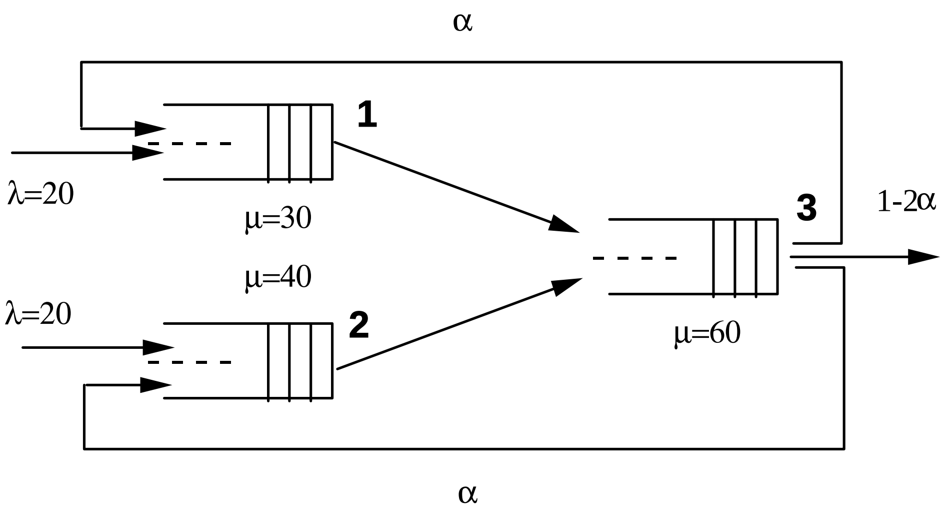
ESERCIZI SVOLTI - FILE D'ATTESA E RETI DI CODE

Problema 1

Si consideri la rete di code in figura. Essa rappresenta un sistema di lavorazione costituito da tre stazioni 1, 2, 3, ciascuna con un solo servente. 1 e 2 sono stazioni di lavorazione cui arrivano pezzi con distribuzione esponenziale di parametro λ=20 pezzi/ora, uguale per le due macchine. I pezzi lavorati passano poi sulla macchina 3, che è una stazione di ispezione, e che ne scarta una frazione 2α, che viene instradata equamente alle due macchine (per cui, una frazione α torna a 1 e una frazione α torna a 2). Le tre stazioni hanno tempi di servizio esponenziali, di parametri rispettivamente μ_1=30, μ_2=40, μ_3=60.



1. Quale valore massimo può assumere α affinché il sistema ammetta una distribuzione stazionaria di probabilità?

2. Supponendo α=0.1, calcolare il valore atteso W del tempo trascorso nel sistema da un pezzo (throughput time).

SOLUZIONE

1. Innanzitutto si determinino le frequenze effettive degli arrivi alle varie stazioni con le formule valide per le reti aperte. Si ha:

$\lambda_1' = \lambda_1 + \alpha\, \lambda_3'$

$\lambda_2' = \lambda_2 + \alpha\, \lambda_3'$

$\lambda_3' = \lambda_1' + \lambda_2' = \lambda_1 + \lambda_2 + 2\alpha\, \lambda_3'$

da cui si ottiene, sostituendo i valori numerici:

λ_1'= 20 + (40 α / 1 – 2α)

λ_2'= 20 + (40 α / 1 – 2α)

λ_3'= 40 / 1 – 2α

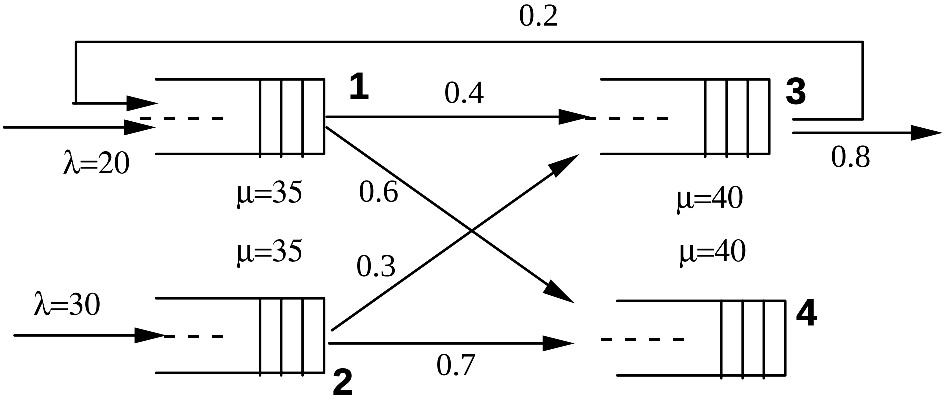
questi valori vanno confrontati con i rispettivi μ_1, μ_2 e μ_3, imponendo $\lambda_i' < \mu_i$ per ogni i. Il vincolo più stringente risulta essere quello sulla stazione M_3, per la quale si ha $\alpha < 1/6$.

2. Con $\alpha = 0.1$, dalle espressioni scritte sopra si ottiene (pezzi/ora) λ_1'= 25, λ_2'= 25, λ_3'= 50. I valori corrispondenti dei visit count (ottenuti dividendo ciascun λ_i' per la somma delle frequenze degli arrivi dall'esterno, ossia, in questo caso, 40 pezzi/ora) sono: v_1 = 0.625, v_2 = 0.625, v_3 = 1.25. I tempi di attraversamento relativi alle singole stazioni sono calcolati con la formula $W_i = 1 / \mu_i - \lambda_i'$ e valgono: W_1 = 0.2 ore; W_2 = 0.067 ore; W_3 = 0.1 ore. Moltiplicando ciascun tempo di attraversamento per il corrispondente visit count e sommando rispetto alle macchine si ottiene:

(0.625) (0.2) + (0.625) (0.067) + (1.25) (0.1) = 0.292 ore.

Problema 2

Si consideri la rete di code in figura. Essa rappresenta un sistema di lavorazione costituito da quattro stazioni, ciascuna con un solo servente. Come si vede, il 20% dei pezzi lavorati dal centro 3 sono rimandati indietro al centro 1 per una rilavorazione. I centri 1 e 2 ricevono dall'esterno pezzi con distribuzione esponenziale di parametro λ_1=20 e λ_2=30 pezzi/ora rispettivamente. Le probabilità di instradamento sono indicate. Le quattro stazioni hanno tempi di servizio esponenziali, di parametri rispettivamente μ_1=35, μ_2=35, μ_3=40, μ_4=40.



1. Il sistema ammette una distribuzione stazionaria di probabilità?

2. In ingresso al centro di lavorazione 3, è situato un buffer con k posti. Qualora il numero di pezzi in attesa di essere processati su quel centro ecceda k, si rende necessario far ricorso a strutture di immagazzinamento sussidiarie, dalle quali i pezzi in eccedenza possono poi essere inseriti nel buffer, sempre nel rispetto del criterio di precedenza FIFO. Qual è il minimo valore che k deve assumere affinché la probabilità di ricorrere alle stutture sussidiarie sia inferiore all' 1% ?

SOLUZIONE:

1. Innanzitutto si determinino le frequenze effettive degli arrivi alle varie stazioni con le formule valide per le reti aperte. Si ha:

$\lambda_1' = \lambda_1 + 0.2\ \lambda_3'$

$\lambda_2' = \lambda_2$

$\lambda_3' = 0.4\ \lambda_1' + 0.3\ \lambda_2'$

$\lambda_4' = 0.6\ \lambda_1' + 0.7\ \lambda_2'$

da cui si ottiene, sostituendo i valori numerici:

$\lambda_1' = 23.69$, $\lambda_2' = 30$, $\lambda_3' = 18.48$, $\lambda_4' = 35.21$

poiché ciascun λ_i è inferiore al corrispondente μ_i, il sistema ammette una distribuzione stazionaria di probabilità.

2. Il quesito corrisponde a chiedersi per quale valore (minimo) di k la probabilità che nella stazione 3 vi siano più di k+1 clienti sia inferiore a 0.01. Ponendo $\rho_3 = \lambda_3' / \mu_3$, ricordando che in un sistema M/M/1 la probabilità che vi siano i clienti è pari a $(1-\rho)\ \rho^i$, e che

$$\sum_{i=0}^{k+1} \rho^i = \frac{1-\rho^{k+2}}{1-\rho}$$

si ha che $P(n_3 > k+1) = 1 - P(n_3 = k+1) = 1 - (1-\rho_3)\ \dfrac{1-\rho_3^{k+2}}{1-\rho_3} = \rho_3^{k+2}$.

Dunque, occorre trovare per quale k si ha che $\rho_3^{k+2} < 0.01$. Poiché $\rho_3 = 0.462$, si ha una disequazione trascendente:

$$0.462^{\,k+2} < 0.01$$

ovvero

$$(k+2) \ln 0.462 < \ln 0.01$$

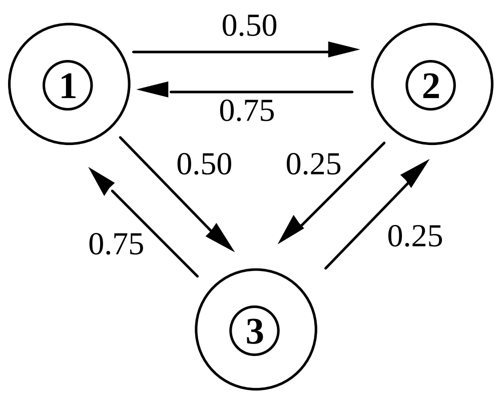
siccome $\ln 0.462 = -0.772$ e $\ln 0.01 = -4.605$ si ha:

$$k + 2 > 5.965$$

e dunque $k = 4$.

Problema 3

In figura è rappresentata una rete di code chiusa. Essa consiste di tre stazioni, ciascuna ad un solo servente, indicate con 1, 2 e 3 rispettivamente. I tempi di servizio sono esponenziali; nel sistema sono a ogni istante presenti esattamente N=2 pezzi. Completata una lavorazione da parte del centro j, il pezzo viene instradato al centro k con probabilità p_{jk}, come indicato in figura. La stazione 1 è, in realtà, la stazione di ingresso/uscita, per cui conviene porre convenzionalmente pari a 1 il numero medio di visite che ciascun pezzo compie alla prima stazione. Le capacità dei tre serventi sono pari a: μ_1=4 lavorazioni/ora; μ_2=6 lavorazioni/ora; μ_3=8 lavorazioni/ora.



1. Calcolare il numero medio di pezzi prodotti dal sistema in un'ora (throughput).

2. Calcolare la probabilità che, in un generico istante, la stazione 1 non sia occupata.

SOLUZIONE:

1. Anzitutto, occorre calcolare i visit count. Le equazioni sono:

$v_1 = 0.75\, v_2 + 0.75\, v_3$

$v_2 = 0.5\, v_1 + 0.25\, v_3$

$v_3 = 0.5\, v_1 + 0.25\, v_2$

da cui, ponendo $v_1 = 1$, si ottiene $v_2 = 2/3$ e $v_3 = 2/3$. A questo punto è possibile calcolare i valori del tempo medio trascorso da un pezzo in ogni stazione, con la formula $x_j = v_j / \mu_j$. Si ottiene: $x_1 = 15$ minuti; $x_2 = 6.66$ minuti; $x_3 = 5$ minuti. Poiché ogni stazione è monoservente, si ha $f_j(n_j) = x_j^{n_j}$ per $j = 1, 2, 3$. Possiamo ora calcolare la costante di normalizzazione $G(M,N)$, e a tale scopo possiamo utilizzare l'espressione semplificata applicabile quando appunto tutte le stazioni hanno un solo servente. In vista del fatto che occorrerà calcolare la probabilità che la stazione 1 non sia occupata, conviene rinumerare le stazioni ponendo la stazione 1 come ultima. Si ha quindi la tabella:

n *j*	2	3	1
0	1	1	1
1	6.66	11.66	26.66
2	44.43	102.73	502.63

da cui $G(M,N) = 502.63$. Il throughput è quindi dato da $X = 26.66 / 502.63 = 0.053$ pezzi/minuto = 3.18 pezzi/ora.

2. La probabilità che la stazione di carico e scarico non sia occupata si ottiene facilmente dall'espressione

$$Pr\,(n_M=k) = f_M(k)\,\frac{G(M-1;N-k)}{G(M;N)}$$

con $k = 0$. Poiché $f_1(0) = 1$, si ha $Pr\,(n_1=0) = 102.73 / 502.63 = 0.204$.

Problema 4

Una rete di code aperta consiste di tre stazioni, ciascuna ad un solo servente, indicate rispettivamente con A, B e C. Gli arrivi al sistema sono poissoniani, i tempi di servizio esponenziali; ogni stazione ha in ingresso un buffer di capacità sufficientemente elevata da far sì che c'è sempre posto per un pezzo in attesa. Il sistema deve lavorare pezzi di tre tipi diversi: 1, 2 e 3. Il numero medio degli arrivi per settimana di ciascun part type, la successione delle operazioni e il valor medio della durata di ciascuna operazione, *in minuti*, sono indicati nella tabella.

1	50	A, 20	C, 10	
2	100	A, 8	B, 20	(60%)
		A, 8	C, 20	(40%)
3	25	B, 20	C, 10	

Si noti che, dopo l'operazione sul centro A, il 60% dei pezzi di tipo 2 subiscono la seconda operazione su B, gli altri su C. Si consideri che ogni settimana è composta da 40 ore = 2400 minuti.

1. Verificare che il sistema ammette una distribuzione stazionaria di probabilità.

2. Calcolare il valore atteso del tempo trascorso nel sistema da un pezzo di tipo 1.

SOLUZIONE:

1. Per verificare la stabilità del sistema, occorre calcolare i valori di λ_i e μ_i per ognuno dei centri. Per i λ_i , basta sommare i valori medi degli arrivi di ciascun tipo di pezzo: λ_A = 50 + 100 = 150 pezzi/settimana, λ_B = 60 + 25 = 85 pezzi/settimana, λ_C = 50 + 40 + 25 = 115 pezzi/settimana. Calcoliamo ora i valori di $1/\mu_i$ per ogni centro: basta effettuare la somma dei tempi di processamento, pesata con le rispettive frazioni di ciascun tipo di pezzo. Si ha:

$1/\mu_A = (1/3)\ 20 + (2/3)\ 8 = 12$ minuti

$1/\mu_B = (25/85)\ 20 + (60/85)\ 20 = 20$ minuti

$1/\mu_C = (50/115)\ 10 + (40/115)\ 20 + (25/115)\ 10 = 13.478$ minuti

ciò corrisponde a μ_A = 200 pezzi/settimana; μ_B = 120 pezzi/settimana; μ_C = 178.06 pezzi/settimana. Poiché ciascun λ_i è strettamente inferiore al corrispondente μ_i, il sistema ammette una distribuzione stazionaria di probabilità.

2. Per ottenere il tempo trascorso da un pezzo nel sistema, occorre calcolare i valori attesi dei tempi trascorsi mediamente in coda dai pezzi nelle varie stazioni, W_{qj}. I pezzi di tipo 1 visitano (esattamente una volta) solo le stazioni *A* e *C*. Dunque:

$W_{qA} = 1/(\mu_A - \lambda_A) - 1/\mu_A = 1/50 - 1/200 = 0.015$ settimane = 36 minuti;

$W_{qC} = 1/(\mu_C - \lambda_C) - 1/\mu_C = 1/63.06 - 1/178.06 = 0.01$ settimane = 24.58 minuti;

a questi valori vanno aggiunti, ovviamente i tempi di lavorazione specifici del pezzo di tipo 1, ottenendo così:

$W_1 = W_{qA} + 1/\mu_{1A} + W_{qC} + 1/\mu_{1C} = 36 + 20 + 24.58 + 10 = 90.58$ minuti.

