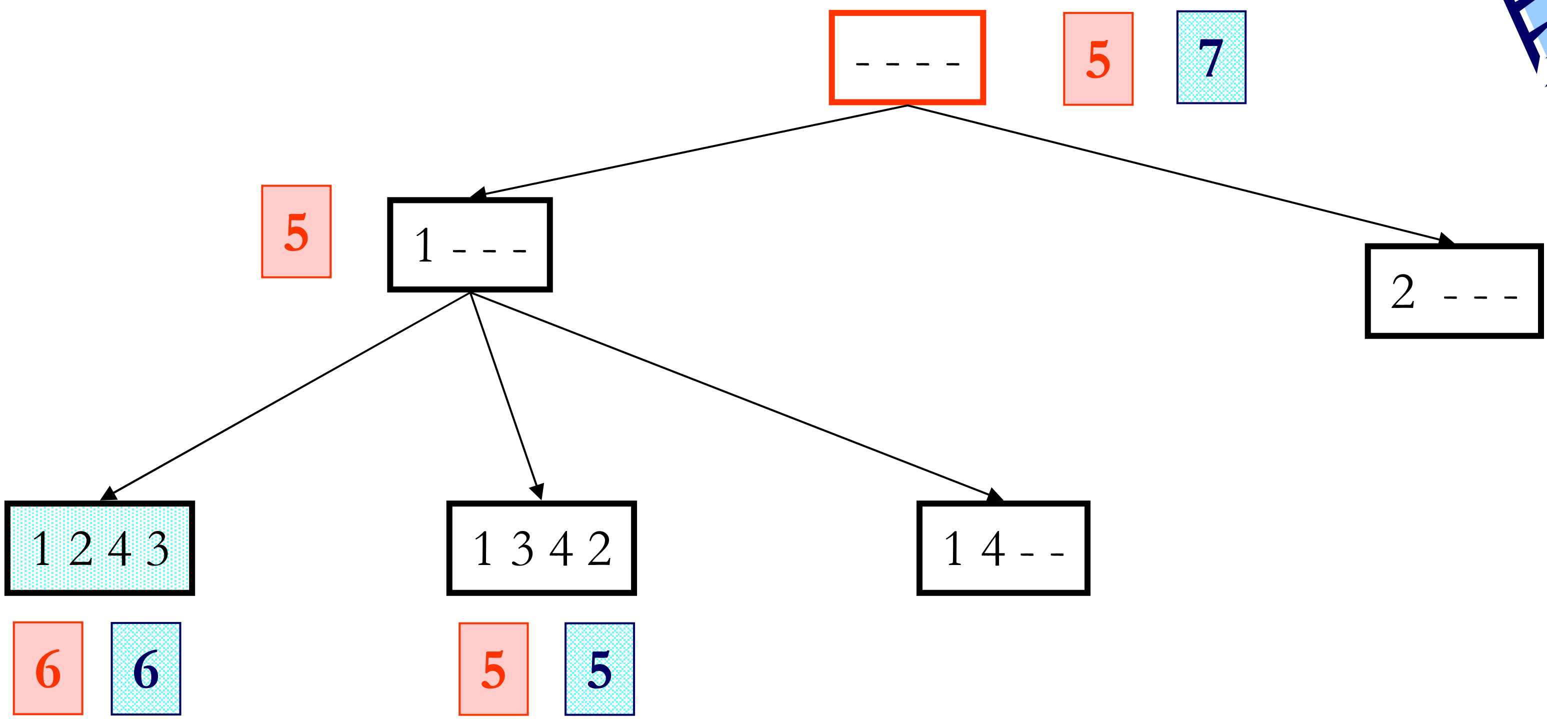


$L(1,3\text{--}) = 5$

Soluzione <u>ammissibile</u>

$\bar{z} = 5$

Arresto



Soluzione ammissibile di valore pari al bound del nodo radice: ottima