<u>Problema 5</u>

Un impianto produce motori per autovettura. Ciascun motore entra nel sistema attraverso una *stazione di carico/scarico*, nel quale viene montato su un pallet. Di lì il pallet (+ motore) viene poi avviato a un *centro di lavorazione*, e infine visita una *stazione di collaudo*, in cui viene verificata la qualità delle operazioni precedenti, e, se necessario, rispedito al centro di lavorazione, altrimenti esce dal sistema. Non appena un motore (finito) viene smontato dal pallet, ce n'è sempre uno pronto per esservi montato. Tutti i tempi di processamento (della stazione di carico/scarico, del centro di lavorazione, del collaudo) hanno distribuzione esponenziale. Mediamente, in un'ora, la stazione di carico/scarico è in grado di smontare da e montare su pallet 6 motori, il centro di lavorazione di processarne 5, mentre la stazione di collaudo ha la capacità di ispezionarne 25. Il 20% dei motori ispezionati sono rimandati indietro al centro di lavorazione, che li tratta come se fossero nuovi. Tutte le stazioni hanno un solo servente. Nel sistema sono presenti 3 pallet. Si trascurino i tempi di trasporto; tutte e tre le stazioni hanno un buffer d'ingresso a due posti.

1) Associare al sistema un'opportuna rete di code, e calcolare il valore atteso del numero di pezzi nella stazione di collaudo.

2) Supponiamo ora che i *centri di lavorazione* siano due, in parallelo, e si consideri lo stato del sistema in cui sono presenti 2 pallet nei centri di lavorazione e 1 nel centro di collaudo (e dunque, nessuno nella stazione di carico/scarico). Scrivere l'equazione di equilibrio per questo stato.

SOLUZIONE:

1. Il sistema può essere rappresentato da una rete di code chiusa del tipo visto nel corso: infatti, il fatto che i buffer abbiano due posti, essendoci in tutto tre pallet, equivale a supporre che abbiano capacità infinita. Nel seguito, identifichiamo le stazioni di carico/scarico, lavorazione e collaudo coi numeri 1, 2 e 3 rispettivamente. Dalle equazioni dei visit count, posto $v_1 = 1$, si ottiene $v_2 = v_3 = 1.25$. Di conseguenza, usando la formula $x_j = v_j / \mu_j$. si ha $x_1 = 10$ minuti; $x_2 = 15$ minuti; $x_3 = 3$ minuti. Poiché ogni stazione è monoservente, si ha $f_j(n_j) = x_j^{nj}$ per $j = 1, 2, 3$. Per il calcolo dei $G(j,n)$ si può fare uso dell'espressione semplificata, e ottenere:

n j	1	2	3
0	1	1	1
1	10	25	28
2	100	475	559
3	1000	8125	9802

a questo punto il valore atteso del numero di pezzi nella stazione di collaudo può essere calcolato applicando la definizione di tale valore atteso, ossia

$$N_3 = 1\ Pr\ (n_3{=}1) + 2\ Pr\ (n_3{=}2) + 3\ Pr\ (n_3{=}3)$$

ove i valori di probabilità si ottengono da

$$Pr\ (n_M{=}k) = f_M(k)\ \frac{G(M-1;N-k)}{G(M;N)}$$

e sono pari a $Pr\ (n_3{=}1) = 3\ (475/9802)$; $Pr\ (n_3{=}2) = 9\ (25/9802)$; $Pr\ (n_3{=}3) = 27\ (1/9802)$ e dunque $N_3 = 0.145 + 2\ (0.022) + 3\ (0.002) = 0.195$.

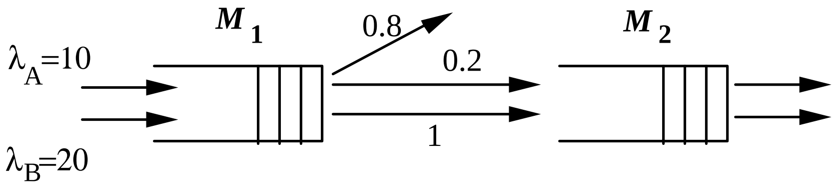
2. Basta uguagliare le probabilità di entrata e di uscita dallo stato (0,2,1) (per unità di tempo). La probabilità di uscire da tale stato è data da

$$(2\mu_2 + \mu_3)\, P(0,2,1)$$

mentre quella di entrarvi è data da

$$\mu_1\, P(1,1,1) + 2\mu_2\, P(0,3,0) + 0.2\, \mu_3\, P(0,1,2).$$

Problema 6



Si consideri la rete di code illustrata in figura. Essa è costituita da due centri di lavorazione, M_1 e M_2, ciascuno con un solo servente. Due tipi di pezzi circolano nel sistema, A e B. Tutti i pezzi di tipo A visitano il centro M_1; dopodiché l'80% di tali pezzi esce dal sistema, mentre il rimanente 20% subisce una lavorazione aggiuntiva sul centro M_2, dopo la quale esce dal sistema. Tutti i pezzi di tipo B visitano invece M_1 e poi M_2. Gli arrivi al sistema sono di tipo poissoniano, di parametro λ_A = 10 pezzi/ora e λ_B = 20 pezzi/ora. Tutti i tempi di lavorazione sono esponenzialmente distribuiti, e i centri di lavorazione sono dotati di buffer d'ingresso di capacità sufficientemente elevata da potersi considerare infiniti. I valori attesi dei tempi di lavorazione dei vari centri per ciascun tipo di pezzo sono dati nella seguente tabella, e sono espressi in _minuti_:

	M_1	M_2
A	2.4	7.5
B	1.2	2

1. Verificare che il sistema ammette una distribuzione stazionaria di probabilità.

2. Calcolare il valore atteso del tempo di permanenza nel sistema *per un pezzo di tipo B*.

SOLUZIONE:

1. Per verificare la stabilità del sistema, occorre calcolare i valori di λ_i e μ_i per ognuno dei centri. Per i λ_i , basta sommare i valori medi degli arrivi di ciascun tipo di pezzo: λ_1= 30 pezzi/ora, λ_2 = 2 + 20 = 22 pezzi/ora. Calcoliamo ora i valori di $1/\mu_i$ per ogni centro: basta effettuare la somma dei tempi di processamento, pesata con le rispettive frazioni degli arrivi di ciascun tipo di pezzo. Si ha:

$1/\mu_1$ = (1/3) 2.4 + (2/3) 1.2 = 1.6 minuti

$1/\mu_2$ = (2/22) 7.5 + (20/22) 2 = 2.5 minuti ciò corrisponde a μ_1 = 37.5 pezzi/ora; μ_2 = 24 pezzi/ora. Poiché ciascun λ_i è strettamente inferiore al corrispondente μ_i, il sistema ammette una distribuzione stazionaria di probabilità.

2. Per ottenere il tempo trascorso da un pezzo nel sistema, occorre calcolare i valori attesi dei tempi trascorsi mediamente in coda dai pezzi nelle varie stazioni, W_{qj}. I pezzi di tipo *B* visitano (esattamente una volta) le due stazioni. Dunque:

$W_{q1} = 1/(\mu_1 - \lambda_1) - 1/\mu_1 = 1/7.5 - 1/37.5 = 0.106$ ore = 6.4 minuti;

$W_{q2} = 1/(\mu_2 - \lambda_2) - 1/\mu_2 = 1/2 - 1/24 = 0.458$ ore = 27.5 minuti;

a questi valori vanno aggiunti, ovviamente i tempi di lavorazione specifici del pezzo di tipo *B*, ottenendo così:

$W_B = W_{q1} + 1/\mu_{1B} + W_{q2} + 1/\mu_{2B} = 6.4 + 1.2 + 27.5 + 2 = 37.1$ minuti.

<u>Problema 7</u>

Un impianto per la produzione di orologi meccanici è costituito da due centri di lavorazione in parallelo, *A* e *B*, dotati ambedue di buffer d'ingresso molto ampi. I grezzi per la costruzione degli orologi arrivano con distribuzione esponenziale nella misura di 30 al giorno, e vengono instradati un terzo al centro *A* e i rimanenti due terzi al centro *B*. Tutti i tempi di lavorazione hanno distribuzione esponenziale; il centro *A* è in grado di lavorare 35 pezzi al giorno, il centro *B* 30 al giorno. Siccome la produzione richiede una precisione estrema, si adotta una sorta di "controllo incrociato" di qualità che funziona nel seguente modo: una frazione *p* dei pezzi uscenti dal centro *A*, anziché uscire dal sistema, va in coda a *B*, che verificherà la correttezza delle lavorazioni effettuate da *A* (impiegando comunque in media lo stesso tempo che impiegherebbe per lavorare un pezzo nuovo); in modo analogo, una frazione (1-*p*) dei pezzi uscenti da *B*, anziché uscire dal sistema, va in coda a *A*, che pure effettuerà la verifica della precisione delle operazioni compiute da *B* (anch'esso impiegando in media lo stesso tempo che impiegherebbe per lavorare un pezzo nuovo).

1) Determinare per quale intervallo di valori di *p* il sistema ammette una distribuzione stazionaria di probabilità.

2) *Ogniqualvolta* un pezzo entra nel centro *B*, viene stampato su di esso un bollo di controllo. Supponendo *p* = 0.2, qual è il valore atteso del numero di bolli stampati nell'arco di una giornata? E infine, qual è il tempo medio che un pezzo complessivamente trascorre nella stazione *B*?

SOLUZIONE:

1. Scrivendo le formule per il calcolo delle frequenze effettive degli arrivi alle varie stazioni con le formule delle reti aperte, si ha (essendo λ_A = 10 pezzi/giorno e λ_B = 20 pezzi/giorno):

$\lambda_A' = 10 + (1-p)\,\lambda_B'$

$\lambda_B' = 20 + p\,\lambda_A'$

sostituendo l'espressione di λ_A' nella seconda equazione si ottiene, dopo facili passaggi:

$$(p^2 - p + 1)\lambda_B' = 20 + 10\,p$$

e dunque occorre studiare per quali valori di p risulta

$$\lambda_B' = \frac{20 + 10\,p}{p^2 - p + 1} < 30$$

si osservi che il denominatore è sempre positivo, per ogni p. Moltiplicando ambo i membri per $(p^2 - p + 1)$ si ha dunque

$$30\,p^2 - 40\,p + 10 > 0;$$

le radici di tale polinomio sono 1 e 1/3. Essendo il segno del primo coefficiente positivo, ed essendo ovviamente privi di significato fisico valori di p superiori a 1 o negativi, l'intervallo di valori cercato è [0, 1/3). Effettuando un analogo calcolo per λ_A', si scopre che la condizione di stabilità è verificata per qualunque valore di p, e dunque l'intervallo di valori cercato rimane [0, 1/3).

2. La quantità richiesta coincide, evidentemente, con il numero (medio) di arrivi al centro B in un giorno. Se $p = 0.2$, dall'espressione calcolata al precedente punto si ha $\lambda_B' = 26.19$ pezzi/giorno. Per conoscere invece il tempo che ciascun pezzo mediamente trascorre in B, dobbiamo calcolare il visit count, che è dato da λ_B' diviso il valore medio degli arrivi complessivi al sistema, che è 30 pezzi/giorno. Ossia $v_B = 0.873$. Dunque, poiché per ogni visita il tempo medio di permanenza in B è dato da $W_B = 1/(\mu_B - \lambda_B') = 1/(30-26.19) = 1/3.809 = 0.2625$ giorni, il tempo complessivo di permanenza si otterrà come prodotto $v_B W_B = 0.299$ giorni.

<u>Problema 8</u>

Un impianto produttivo è costituito da tre centri di lavorazione, M_1, M_2 e M_3. Le tre macchine sono organizzate in un pipeline, ma i pezzi possono saltare alcune delle macchine. Il sistema è progettato per lavorare tre tipi di pezzi, *A*, *B* e *C*. Gli arrivi di ciascun tipo di pezzo sono poissoniani. Arrivano mediamente λ^A = 20 pezzi/giorno, λ^B = 50 pezzi/giorno e λ^C = 10 pezzi/giorno. I vari tipi di pezzi richiedono i tre centri di lavorazione con tempi di servizio diversi, espressi *in minuti* nella tabella indicata:

k	M_1	M_2	M_3		λ^k
A	5	–	10	100%	20
B	4	5	–	40%	50
	4	–	5	60%	
C	–	10	–	100%	10

Si noti che il 40% dei pezzi di tipo *B* subiscono la seconda operazione su M_2, mentre il restante 60% su M_3. Tutti i tempi di servizio sono esponenzialmente distribuiti. In base a questi dati, e considerando che un giorno è composto di 8 ore lavorative, calcolare:

1) Qual è il collo di bottiglia (macchina avente la più elevata utilizzazione);

2) Il valore atteso del tempo di attraversamento di un pezzo di tipo *B*.

SOLUZIONE:

1. La risposta a questo punto potrebbe anche essere data solo sulla base di un'osservazione empirica della tabella, osservando qual è la macchina più carica. Tuttavia, poiché ci servirà per il punto 2, effettuiamo i conti in modo sistematico. Calcoliamo allora i valori di $1/\mu_i$ per ogni centro: basta effettuare la somma dei tempi di processamento, pesata con le rispettive frazioni di ciascun tipo di pezzo. Si ha:

$1/\mu_1$ = (2/7) 5 + (5/7) 4 = 4.285 minuti

$1/\mu_2$ = (2/3) 5 + (1/3) 10 = 6.667 minuti

$1/\mu_3$ = (2/5) 10 + (3/5) 5 = 7 minuti

ciò corrisponde a μ_1 = 0.233 pezzi/minuto; μ_2 = 0.15 pezzi/minuto; μ_3 = 0.143 pezzi/minuto. Dalla tabella otteniamo immediatamente che le frequenze effettive degli arrivi sono date da λ_1' = 70 pezzi/giorno = 0.145 pezzi/minuto; λ_2' = 30 pezzi/giorno = 0.0625 pezzi/minuto; λ_3' = 50 pezzi/giorno = 0.104 pezzi/minuto. Poiché ciascun λ_i' è strettamente inferiore al corrispondente μ_i, il sistema ammette una distribuzione stazionaria di probabilità. Il collo di bottiglia è la macchina avente il massimo valore di utilizzazione, ossia λ_3' / μ_3 = 0.729.

2. Per ottenere il tempo trascorso da un pezzo nel sistema, occorre calcolare i valori attesi dei tempi trascorsi mediamente in coda dai pezzi nelle varie stazioni, W_{qj}. I pezzi di tipo

B visitano esattamente una volta la stazione M_1, e con probabilità 0.4 e 0.6 rispettivamente le stazioni M_2 e M_3. Dunque:

W_{q1}= $1/(\mu_1 - \lambda_1') - 1/\mu_1$= 7.08 minuti;

W_{q2}= $1/(\mu_2 - \lambda_2') - 1/\mu_2$= 4.76 minuti;

W_{q3}= $1/(\mu_3 - \lambda_3') - 1/\mu_3$= 18.64 minuti;

a questi valori vanno aggiunti, ovviamente i tempi di lavorazione specifici del pezzo di tipo *B*, ottenendo così:

$W_B = W_{q1} + 1/\mu_{1B} + 0.4\ (W_{q2} + 1/\mu_{2B}) + 0.6\ (W_{q3} + 1/\mu_{3B}) = 7.08 + 4 + 0.4\ (4.76 + 5) + 0.6\ (18.64 + 5) = 29.17$ minuti.

<u>Problema 9</u>

In un'officina di lavorazione arrivano dei grezzi che subiscono i seguenti passi: anzitutto vengono preparati manualmente (disimballaggio, montaggio su pallet etc.) in una stazione apposita, quindi sono avviati a uno di due centri di lavorazione (A e B) ove vengono tagliati e trasformati nel prodotto finito, infine vanno su un centro di lavaggio e misura che decreta se il pezzo è buono o meno: in quest'ultimo caso, viene rispedito alla stazione di preparazione e il suo iter ricomincia.

Gli arrivi dall'esterno sono poissoniani; tutti i tempi di servizio sono esponenzialmente distribuiti. Il valore atteso del numero di arrivi è 11 pezzi/ora. I valori attesi dei tempi di lavorazione per un pezzo sono: 10 minuti per la preparazione; 6 minuti per il centro A; 4 minuti per il centro B; 5 minuti per lavaggio e misura.

— La stazione di preparazione consiste di un numero *sufficientemente elevato di operai* (teoricamente infinito); le altre stazioni sono monoservente.
— Il 40% dei pezzi preparati viene avviato al centro A, il rimanente 60% al centro B;
— Il 5% dei pezzi misurati risultano non conformi alle specifiche e quindi rimandati alla stazione di preparazione.

1) Verificare che il sistema ammette una distribuzione stazionaria di probabilità.

2) Calcolare il valore atteso del tempo speso nel sistema un pezzo.

SOLUZIONE:

1. Al solito, determiniamo le frequenze effettive degli arrivi ai vari centri (P = preparazione, L = lavaggio e misura) con le formule delle reti aperte. Si ha:

$\lambda_P' = \lambda_P + 0.05\ \lambda_L'$

$\lambda_A' = 0.4\ \lambda_P'$

$\lambda_B' = 0.6\ \lambda_P'$

$\lambda_L' = \lambda_A' + \lambda_B'$

da cui si ottiene, sostituendo i valori numerici (λ_P = 11 pezzi/ora):

λ_P'= 11.58 pezzi/ora; λ_A'= 4.63 pezzi/ora; λ_B'= 6.94 pezzi/ora; λ_L'= 11.58 pezzi/ora.

La stazione di preparazione è composta da un numero elevato di serventi, e dunque non pone problemi di stabilità. Per le altre, si ha μ_A = 10 pezzi/ora, μ_B = 15 pezzi/ora, μ_L = 12 pezzi/ora. Poiché ciascun λ_i è inferiore al corrispondente μ_i, il sistema ammette una distribuzione stazionaria di probabilità.

2. Per rispondere al quesito, calcoliamo dapprima i visit count, ottenibili dividendo le frequenze effettive degli arrivi a ciascun centro per la frequenza complessiva di arrivi dall'esterno λ_P. Si ottiene così $v_P = v_L = 1.052$; $v_A = 0.421$; $v_B = 0.631$. I tempi medi di attraversamento dei centri *A*, *B* e *L* sono dati da:

$W_A = 1/(\mu_A - \lambda_A') = 0.186$ ore

$W_B = 1/(\mu_B - \lambda_B') = 0.124$ ore

$W_L = 1/(\mu_L - \lambda_L') = 2.38$ ore

Il tempo medio diattraversamento del centro di preparazione è dato invece dal solo tempo medio di preparazione, essendovi un numero molto elevato di serventi, ossia 0.167 ore. Il tempo medio totale di permanenza del sistema si ottiene quindi moltiplicando ciascun W_i per il rispettivo visit count e sommando:

$W = (1.052)\ (0.167) + (0.421)\ (0.186) + (0.631)\ (0.124) + (1.052)\ (2.38) = 2.835$ ore.

Problema 10

A un centro di lavorazione M_1 arrivano dei fogli di lamiera da tagliare (per ricavarne fiancate di automobili), al ritmo medio di 2 fogli / ora. Successivamente, ciascuna fiancata ottenuta viene passata alla fase di piegatura e misura, effettuata da un centro di lavorazione M_2. L'80% delle fiancate lavorate da M_2 escono quindi dal sistema, mentre il rimanente 20% è costituito da pezzi difettosi che vengono spediti ad un'altra stazione M_3, che ne riesegue il taglio, e che lavora a velocità dimezzata rispetto a M_1. Dopodiché, il pezzo torna a M_2.

Gli arrivi dall'esterno sono poissoniani; tutti i tempi di servizio sono esponenzialmente distribuiti. I valori attesi dei tempi di lavorazione per ogni arrivo sono: 12 minuti per M_1; 18 minuti per M_2; 24 minuti per M_3.

1) Verificare che il sistema ammette una distribuzione stazionaria di probabilità.

2) Calcolare la probabilità che un pezzo arrivi alla stazione M_3 e trovi *la coda* vuota.

SOLUZIONE:

1. Al solito, determiniamo le frequenze effettive degli arrivi ai vari centri con le formule delle reti aperte. Si ha:

$\lambda_1' = \lambda_1$

$\lambda_2' = \lambda_1' + \lambda_3'$

$\lambda_3' = 0.2\ \lambda_2'$

da cui si ottiene, sostituendo i valori numerici:

$\lambda_1' = 2$ fogli/ora; $\lambda_2' = 2.5$ fogli/ora; $\lambda_3' = 0.5$ fogli/ora.

Inoltre $\mu_1 = 5$ fogli/ora; $\mu_2 = 3.333$ fogli/ora; $\mu_3 = 2.5$ fogli/ora. Poiché ciascun λ_i' è inferiore al corrispondente μ_i, il sistema ammette una distribuzione stazionaria di probabilità.

2. La probabilità richiesta è la somma delle probabilità che il centro M_3 sia vuoto e che contenga esattamente un cliente. Ricordiamo che $P_0 = 1 - \rho$ mentre $P_1 = \rho\ (1 - \rho)$. Da quanto calcolato prima, per M_3 si ha $\rho_3 = \lambda_3'/\mu_3 = 0.2$. Dunque

$$\Pr(\text{coda di } M_3 \text{ vuota}) = P_0 + P_1 = 0.8 + 0.2\ (0.8) = 0.96.$$

Problema 11

Un sistema di lavorazione per la produzione di bielle si compone di una stazione di carico e scarico (C/S), un centro di lavorazione (L) e un centro di riparazione (R). Quando una biella finita giunge alla stazione di carico e scarico, questo la smonta da un pallet e vi monta un nuovo grezzo (che supponiamo sempre disponibile). Il centro di lavorazione effettua delle operazioni di tipo meccanico alla fine delle quali, se il pezzo è riuscito bene, viene inviato direttamente alla stazione di carico e scarico per l'uscita dal sistema; altrimenti, prima di uscire, viene spedito alla stazione di riparazione (e successivamente al carico/scarico).

Tutti i tempi di lavorazione risultano essere esponenzialmente distribuiti, con valori medi: $1/\mu_{C/S} = 6$ minuti; $1/\mu_L = 7.5$ minuti; $1/\mu_R = 10$ minuti. Il 20% dei pezzi lavorati risultano difettosi. Nel sistema sono presenti 2 pallet e ciascuna stazione è costituita da un solo servente.

1) Per aumentare la produttività (media) del sistema, vi viene chiesto di scegliere tra l'opzione di (*i*) aumentare di 1 il numero di pallet presenti nel sistema e quella di (*ii*) aprire un secondo centro di lavorazione. Associando al sistema un'opportuna rete di code, sapreste dire quale opzione è più conveniente, e perché?

2) Il proprietario dell'officina vi chiama e vi pone il seguente problema: "Voglio portare la produttività (media) dell'officina al livello di almeno 60 bielle al giorno. Intanto, ho

deciso di affiancare al centro di lavorazione un secondo centro in parallelo. Mi dica lei ora quanti pallet debbo inserire per raggiungere questo scopo.” Tenendo conto che una giornata è fatta di 8 ore lavorative, cosa gli rispondete?

SOLUZIONE:

1. Il sistema può essere rappresentato da una rete di code chiusa del tipo visto nel corso. Nel seguito, identifichiamo le stazioni di carico/scarico, lavorazione e riparazione coi numeri 1, 2 e 3 rispettivamente. Le equazioni dei visit count danno:

$v_1 = v_3 + 0.8\ v_2$

$v_2 = v_1$

$v_3 = 0.2\ v_2$

da cui, posto $v_1 = 1$, si ottiene $v_2 = 1$ e $v_3 = 0.2$. Di conseguenza, usando la formula $x_j = v_j / \mu_j$. si ha $x_1 = 6$ minuti; $x_2 = 7.5$ minuti; $x_3 = 2$ minuti.
Supponiamo dapprima (*i*) ogni stazione monoservente, e che vi siano 3 pallet. In tal caso $f_j(n_j) = x_j^{n_j}$ per $j = 1, 2, 3$. Per il calcolo dei $G(j,n)$ si può fare uso dell'espressione semplificata, e ottenere:

n j	1	2	3
0	1	1	1
1	6	13.5	15.5
2	36	137.25	168.25
3	216	1245.375	1581.875

da questa tabella si ottiene, per il throughput: $X = G(3,2)/G(3,3) = 0.106$ pezzi/minuto = 6.381 pezzi/ora.
Rifacciamo ora i conti, supponendo (*ii*) $N = 2$ ma la seconda stazione con due serventi, il che dà $f_2(n_2) = x_2^{n_2} / n_2!$. Stavolta non è più possibile usare l'espressione semplificata per il calcolo della tabella. In particolare, avremo che $G(2,2) = f_2(0)\ G(1,2) + f_2(1)\ G(1,1) + f_2(2)\ G(1,0) = (1)\ (36) + (7.5)\ (6) + (7.5^2/2)\ (1) = 109.125$ e, eseguendo l'analogo calcolo, $G(2,3) = 115.75$:

n j	1	2	3
0	1	1	1
1	6	13.5	15.5
2	36	109.125	140.125

Il nuovo valore del throughput: $X = G(3,1)/G(3,2) = 0.111$ pezzi/minuto = 6.63 pezzi/ora è migliore del precedente e dunque questa alternativa è preferibile.

2. Con il valore di throughput appena calcolato, la produttività è di circa 53 pezzi al giorno. Proviamo ad aumentare di uno il numero di pallet. Si osservi che ora $f_2(3) = 7.5^3/4$. Si ottiene la seguente riga da aggiungere alla precedente tabella:

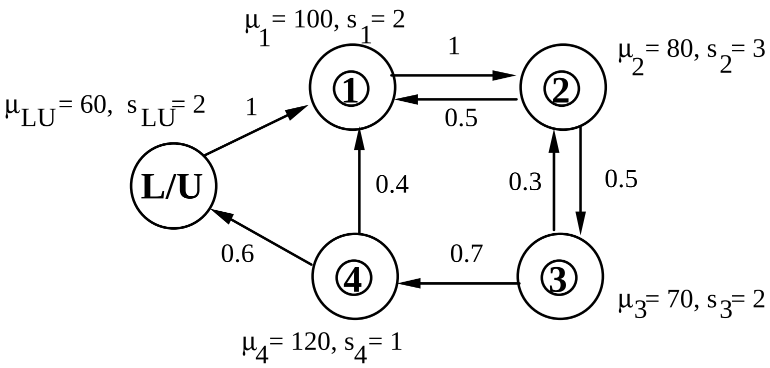
3	216	760.21	1040.46

che consente di calcolare come throughput il valore X = 0.134 pezzi/minuto, ovvero 64.6 pezzi/giorno, rispettando così la specifica richiesta. Dunque, basta aggiungere un solo pallet.

<u>Problema 12</u>

Un sistema manifatturiero è costituito da quattro centri di lavorazione e una stazione di carico e scarico, connessi come in figura, nella quale sono anche indicate le probabilità di instradamento, le capacità produttive delle varie stazioni e il numero di serventi in ogni stazione. I pezzi in lavorazione entrano ed escono dal sistema attraverso la stazione di carico e scarico, ove avviene il montaggio e lo smontaggio dal pallet. Il numero di pallet nel sistema è costante, tutti i tempi di lavorazione sono esponenziali, ogni stazione ha un buffer d'ingresso sufficientemente grande da garantire che c'è sempre posto per un pezzo in arrivo. Si vuole calcolare:

1) qual è la capacità produttiva dell'impianto, ovvero il numero massimo (teorico) di pezzi che il sistema è in grado di produrre in un'ora;
2) qual è il numero di pezzi prodotti in media in un'ora se nel sistema sono presenti N=2 pallet, supponendo ora che tutti i centri di lavorazione abbiano un solo servente.



SOLUZIONE:

1. Il sistema è una rete di code chiusa del tipo visto nel corso. Le equazioni dei visit count danno:

$v_{L/U} = 0.6v_4$

$v_1 = v_{L/U} + 0.4v_4 + 0.5\,v_2$

$v_2 = v_1 + 0.3\,v_3$

$v_3 = 0.5\,v_2$

$v_4 = 0.7\,v_3$

da cui, posto $v_{L/U} = 1$, si ottiene $v_1 = 4.047$;$v_2 = 4.76$; $v_3 = 2.38$; $v_4 = 1.667$. Il rapporto $R_j = s_j \mu_j / v_j$ rappresenta il numero massimo teorico di pezzi che il centro j può produrre in un'ora. Calcolando R_j per ognuno dei cinque centri, si ha che il minimo di tali valori rappresenta la produttività massima (teorica) dell'impianto. Tale valore si ottiene in corrispondenza al centro 1, e vale 49.5 pezzi/ora.

2. Si tratta di compilare la solita tabella per le reti di code chiuse. Si ha $x_{L/U} = 1$ minuto; $x_1 = 2.42$ minuti; $x_2 = 3.57$ minuti; $x_3 = 2.04$ minuti; $x_4 = 0.828$ minuti. Poiché ogni stazione è monoservente, si ha $f_j(n_j) = x_j^{n_j}$ per $j = 1, 2, 3$. Per il calcolo dei $G(j,n)$ si può fare uso dell'espressione semplificata, e ottenere:

n j	L/U	1	2	3	4
0	1	1	1	1	1
1	1	3.42	6.99	9.03	9.858
2	1	9.276	34.23	52.65	60.81

a questo punto il valore atteso del numero di pezzi prodotti in un'ora è $X = G(4,1)/G(4,2) = 0.162$ pezzi/minuto = 9.72 pezzi/ora (ben lontani dalla massima produttività possibile).

Problema 13

Un sistema manifatturiero per la costruzione di caldaie è costituito da due centri di lavorazione in cascata, ciascuno monoservente. Ogni caldaia viene dapprima lavorata dal centro 1, quindi dal centro 2, e infine lascia il sistema. I tempi di servizio sono ritenuti esponenziali; le capacità produttive dei due centri sono pari a $\mu_1=6$ pezzi/ora e $\mu_2=5$ pezzi/ora.

Esistono due possibili architetture per il sistema. In una prima architettura, i grezzi giungono al centro 1 dall'esterno con tempi di interarrivo esponenziali e frequenza media di 4 pezzi/ora. Nella seconda architettura, invece, le due stazioni sono unite a una stazione di carico/scarico tramite un circuito AGV. I pezzi viaggiano su pallet; quando un pezzo è terminato esso viene subito rimpiazzato da un grezzo, nella stazione di carico e scarico. Il numero di pallet presenti è pari al valor medio di pezzi presenti nel sistema *con la prima architettura*. Si supponga che i tempi di carico e scarico siano trascurabili. In questa assunzione è implicito il fatto che i grezzi si suppongono sempre disponibili: ciò renderà possibile un throughput maggiore, evidentemente, ma andranno sostenuti dei costi.

Per ogni caldaia prodotta, si consegue un utile netto di 1 milione. Se si opta per la seconda soluzione, però, c'è da sostenere un costo complessivo di ammortamento del sistema che si può pensare proporzionale al numero di pallet presenti, e precisamente pari a 1 milione/pallet al giorno. (Una giornata lavorativa è composta di 8 ore).

Quale architettura è più conveniente (e perché)?

SOLUZIONE:

Come prima cosa occorre valutare il numero medio di pezzi presenti nel sistema quando gli arrivi dall'esterno sono esponenziali, e il sistema è quindi modellabile come una rete aperta. Dalle semplici formule dei sistemi M/M/1 si ha (essendo evidentemente λ la frequenza effettiva degli arrivi ad ambedue i centri):

$N_1 = \lambda W_1 = \lambda / (\mu_1 - \lambda) = 2$

$N_2 = \lambda W_2 = \lambda / (\mu_2 - \lambda) = 4$

Dunque, il numero medio di pezzi nel sistema è pari a 6. Per valutare la convenienza di un'architettura rispetto all'altra, occorre valutare il throughput di una rete chiusa con $N = 6$ pallet costituita dai due centri e da una stazione di carico e scarico. Poiché ogni pezzo visita ogni centro esattamente una volta, si ha $x_1 = 10$ minuti e $x_2 = 12$ minuti. Si noti che, assumendo trascurabili i tempi di carico e scarico, tale centro non comparirà nella tabella per il calcolo dei $G(j,n)$ (in effetti, ciò si ottiene essendo $x_{C//S} = 0$). Poiché ogni stazione è monoservente, si ha $f_j(n_j) = x_j^{n_j}$ per $j = 1, 2$. Per il calcolo dei $G(j,n)$ si può fare uso dell'espressione semplificata, e ottenere (i tempi sono in minuti):

n *j*	1	2
0	1	1
1	10	22
2	100	364
3	1000	5368
4	10000	74416
5	100000	992992
6	1000000	12915904

di qui il throughput vale $X = G(2,5)/G(2,6) = 0.0768$ pezzi/minuto = 36.9 pezzi/giorno.

Dunque, con la prima architettura, l'utile è di 32 milioni/giorno. Con la seconda architettura, essendo il throughput più alto, l'utile dovuto alla produzione di caldaie è di 36.9 milioni/giorno. Dovendo però pagare 6 milioni/pallet al giorno di costi di ammortamento, risulta più conveniente la prima architettura.

<u>Problema 14</u>

In un impianto per la produzione di laminati in alluminio, arrivano dei grezzi che subiscono le seguenti lavorazioni: la lamiera viene piegata in una prima stazione, quindi viene avviata ad una cella ove viene sottoposta ad un particolare trattamento elettrochimico (anodizzazione). I pezzi ben riusciti passano quindi ad una fase finale di lavaggio e imballaggio; altrimenti tale fase deve essere preceduta da una fase di rifinitura.

Gli arrivi dall’esterno sono poissoniani; tutti i tempi di servizio sono esponenzialmente distribuiti. Il valore atteso del numero di arrivi è 30 pezzi/turno, un turno consiste di 8 ore. La prima stazione (costituita da un solo operaio) impiega mediamente 12 minuti per piegare una lamiera. Una volta piegata, la lamiera viene prelevata da un robot che la trasporta ad una cella elettrolitica. Vi sono moltissime celle, tutte identiche. Per ogni pezzo, il trattamento richiede mediamente 240 minuti. Solo una percentuale p di pezzi risulta ben riuscita dopo l'anodizzazione. La rimanente frazione $(1 - p)$ richiede una fase di rifinitura, effettuata manualmente da un operaio che impiega mediamente 48 minuti per ogni pezzo difettoso. La fase finale è pure effettuata da un operaio, che è in grado di processare, nell'arco di un turno lavorativo, 50 pezzi finiti.

1) Qual è il minimo valore di p affinché il sistema ammetta una distribuzione stazionaria di probabilità?

2) Supponendo $p = 0.9$, qual è il numero medio di pezzi nel sistema?

SOLUZIONE:

1. Iniziamo calcolando la frequenza effettiva degli arrivi a ciascun centro di lavorazione. Tale frequenza è evidentemente pari a $\lambda = 30$ pezzi/turno per il centro di piegatura (P), quello di anodizzazione (A) e quello di lavaggio (L), mentre è pari a $(1–p)\lambda$ per il centro di rifinitura (R). Osservando che $\mu_P = 40$ pezzi/turno e che il centro di anodizzazione è costituito da un numero molto grande di serventi, gli unici problemi, dal punto di vista dell'esistenza di una distribuzione stazionaria di probabilità, possono venire dal centro di rifinitura. Essendo $\mu_R = 10$ pezzi/turno, perché vi sia una distribuzione stazionaria di probabilità deve valere la:

$$(1–p)\lambda < \mu_R$$

ovvero

$$p > 1 – 1/3 = 2/3.$$

2. Dalle semplici formule dei sistemi M/M/1 e M/M/8 si ha ($\mu_A = 2$ pezzi/turno):

$$N_P = \lambda W_P = \lambda / (\mu_P – \lambda) = 3$$

$$N_A = \lambda / \mu_A = 15$$

$$N_R = (1–p) \lambda W_R = (1–p) \lambda / (\mu_R – (1–p)\lambda) = 3/7 = 0.428$$

$$N_L = \lambda W_L = \lambda / (\mu_L – \lambda) = 1.5$$

e dunque il numero medio di pezzi nel sistema è pari a 19.92.

Problema 15

Una stazione di servizio è caratterizzata da tempi di servizio esponenziali con valore atteso $1/\mu$ e da arrivi poissoniani di parametro λ. La stazione ha un solo servente ed è priva di buffer. Quindi, se un cliente arriva e trova il servente occupato, se ne va (e si comporta quindi come chi ha già usufruito del servizio).

Si chiede di calcolare la probabilità stazionaria di ciascuno degli stati del sistema.

(*Il problema può essere risolto in almeno due modi. Uno di questi è un'applicazione diretta della legge di Little: in tal caso, attenzione a esprimere correttamente il tempo medio trascorso nel sistema da un generico cliente che arriva alla stazione*).

SOLUZIONE:

1. Il modo forse più semplice di risolvere il problema è quello di scrivere direttamente le equazioni di equilibrio per questo particolare processo di nascita e morte, considerando che gli stati possibili sono solo due: servente libero o servente occupato. Le corrispondenti probabilità saranno indicate con P_0 e P_1. La probabilità di trovarsi nello stato 0 e di uscirne è ovviamente λP_0 , mentre quella di non trovarsi nello stato 0 e di entrarvi è μP_1. Dovendo valere l'uguaglianza, all'equilibrio:

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \tag{1}$$

l'equazione di equilibrio relativa allo stato 1 è esattamente identica a questa. Per trovare i valori di P_0 e P_1 occorre fare uso della relazione $P_0 + P_1 = 1$, che ci consente quindi di scrivere:

$$P_0 = \mu / (\mu+\lambda);\ P_1 = \lambda / (\mu+\lambda).$$

Un secondo modo poteva essere quello di usare direttamente la legge di Little $N = \lambda W$. In questo caso, osserviamo anzitutto che N coincide con P_1 (dalla definizione stessa di N). Il tempo medio W trascorso nel sistema da un generico pezzo *non è* però, attenzione, pari a $1/\mu$, perché così non si terrebbe conto dei pezzi che, arrivando, trovano il centro occupato e per i quali dunque questo tempo di permanenza è nullo. Dunque, solo una frazione P_0 riceve effettivamente il servizio, e quindi $W = P_0/\mu$. Sostituendo questo valore nella legge di Little, si riottiene la (1).

Per chi ama complicarsi la vita, segnaliamo che ovviamente l'esercizio poteva risolversi applicando le formule dei sistemi M/M/1/k (con k=1).

Problema 16

Un’officina per la produzione di ammortizzatori per auto è costituita da un centro di lavorazione (A) con servente singolo, il cui tempo di servizio può supporsi distribuito esponenzialmente. Al momento di entrare nel sistema, ciascun pezzo viene montato su un pallet in una stazione di carico e scarico. Il pezzo viene quindi lavorato dalla stazione A e infine torna nella stazione di carico e scarico, allorché è smontato dal pallet, sul quale viene immediatamente montato un nuovo grezzo. La stazione di carico e scarico è anch’essa monoservente, e anche il suo tempo di operazione è distribuito esponenzialmente. Tale stazione è in grado di processare mediamente $\mu_{C/S}$ = 13 pezzi/ora.

Considerando che nel sistema sono presenti $N = 2$ pallet, quanto deve valere (almeno) la capacità produttiva μ_A del centro di lavorazione A affinché il sistema produca, mediamente, 4 pezzi/ora?

SOLUZIONE:

Al solito, andiamo a scrivere la consueta tabella per il calcolo della costante di normalizzazione per le reti di code chiuse, osservando che $x_{C/S} = 1/13$ e lasciando x_A come incognita:

n j	C/S	A
0	1	1
1	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13} + x_A$
2	$\frac{1}{169}$	$\frac{1}{169} + x_A \left(\frac{1}{13} + x_A\right)$

La condizione sul valore del throughput X è quindi

$$\frac{\frac{1}{13} + x_A}{\frac{1}{169} + \frac{1}{13} x_A + x_A^2} = 4$$

Osserviamo che il denominatore del primo membro è sempre positivo (radici immaginarie). Dunque possiamo moltiplicare ambo i membri per il denominatore del primo membro e ottenere, dopo facili passaggi:

$$52\, x_A^2 - 9\, x_A - \frac{9}{13} = 0$$

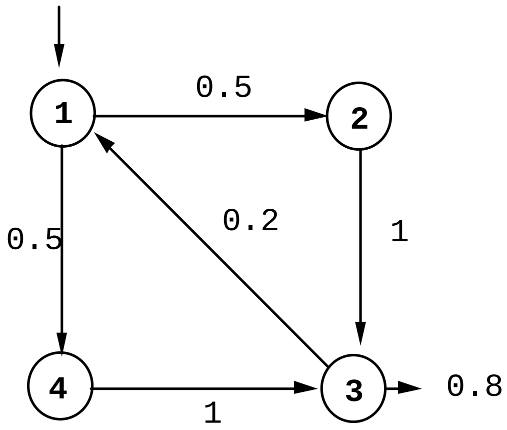
questo polinomio ha radici in $x_A' = 22/104$ e $x_A'' = -6/104$, e la disequazione è soddisfatta per ogni x_A interno a quest'intervallo. Poiché valori negativi di x_A sono ovviamente privi di significato fisico, dovrà dunque essere $0 = x_A = 22/104$. Poiché $\mu_A = 1/x_A$, abbiamo che la *minima* capacità produttiva che soddisfa la specifica sul throughput è

$$\mu_A = \frac{104}{22} = 4.72 \text{ pezzi/ora.}$$

<u>Problema 17</u>

Un impianto produttivo è costituito da quattro centri di lavorazione, come indicato in figura. I pezzi arrivano dall'esterno alla prima macchina secondo un processo poissoniano di valore $\lambda = 8$ p/h. Le probabilità di instradamento sono date in figura. Tutte le stazioni sono monoservente, tutti i tempi di servizio esponenzialmente distribuiti. Per quel che riguarda la stazione 2, vi vengono prospettate due possibilità. La prima prevede che venga installata una macchina più lenta, avente capacità produttiva $\mu_2^{(1)}$ = 8 p/h e che costa ogni mese, di manutenzione, 100 mila lire. Altrimenti, potete optare per una macchina più veloce, avente $\mu_2^{(2)}$ = 10 p/h ma il cui costo di manutenzione mensile è di 220 mila lire. Si consideri inoltre che, a causa del capitale immobilizzato nei pezzi, si sostiene un costo di 1000 lire/h per ogni pezzo presente nel sistema, e che un mese è fatto di 200 ore lavorative.

Dal punto di vista dei costi complessivi, quale macchina è più conveniente installare (e perché)?



SOLUZIONE:

1. Al solito, anzitutto determiniamo le frequenze effettive degli arrivi ai vari centri con le formule delle reti aperte. Si ha:

$\lambda_1' = \lambda + 0.2\, \lambda_3'$

$\lambda_2' = 0.5\, \lambda_1'$

$\lambda_3' = \lambda_2' + \lambda_4'$

$\lambda_4' = 0.5\, \lambda_1'$

da cui si ottiene, sostituendo i valori numerici, λ_2'= 5 pezzi/ora. A questo punto valutiamo i costi e i profitti che si hanno nei due casi. Se si sceglie, per il centro 2, la macchina più lenta, si ha

$$N_2 = \lambda_2' / \mu_2^{(1)} - \lambda_2' = 1.667$$

e dunque, i costi mensili ammontano a 100,000 + 1.667 (200,000) = 433,333 lire/mese. Nel secondo caso si ha

$$N_2 = \lambda_2' / \mu_2^{(2)} - \lambda_2' = 1$$

e dunque, i costi mensili ammontano a 220,000 + 1 (200,000) = 420,000 lire/mese. Dunque, la seconda alternativa risulta più conveniente.

Problema 18

Un centro di lavorazione è costituito da un servente singolo, il cui tempo di servizio è distribuito esponenzialmente con parametro μ = 20 pezzi/ora. I pezzi giungono dall'esterno secondo un processo poissoniano di parametro γ = 30 pezzi/ora. Il centro è dotato di un buffer di ingresso *a un solo posto*. Se un pezzo, quando giunge alla stazione, trova il buffer pieno, viene rigettato.

1) Qual è il valore atteso del numero di pezzi nel sistema?

2) Qual è il valore atteso del tempo trascorso da un generico pezzo nel sistema?

(Attenzione: non è indispensabile — anche se è possibile — applicare le formule dei sistemi M/M/1/k).

SOLUZIONE:

1. Un modo di risolvere il problema è quello di scrivere le equazioni di equilibrio per il processo di nascita e morte. Quella relativa allo stato 0 è:

$$\gamma P_0 = \mu P_1$$

mentre quella relativa allo stato 2 è:

$$\mu P_2 = \gamma P_1$$

a queste va aggiunta la relazione $P_0 + P_1 + P_2 = 1$, e si ottiene perciò

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{\mu} + (\frac{\gamma}{\mu})^2} = \frac{4}{19} = 0.21$$

e inoltre $P_1 = 0.315$ e $P_2 = 0.473$.

A questo punto il calcolo di N può effettuarsi semplicemente applicando la definizione, ossia $N = P_1 + 2\,P_2 = 1.26$.

Altrimenti, ricordandosi la formula dei sistemi M/M/1/k, si poteva applicarla direttamente e scrivere (con $k = 3$):

$$N = \frac{\frac{\gamma}{\mu}}{1 - \frac{\gamma}{\mu}} \quad \frac{(k+1)\,(\frac{\gamma}{\mu})^{k+1}}{1 - (\frac{\gamma}{\mu})^{k+1}} = \frac{24}{19} = 1.26.$$

2. A questo punto, il valore atteso trascorso da un generico pezzo nel sistema si può calcolare semplicemente applicando la legge di Little, e si ha dunque

$$W = \frac{N}{\gamma} = 0.042 \text{ ore} = 2.52 \text{ minuti}$$

si osservi che va usato γ e non il λ effettivo, in quanto anche i pezzi rifiutati concorrono a determinare il tempo medio di permanenza nel sistema.

Problema 19

Un sistema produttivo è costituito da un centro di lavorazione e una stazione di carico e scarico nella quale avviene il montaggio e lo smontaggio dei pezzi su/da pallet. Il centro di lavorazione ha due serventi, ciascuno dei quali è in grado di processare 4 pezzi/ora. Il cantro di carico e scarico è costituito da un singolo servente, di capacità pari a 6 pezzi/ora. Nel sistema sono costantemente presenti $N = 2$ pezzi.

1) si calcoli la probabilità di equilibrio per ciascuno stato della rete.

2) si calcolino il valore atteso del numero di pezzi prodotti in un'ora e il valore atteso del numero di pezzi nel centro di lavorazione.

SOLUZIONE:

1. Per calcolare la probabilità di equilibrio, trattandosi di rete chiusa, occorre comunque conoscere la costante di normalizzazione. Indichiamo con 1 la stazione di carcio e scarico, con 2 quella di lavorazione. Dai dati, si ha $x_1 = 10$ minuti e $x_2 = 15$ minuti. Calcoliamo allora la consueta tabella, facendo attenzione al fatto che il centro di lavorazione ha due serventi, per cui $f_2(2) = x_2^2/2$.

n *j*	1	2
0	1	1
1	10	25
2	100	362.5

dunque $G(2,2) = 362.5$. Gli stati possibili sono tre, e si ha dunque:

$$P(2,0) = \frac{f_1(2)}{G(2;2)} = \frac{x_1^2}{G(2;2)} = 0.276$$

$$P(1,1) = \frac{f_1(1)\, f_2(1)}{G(2;2)} = \frac{x_1\, x_2}{G(2;2)} = 0.414$$

$$P(0,2) = \frac{f_2(2)}{G(2;2)} = \frac{x_2^2/2}{G(2;2)} = 0.31.$$

2. Il valore medio del throughput si ottiene immediatamente dalla tabella come X = 25/362.5 = 0.069 pezzi/minuto = 4.137 pezzi/ora.
Per quel che concerne il valore medio dei pezzi nel centro di lavorazione, possiamo sfruttare le probabilità già calcolate al punto precedente:

$$N_2 = P(1,1) + 2\ P(0,2) = 0.414 + 2\ (0.31) = 1.034.$$

<u>Problema 20</u>

Un sistema per la produzione di laminati è costituito da *a*) una stazione di carico e scarico (nella quale il pezzo finito viene smontato dal pallet e un nuovo grezzo viene montato), *b*) una pressa (nella quale il grezzo viene laminato), e *c*) una stazione di riparazione/rifinitura a cui vengono inviati i pezzi in uscita dalla pressa che risultano difettosi. Questi risultano essere il 10% del totale.

Tutte le operazioni (carico e scarico, stampaggio, riparazione) hanno tempi distribuiti esponenzialmente, di valore medio rispettivamente $1/\mu_{C/S}$= 10 secondi; $1/\mu_S$= 15 secondi; $1/\mu_R$ = 30 secondi. La pressa è costituita da 2 serventi in parallelo; le altre stazioni sono monoservente. Nel sistema sono presenti N = 2 pallet.

1) Calcolare il valore atteso del numero di pezzi prodotti in un minuto.

2) Calcolare la probabilità che ambedue i pallet si trovino contemporaneamente nella pressa.

SOLUZIONE:

1. Trattandosi di rete chiusa, occorre al solito calcolare i visit count conoscere la costante di normalizzazione. Nel seguito, identifichiamo le stazioni di carico/scarico, lavorazione e riparazione coi numeri 1, 2 e 3 rispettivamente. Le equazioni dei visit count danno:

$v_1 = v_3 + 0.9\ v_2$

$v_2 = v_1$

$v_3 = 0.1\ v_2$

da cui, ponendo v_1 = 1, si ha v_2 = 1 e v_3 = 0.1. Da ciò, si ottiene x_1 = 10 secondi, x_2 = 15 secondi; x_3 = 3 secondi. Calcoliamo allora la consueta tabella, facendo attenzione al fatto che il centro di stampaggio ha due serventi, per cui $f_2(2) = x_2^2/2$, e che dunque non si può applicare la formula semplificata.

n *j*	1	2	3
0	1	1	1
1	10	25	28
2	100	362.5	446.5

di qui si ha che il numero medio di pezzi prodotti in un minuto è X = 28/446.5 = 0.062.

2. Quello che si richiede è la probabilità dello stato (0,2,0), che, per il teorema di Gordon e Newell, è data da

$$P(0,2,0) = \frac{f_2(2)}{G(2;3)} = \frac{x_2{}^2/2}{G(2;3)} = 0.252.$$

Problema 21

Un impianto manifatturiero è costituito da due centri di lavorazione in cascata, M_1 e M_2. Tutti i pezzi, che arrivano secondo una distribuzione esponenziale di valore medio λ = 1 pezzo/minuto, devono essere processati prima su M_1 e poi su M_2. I due centri hanno tempi di lavorazione anch'essi distribuiti esponenzialmente, con valori $1/\mu_1$ = 30 secondi e $1/\mu_2$ = 20 secondi rispettivamente. *Le macchine sono prive di buffer*. Ciò vuol dire che se un pezzo arriva dall'esterno e trova M_1 occupato, viene rigettato, e come pure un pezzo può passare da M_1 a M_2 solo se quest'ultima è libera.

Calcolare con quale probabilità, al generico istante, la macchina M_2 risulta occupata.

SOLUZIONE:

Il problema può essere risolto calcolando la probabilità di ciascuno stato a partire dalle equazioni di equilibrio. Stavolta, però, occorre fare particolare attenzione al fatto che gli stati del sistema non sono quattro, come si potrebbe pensare a prima vista (ossia (0,0); (1,0); (0,1); (1,1)): c'è anche da considerare il particolare stato in cui le macchine sono ambedue occupate, ma il centro M_1 ha terminato la lavorazione, e dunque il pezzo in M_1 è bloccato. Infatti, se il sistema si trova in questo stato (che indichiamo con (1*,1)), l'unico stato in cui può portarsi è lo stato (0,1), in quanto, allorché la macchina M_2 termina la lavorazione di un pezzo, il pezzo che era su M_1 si trasferisce immediatamente su M_2. Dunque, le equazioni saranno:

stato (0,0): $\lambda P(0,0) = \mu_2 P(0,1)$

stato (1,0): $\mu_1 P(1,0) = \lambda P(0,0) + \mu_2 P(1,1)$

stato (0,1): $(\lambda + \mu_2) P(0,1) = \mu_1 P(1,0) + \mu_2 P(1^*,1)$

stato (1,1): $(\mu_1 + \mu_2) P(1,1) = \lambda P(0,1)$

stato (1*,1): $\mu_2 P(1^*,1) = \mu_1 P(1,1)$

(al solito, una di queste equazioni è ridondante). Utilizzando la condizione che la somma delle probabilità di tutti gli stati è 1, si ottiene (μ_1 = 2 pezzi/minuto e μ_2 = 3 pezzi/minuto):

$P(0,0) = 0.489$; $P(1,0) = 0.293$; $P(0,1) = 0.163$; $P(1,1) = 0.032$; $P(1^*,1) = 0.022$.

La probabilità con cui la macchina M_2 risulta occupata si ottiene quindi sommando le corrispondenti probabilità, ossia:

$$P(0,1) + P(1,1) + P(1^*,1) = 0.217.$$

Problema 22

Un impianto produttivo è costituito da tre centri di lavorazione, M_1, M_2 e M_3. Le tre macchine devono produrre due pezzi, A e B.

I pezzi di tipo A arrivano alla macchina M_1, dopodiché il 90% di essi passa a M_3, mentre il rimanente 10% deve essere lavorato anche da M_2, per poi passare anch'esso a M_3.

I pezzi di tipo B arrivano alla macchina M_2, dopodiché l'80% di essi passa a M_3, mentre il rimanente 20% deve essere lavorato anche da M_1, per poi passare anch'esso a M_3.

Gli arrivi sono poissoniani, i tempi di servizio esponenzialmente distribuiti. Arrivano mediamente λ^A = 1 pezzo/minuto e λ^B = 0.5 pezzi/minuto. I tempi medi di lavorazione sono: $1/\mu_{1A}$ = 0.2 minuti; $1/\mu_{1B}$ = 1 minuto; $1/\mu_{2A}$ = 2 minuti; $1/\mu_{2B}$ = 1 minuto; $1/\mu_{3A}$ = 0.2 minuti; e $1/\mu_{3B}$ = 0.25 minuti.

In base a questi dati:

1) Verificare che il sistema ammette una distribuzione stazionaria di probabilità;

2) Il valore atteso del tempo di attraversamento di un pezzo di tipo B.

SOLUZIONE:

1. Ragioniamo separatamente per pezzi di tipo A e B. Si ha:

$\lambda_{1A}' = \lambda_{1A}$ = 1 pezzo/minuto

$\lambda_{2A}' = 0.1\ \lambda_{1A}'$ = 0.1 pezzi/minuto

$\lambda_{2B}' = \lambda_{2B}$ = 0.5 pezzi/minuto

$\lambda_{1B}' = 0.2\ \lambda_{2B}'$ = 0.1 pezzo/minuto

da cui

$\lambda_1' = \lambda_{1A}' + \lambda_{1B}' = 1.1$ pezzi/minuto

$\lambda_2' = \lambda_{2A}' + \lambda_{2B}' = 0.6$ pezzi/minuto

poiché invece tutti i pezzi visitano M_3 esattamente una volta:

$\lambda_3' = \lambda^A + \lambda^B = 1.5$ pezzi/minuto

a questo punto, per calcolare i μ_i delle varie macchine, occorre conoscere la percentuale di arrivi a ciascuna macchina di ogni tipo di pezzo. Alla macchina M_1, 10/11 degli arrivi sono di tipo A, 1/11 di tipo B: Per M_2 tali frazioni sono 1/6 e 5/6 rispettivamente; per M_3 sono 2/3 e 1/3. Quindi:

$1/\mu_1 = (10/11)\ 0.2 + (1/11)\ 1 = 0.273$ minuti

$1/\mu_2 = (1/6)\ 2 + (5/6)\ 1 = 1.167$ minuti

$1/\mu_3 = (2/3)\ 0.2 + (1/3)\ 0.25 = 0.216$ minuti

calcolando ora i rapporti λ_i' / μ_i, essi valgono, per le tre macchine, 0.3, 0.7 e 0.324 rispettivamente. Dunque, essendo tutti minori di 1, il sistema ammette una distribuzione stazionaria di probabilità.

2. Per ottenere il tempo trascorso da un pezzo nel sistema, occorre calcolare i valori attesi dei tempi trascorsi mediamente in coda dai pezzi nelle varie stazioni, W_{qj}. Considerando che $\mu_1 = 3.66$ pezzi/minuto, $\mu_2 = 0.856$ pezzi/minuto e $\mu_3 = 4.63$ pezzi/minuto, si ha:

$W_{q1} = 1/(\mu_1 - \lambda_1') - 1/\mu_1 = 1/2.56 - 1/3.66 = 0.117$ minuti;

$W_{q2} = 1/(\mu_2 - \lambda_2') - 1/\mu_2 = 1/0.256 - 1/0.856 = 2.738$ minuti;

$W_{q3} = 1/(\mu_3 - \lambda_3') - 1/\mu_3 = 1/3.13 - 1/4.63 = 0.103$ minuti;

a questi valori vanno aggiunti i tempi di lavorazione specifici del pezzo di tipo B, e va tenuto conto dei visit count dei pezzi di tipo B, che sono evidentemente $v_1 = 0.2$, $v_2 = 1$, $v_3 = 1$, ottenendo così:

$W_B = 0.2\ (W_{q1} + 1/\mu_{1B}) + (W_{q2} + 1/\mu_{2B}) + (W_{q3} + 1/\mu_{3B}) = 0.2\ (0.117 + 1) + (2.738 + 1) + (0.103 + 0.25) = 4.314$ minuti.

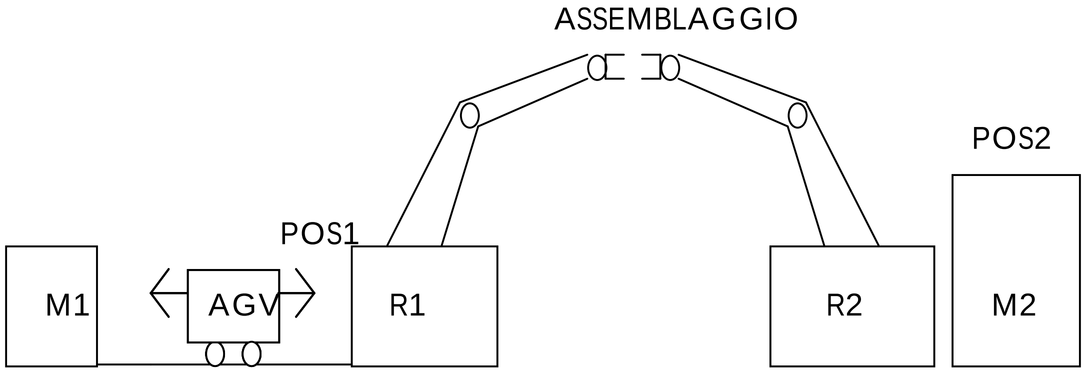
ESERCIZI SULLE RETI DI PETRI DEL CORSO DI AUTOMAZIONE INDUSTRIALE

PARTE I - II

Problema 2.1

Sistema di assiematura con robot e agv

Sia dato il sistema in figura.

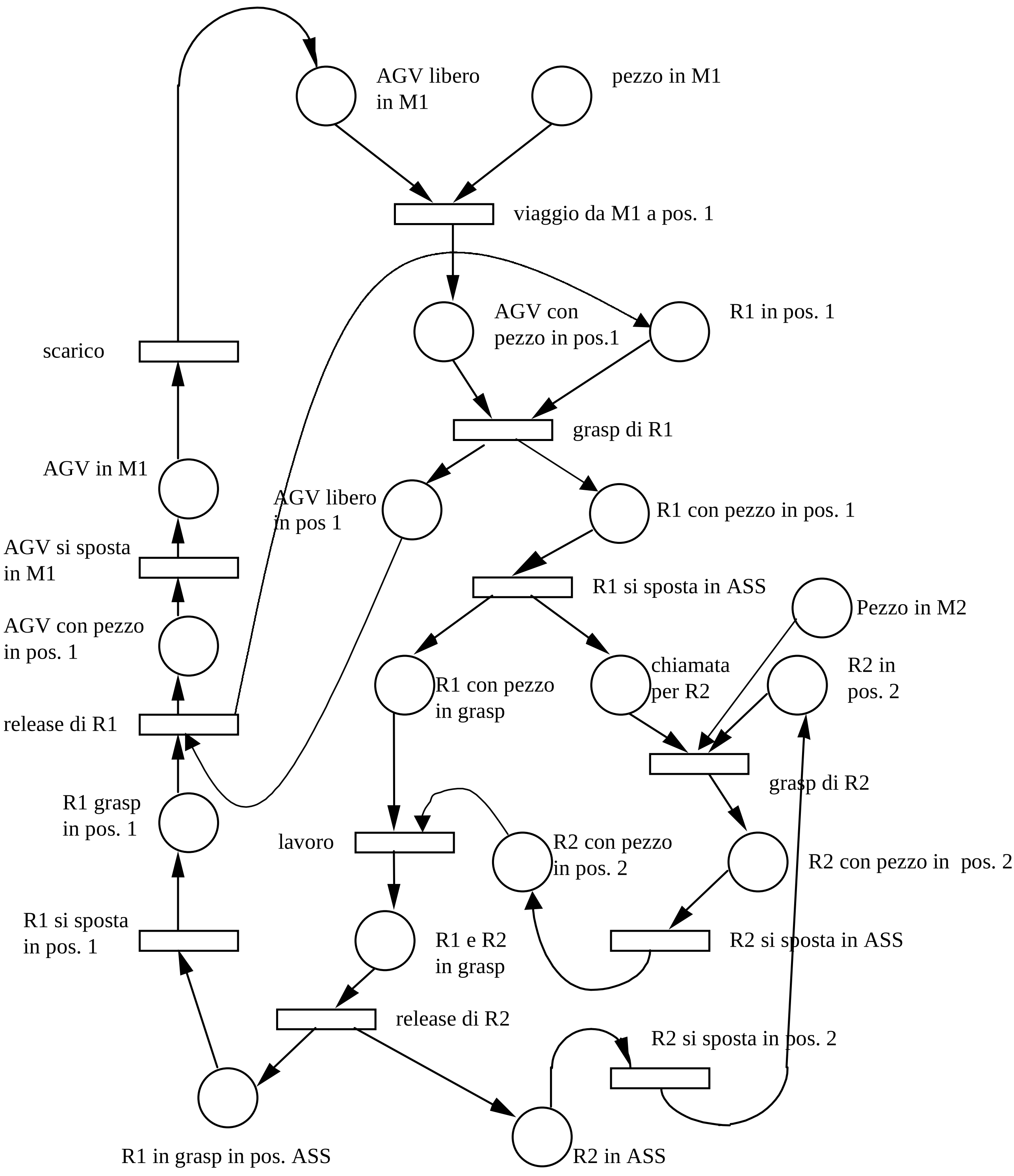


Inizialmente sull' AGV libero viene caricato un semilavorato dal magazzino M1, l' AGV porta questo in pos. 1 per il grasp (la presa) del robot 1. Questo si porta nella posizione di assemblaggio ove arriva il robot 2 per montare sul semilavorato un componente prelevato dal magazzino planare M2 (attenzione: il robot 2 deve arrivare in posizione di assemblaggio sempre dopo il robot 1; l'assemblaggio avviene con entrambi i robots in grasp). Al termine di questa operazione mentre il robot 2, effettuato il release (il rilascio), torna in posizione 2 per prelevare il successivo componente, il robot 1 carica sull' AGV il pezzo assemblato; l'AGV dunque torna al magazzino M1 ove, dopo l' operazione di scarico, viene caricato un nuovo semilavorato.
Modellare il sistema con una rete di Petri, curando in particolare le operazioni di grasp e release per i robots.

Soluzione

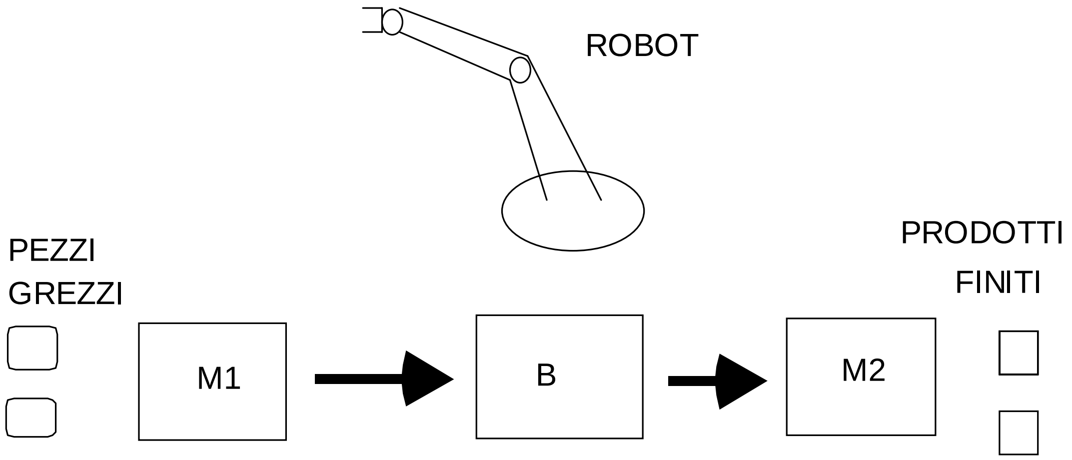
Costruiamo dapprima una tabella degli eventi chiave che caratterizzano il sistema e delle azioni corrispondenti, da questa descrizione si otterrà un un modo "naturale" di costruire una rete di Petri che modelli il sistema stesso.

eventi	**azioni**
pezzo in M1, AGV libero in M1	l'AGV si sposta verso pos. 1
AGV con pezzo in pos.1, R1 in pos.1	R1 con pezzo verso la posizione di assemblaggio (ASS), segue grasp di R1
R1 con pezzo in ASS, R2 in pos. 2	R2 con pezzo verso la posizione di assemblaggio (ASS), segue release di R2
R1 con pezzo finito, R2 release, AGV libero in pos. 1	AGV con pezzo in M1, segue release di R1, segue scarico del pezzo


AGV libero
in M1
pezzo in M1
viaggio da M1 a pos. 1
AGV con
pezzo in pos.1
R1 in pos. 1
scarico
grasp di R1
AGV in M1
AGV libero
in pos 1
R1 con pezzo in pos. 1
AGV si sposta
in M1
R1 si sposta in ASS
Pezzo in M2
AGV con pezzo
in pos. 1
chiamata
per R2
R2 in
pos. 2
R1 con pezzo
in grasp
release di R1
grasp di R2
R1 grasp
in pos. 1
lavoro
R2 con pezzo
in pos. 2
R2 con pezzo in pos. 2
R1 si sposta
in pos. 1
R1 e R2
in grasp
R2 si sposta in ASS
release di R2
R2 si sposta in pos. 2
R1 in grasp in pos. ASS
R2 in ASS

Problema 2.2

Un semplice sistema di produzione é costituito da due macchine M1 e M2, da un robot R per lo scarico dei pezzi, e da un buffer intermedio B fra le due macchine.
Ogni pezzo che entra nel sistema è fissato su di un pallet e caricato sulla macchina M1. Alla fine della prima lavorazione, il robot trasferisce il semilavorato da M1 al buffer intermedio. Da qui i semilavorati sono caricati su M2 e processati.
Una volta terminata la lavorazione su M2 il robot provvede a scaricare i pezzi finiti, a smontarli dai pallet, e a trasportare i pallet in ingresso.

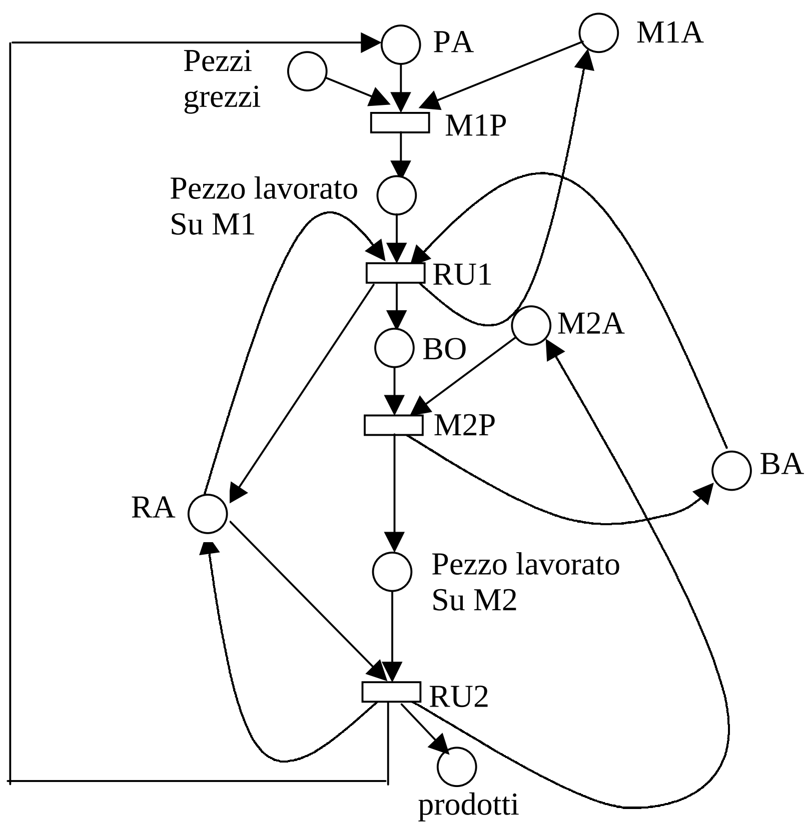


Soluzione

Attività:
1) operazione di macchina (fissaggio del pezzo sul pallet, carico e processamento);
2) immagazzinamento di un semilavorato nel buffer;
3) operazione di robot (scarico di un pezzo da una macchina).

Ordine delle attività:
- M1 fissa un pezzo grezzo sul pallet lo carica e lo processa (M1P);
- R scarica un semilavorato da M1 e lo trasporta in B (RU1);
- B immagazzinamento di un semilavorato (BS);
- M2 carica e processa un semilavorato (M2P);
- R scarica da M2 un prodotto finito, lo smonta dal pallet e trasporta il pallet in M1 (RU2).

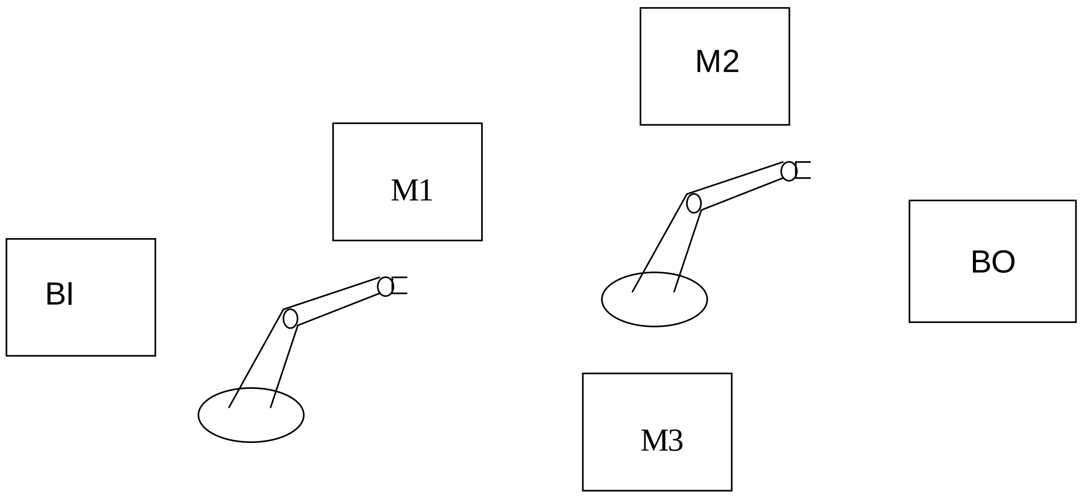
PA: numero di pallet disponibili;
M1A: macchina 1 disponibile;
M2A: macchina 2 disponibile;
RA: robot disponibile;
BA: numero di posti disponibili nel buffer.
BO: numero di posti occupati nel buffer.



Problema 2.3

Produzione di un solo tipo di prodotto attraverso processi alternativi

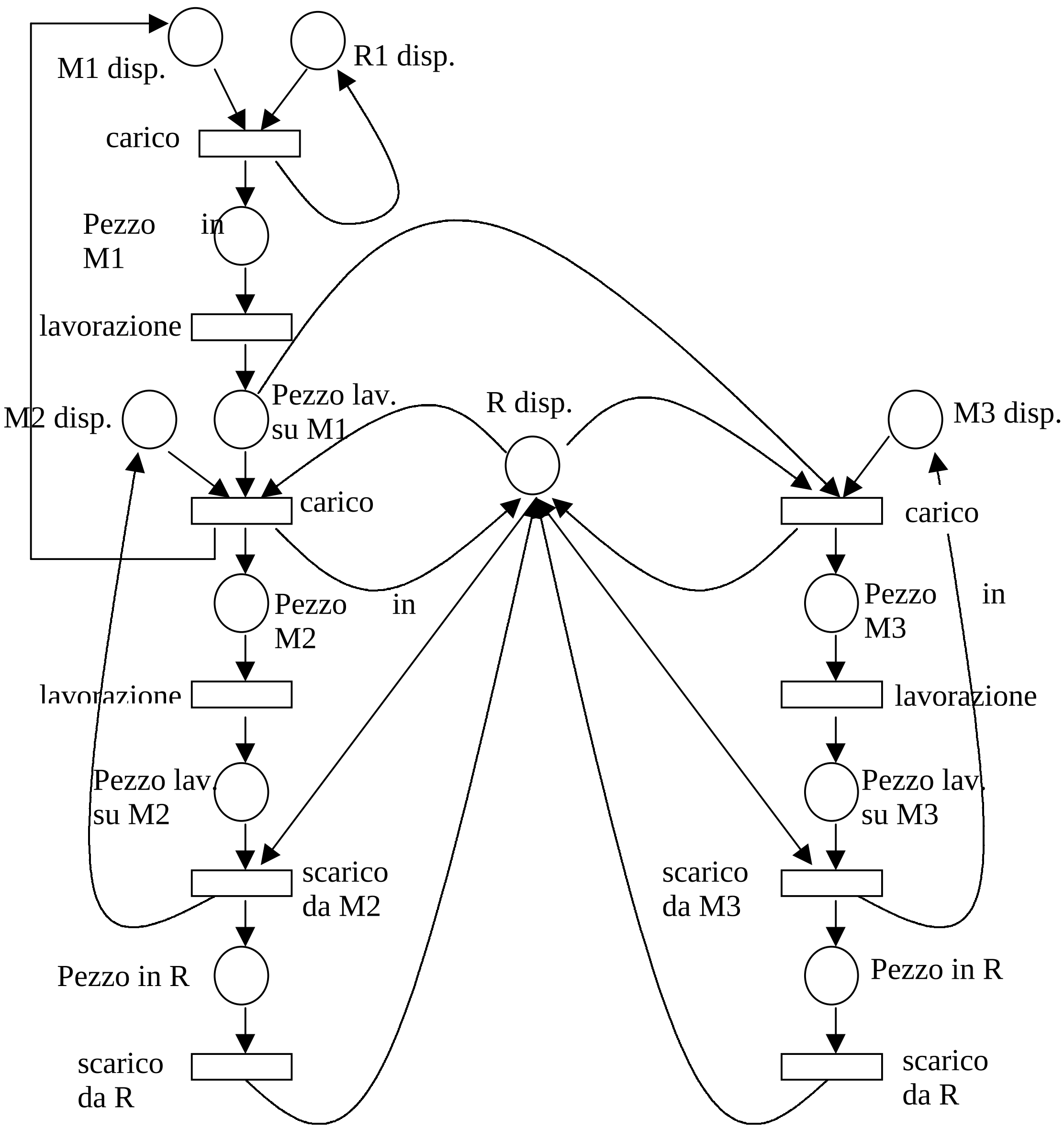
Il sistema di produzione automatico rappresentato in figura é costituito da due robot R1, R2, da tre macchine M1, M2, M3, da un magazzino d'ingresso e da un magazzino d'uscita.
Il sistema produce un solo tipo di prodotto che richiede due operazioni in sequenza: la prima operazione é sempre effettuata dalla macchina M1, mentre la seconda può essere effettuata indifferentemente o su M2 o su M3.
I pezzi grezzi, sempre disponibili nel magazzino in ingresso, sono prelevati da R1 e trasferiti su M1 per la prima operazione. Quando M1 termina la lavorazione, R2 trasporta prima il prodotto intermedio su M2 o su M3, e poi, al termine della seconda operazione, trasporta il prodotto finito nel magazzino finale supposto di capacità illimitata.
Modellare il sistema con una rete di Petri.
Si ricorda che ogni operazione deve essere effettuata massimizzando il parallelismo degli eventi.



Soluzione

Prima di fornire lo schema della soluzione é importante mettere in evidenza le seguenti caratteristiche del sistema:

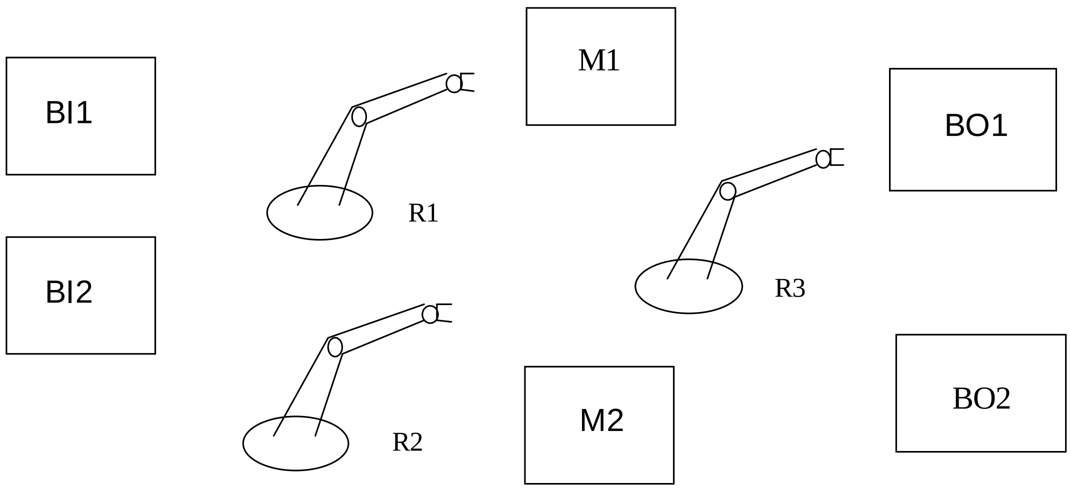
- ogni robot od ogni macchina é un sistema autonomo che può operare in modo indipendente dagli altri (concorrenza);
- la seconda operazione può essere effettuata sia su M1, sia su M2 (conflitto);
- R2 é una risorsa condivisa.
- In BI i pezzi sono sempre disponibili (non occorre modellarlo)
- BO ha capacita' infinita (non occorre modellarlo)



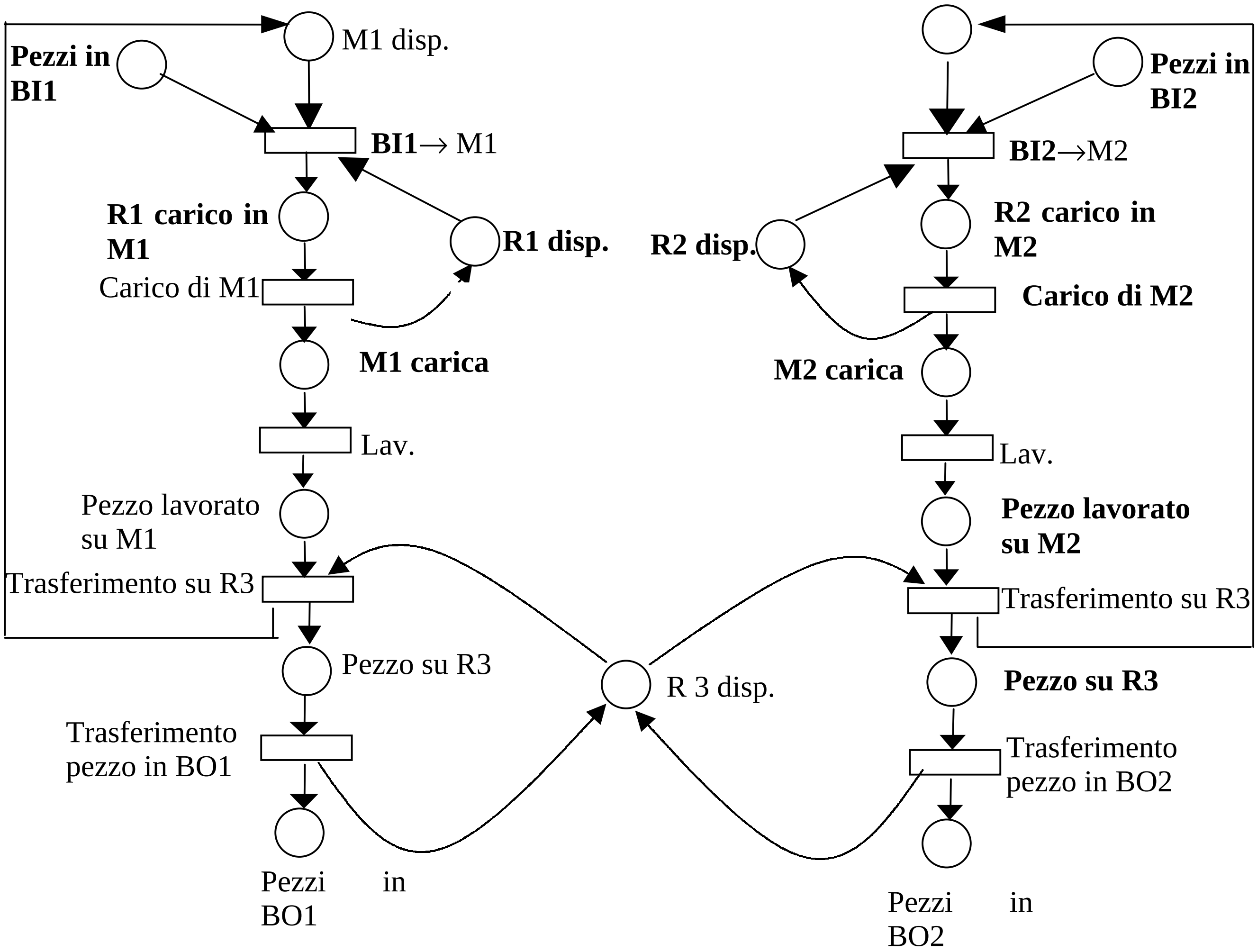
Problema 2.4

Produzione di due prodotti con condivisione di una risorsa

Un sistema di produzione per la produzione di due differenti prodotti A, B é costituito da tre robot R1, R2, R3, da due macchine M1, M2, da due magazzini d'ingresso BI1, BI2 e da due magazzini d'uscita BO1, BO2.
I processi di produzione dei due prodotti sono indipendenti l'uno dall'altro eccetto che per la condivisione di R3.
La produzione del prodotto A (B) avviene nel seguente modo: il robot R1 (R2) preleva un pezzo grezzo da BI1 (BI2) e lo trasferisce su M1 (M2). Quando M1 (M2) termina la lavorazione, R3 scarica il prodotto finito e lo trasporta in BO1 (BO2).
Modellare il sistema con una rete di Petri.

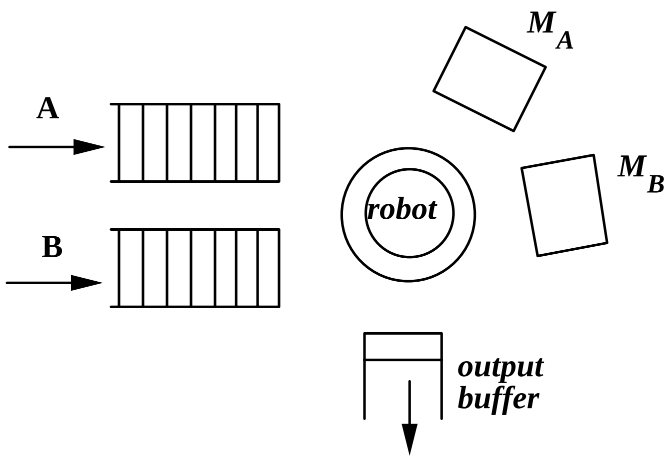


Soluzione

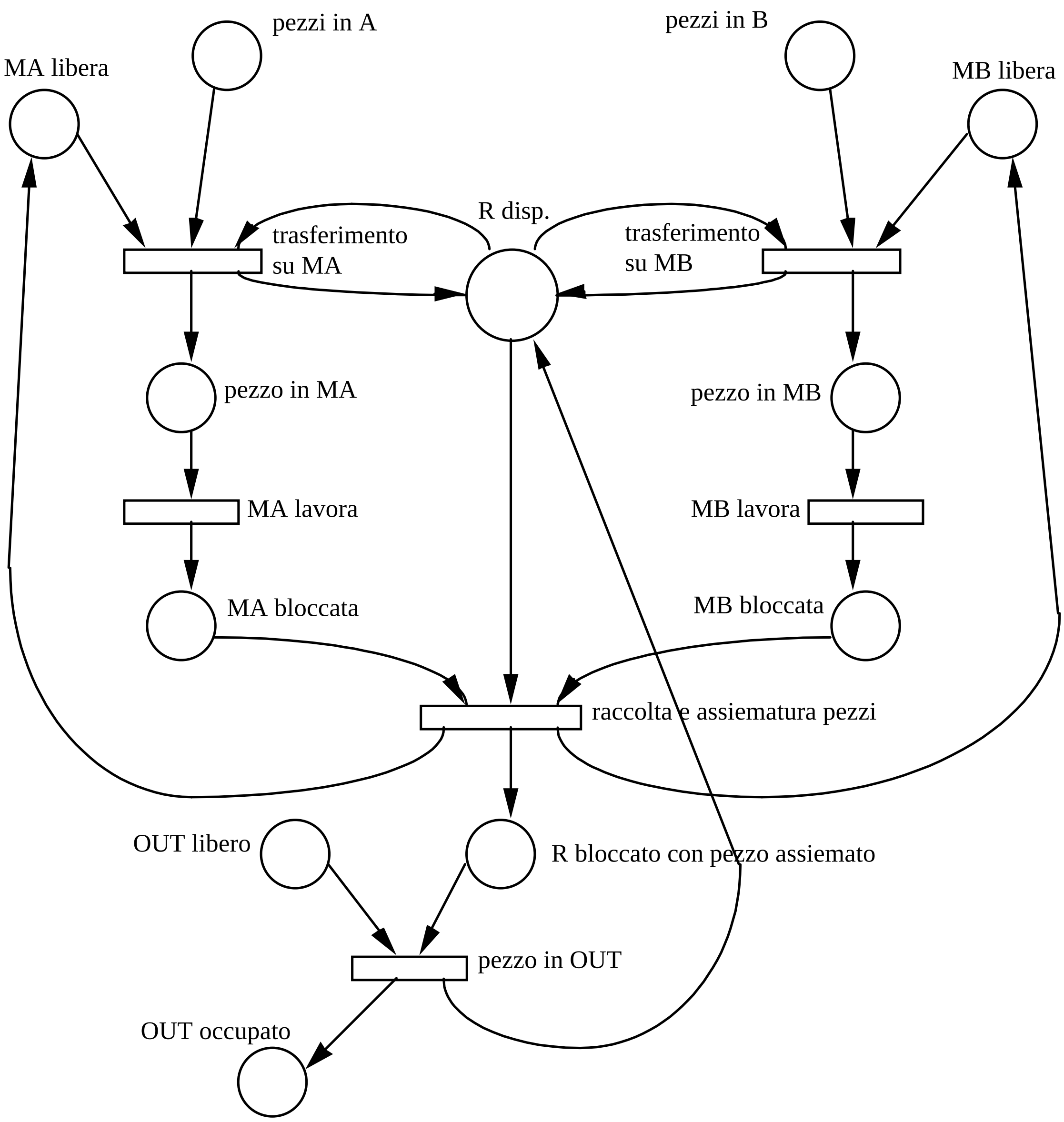

M1 disp.
Pezzi in BI1
BI1→ M1
R1 carico in M1
R1 disp.
Carico di M1
M1 carica
Lav.
Pezzo lavorato su M1
Trasferimento su R3
Pezzo su R3
Trasferimento pezzo in BO1
Pezzi in BO1
R 3 disp.
Pezzi in BI2
BI2→M2
R2 disp.
R2 carico in M2
Carico di M2
M2 carica
Lav.
Pezzo lavorato su M2
Trasferimento su R3
Pezzo su R3
Trasferimento pezzo in BO2
Pezzi in BO2

Problema 2.5

In figura è illustrato lo schema di una cella di assiematura. In questa cella, grezzi di due tipi diversi (A e B) arrivano su conveyor separati, e sono trasferiti da un *robot* su due centri, rispettivamente M_A e M_B, che effettuano una lavorazione. I centri non sono dotati di buffer, e dunque possono accettare un grezzo solo se non sono occupati; un pezzo finito attende sul centro finché non arriva il robot a rimuoverlo. Quando *ambedue* i centri hanno terminato la lavorazione sui rispettivi pezzi, il robot raccoglie i due pezzi lavorati e li assiema, dopodiché, se c'è spazio, pone il prodotto finito così ottenuto in un buffer di uscita, che è a un solo posto e che viene svuotato dall'esterno. Solo dopo aver posto il prodotto finito nel buffer di uscita, il robot può occuparsi dell'ingresso dei nuovi grezzi. Dopo ogni operazione di movimentazione compiuta dal robot, esso torna in una posizione di riposo.
Rappresentare il sistema con una rete di Petri.



Soluzione


pezzi in A
pezzi in B
MA libera
MB libera
R disp.
trasferimento
su MA
trasferimento
su MB
pezzo in MA
pezzo in MB
MA lavora
MB lavora
MA bloccata
MB bloccata
raccolta e assiematura pezzi
OUT libero
R bloccato con pezzo assiemato
pezzo in OUT
OUT occupato

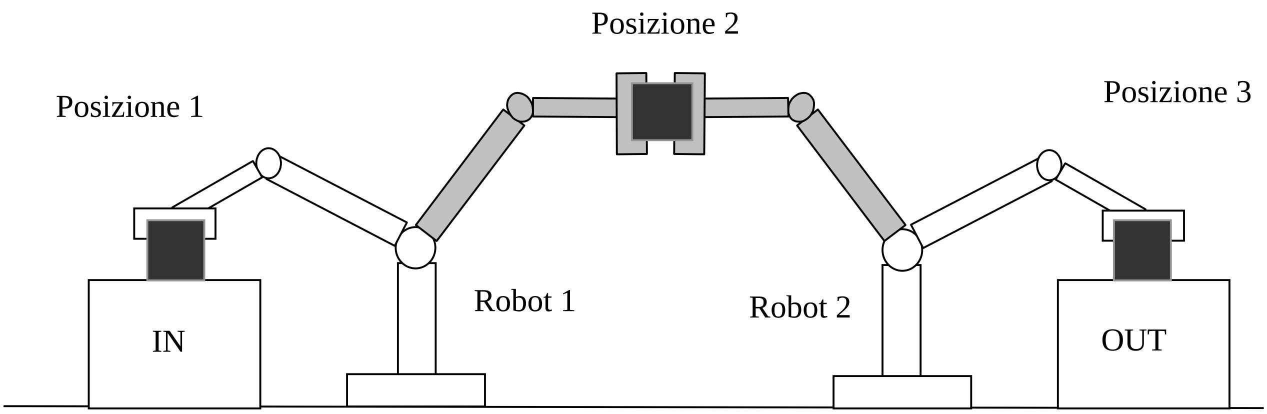
Problema 2.6

Coordinamento dei movimenti tra robot

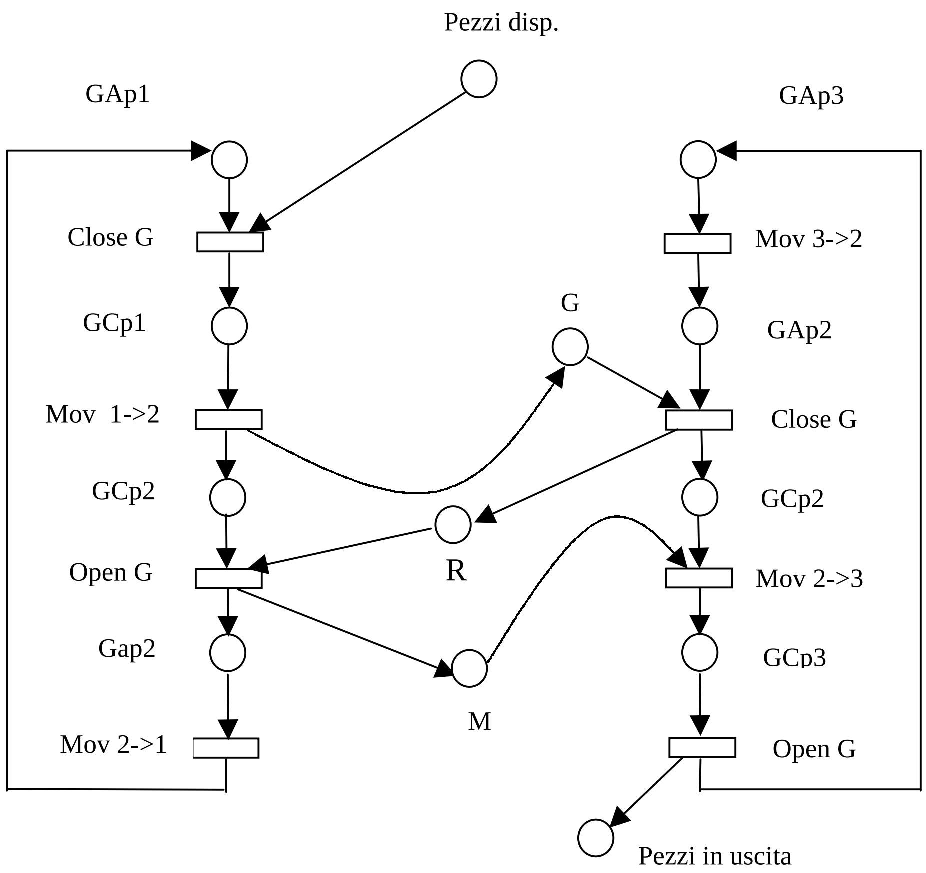
In figura sono rappresentati due robot che eseguono in modo coordinato l'operazione di PICK-AND-PLACE di un oggetto.
Ogni robot, per tale operazione, è dotato di una pinza (gripper) che può essere aperta o chiusa.
L'operazione PICK-AND-PLACE può essere a sua volta scomposta in quattro sotto operazioni:

- operazione di PICK, in cui R1 effettua il prelievo dell'oggetto dalla stazione di input;
- trasporto dell'oggetto dalla stazione di input al punto di incontro;
- scambio dell'oggetto da R1 a R2;
- trasporto dell'oggetto dal punto di incontro alla stazione di output.

Descrivere il sistema mediante una rete di Petri, modellando in particolare i movimenti dei gripper nelle varie fasi.



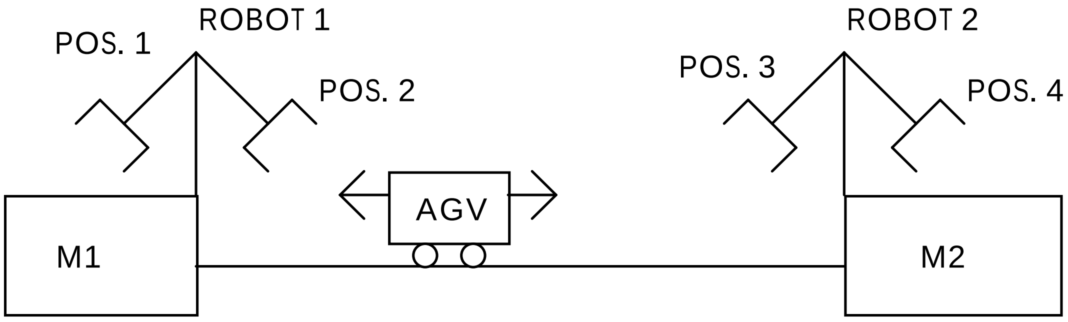
Soluzione



p: posizione del robot;
GA: gripper aperto;
GC: gripper chiuso;
G: abilitazione alla presa del robot 2;
R: abilitazione al rilascio del robot 1;
M: abiltazione al movimento del robot 2.

Problema 2.7

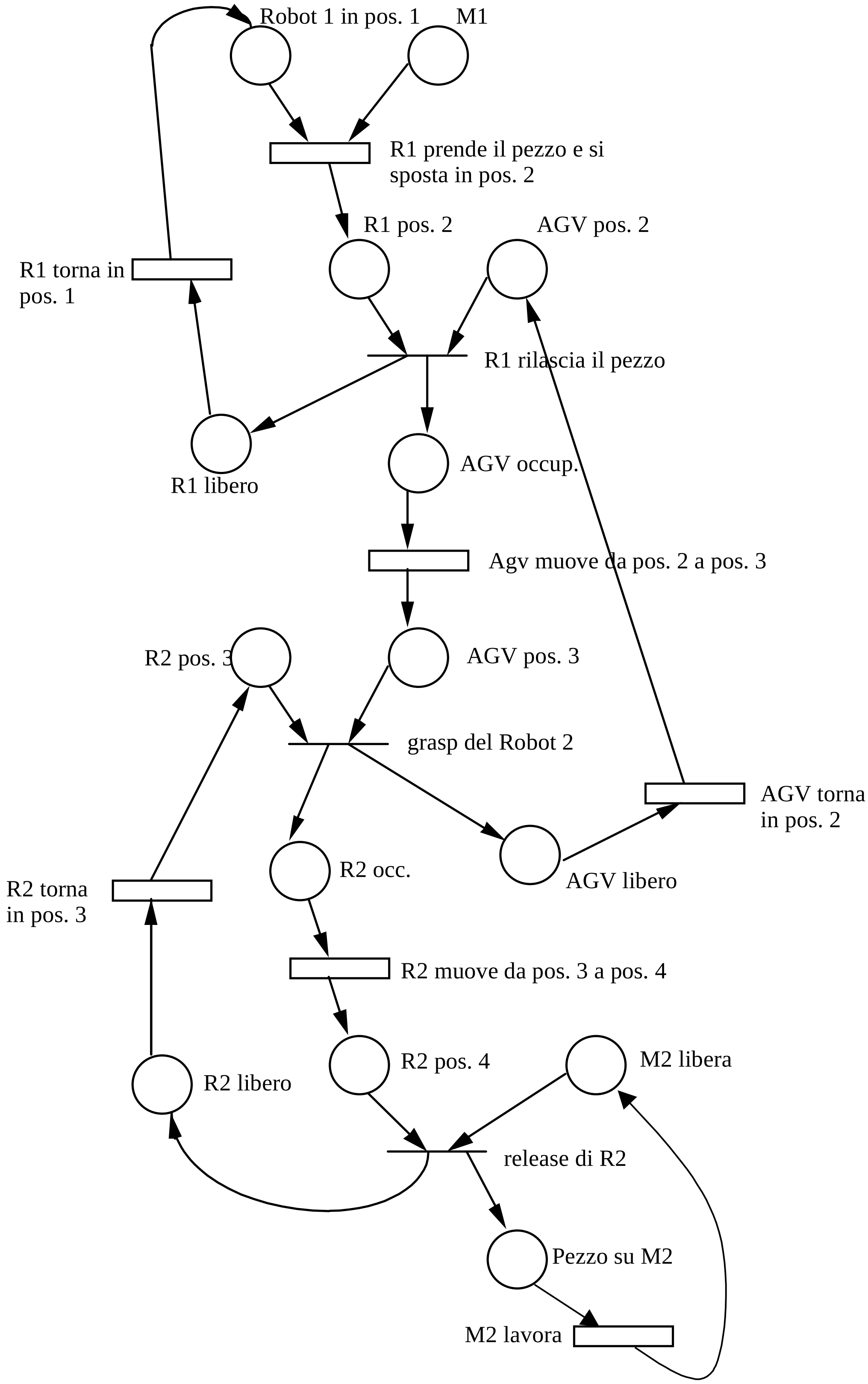
Sia dato il sistema in figura.



Il robot 1, se in posizione 1, preleva un pezzo dal magazzino M1 e lo deposita sull'AGV nella posizione 2, se quest'ultimo è presente. Una volta caricato, l'AGV si sposta dalla posizione 2 alla posizione 3. Quindi il robot 2, se in posizione 3, preleva il pezzo presente sull'AGV, si porta in posizione 4 e lo deposita sulla macchina M2 quando questa è libera.

Modellare il sistema con una rete di Petri.
Si trascurino le operazioni di grasp e release per i robots, supponendo questi sempre in grado di afferrare o rilasciare un pezzo. Si curino con particolare attenzione gli spostamenti dei robots e dell'AGV presentando questi il prima possibile ai propri appuntamenti.

Soluzione

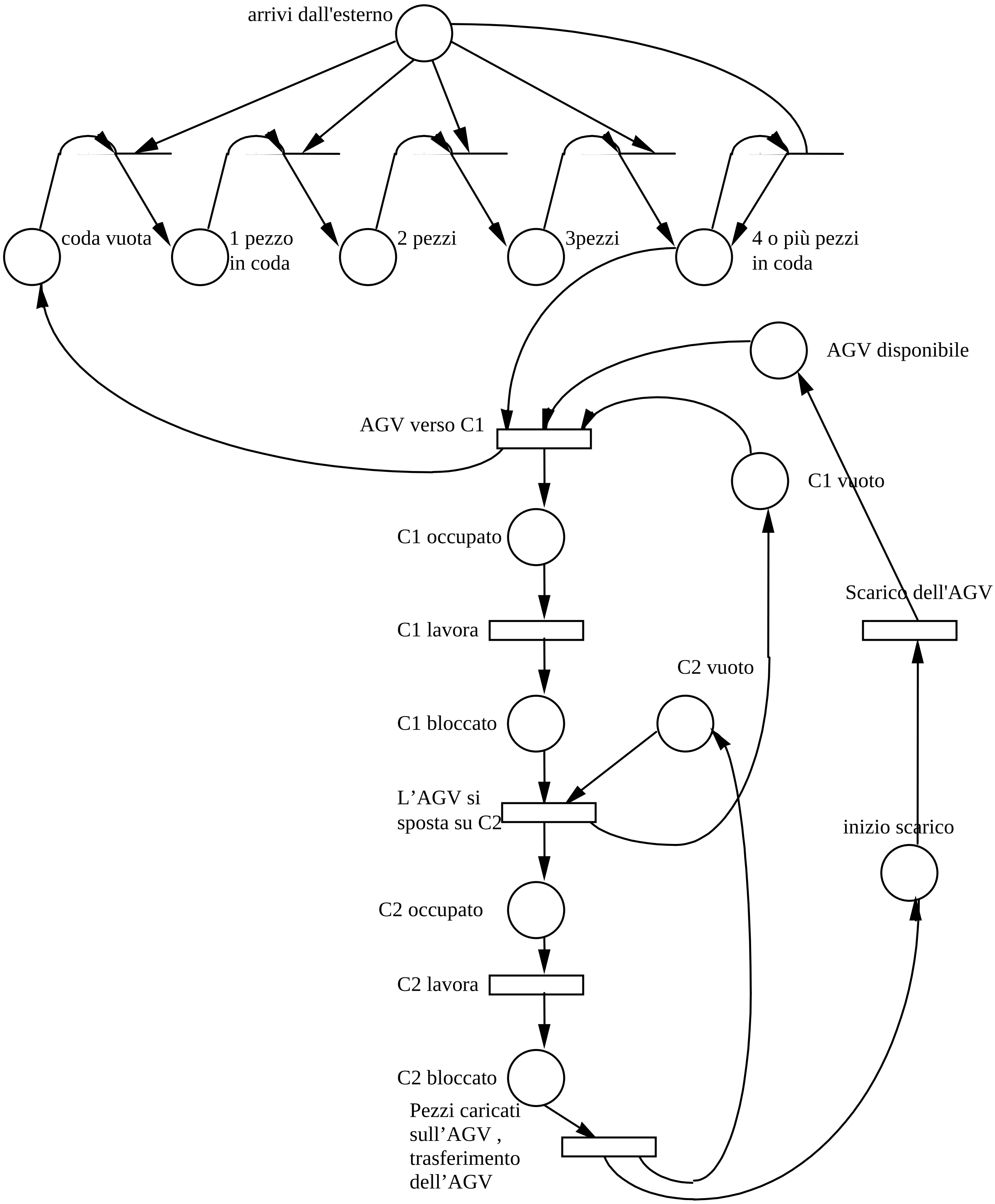

Robot 1 in pos. 1
M1
R1 prende il pezzo e si sposta in pos. 2
R1 pos. 2
AGV pos. 2
R1 torna in pos. 1
R1 rilascia il pezzo
AGV occup.
R1 libero
Agv muove da pos. 2 a pos. 3
R2 pos. 3
AGV pos. 3
grasp del Robot 2
AGV torna in pos. 2
R2 occ.
AGV libero
R2 torna in pos. 3
R2 muove da pos. 3 a pos. 4
R2 pos. 4
M2 libera
R2 libero
release di R2
Pezzo su M2
M2 lavora

Problema 2.8

Un (piccolo) impianto produttivo dispone di due AGV, usati per trasportare gruppi di pezzi su due centri di lavorazione in serie e su di un centro di I/O. Nel primo centro, tutti i pezzi trasportati dall'AGV vengono lavorati in parallelo, e l'AGV attende nel centro di lavorazione che tutti i pezzi siano terminati per poi trasferirli al centro successivo; similmente nel secondo centro. Quando i pezzi trasportati da un AGV hanno terminato il secondo insieme di lavorazioni (e quindi escono dal sistema), l'AGV è libero e torna al centro di I/O. A questo punto, l'AGV ricomincia un ciclo solo se sono presenti *almeno* quattro pezzi in ingresso, nel qual caso essi vengono tutti caricati sull'AGV e inizia il processo produttivo, altrimenti l'AGV attende che si formi una coda di almeno quattro pezzi.
Siccome si vuole evitare che due gruppi di pezzi stiano contemporaneamente nello stesso centro di lavorazione, un AGV *non* entra in un centro in cui sia già presente l'altro AGV con il suo gruppo di pezzi.

Modellare il sistema con una rete di Petri.

Soluzione


arrivi dall'esterno
coda vuota
1 pezzo in coda
2 pezzi
3pezzi
4 o più pezzi in coda
AGV disponibile
AGV verso C1
C1 vuoto
C1 occupato
Scarico dell'AGV
C1 lavora
C2 vuoto
C1 bloccato
L'AGV si sposta su C2
inizio scarico
C2 occupato
C2 lavora
C2 bloccato
Pezzi caricati sull'AGV , trasferimento dell'AGV

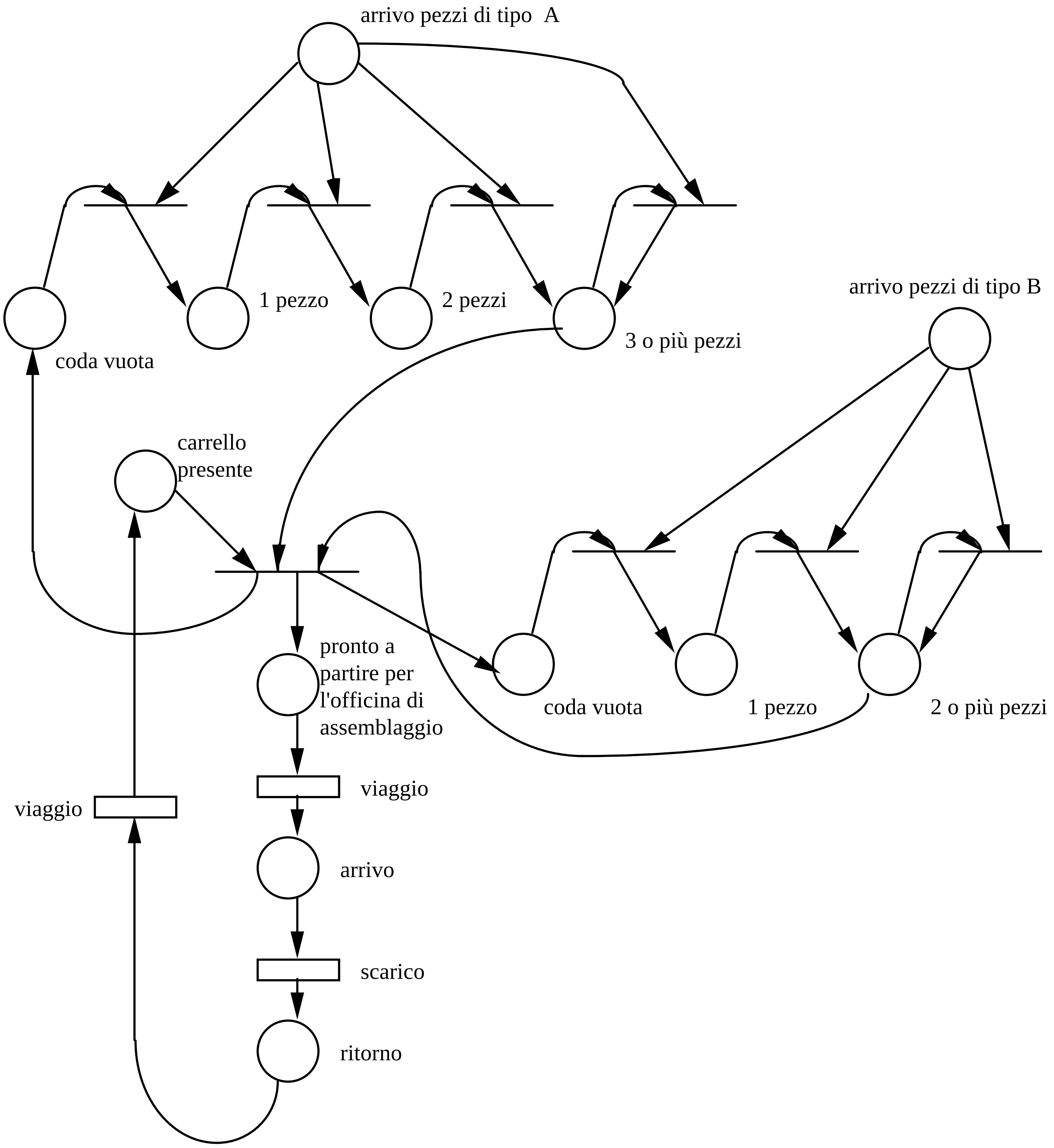
Problema 2.9

Un’officina di produzione produce pezzi meccanici di due tipi diversi con un tasso di produzione fortemente variabile nel tempo. I pezzi prodotti vengono prelevati da un carrello trasportatore automatico e trasportati all'officina di assemblaggio che utilizza i pezzi meccanici suddetti per costruire dei prodotti finiti.

Il carrello ha una capacità di carico molto elevata; si decide pertanto per motivi economici che il carrello possa lasciare l'officina di produzione solo se sono presenti almeno tre pezzi di tipo *A* e due di tipo *B* da trasportare. Se invece sono presenti più pezzi, li raccoglie tutti e parte per una nuova missione.

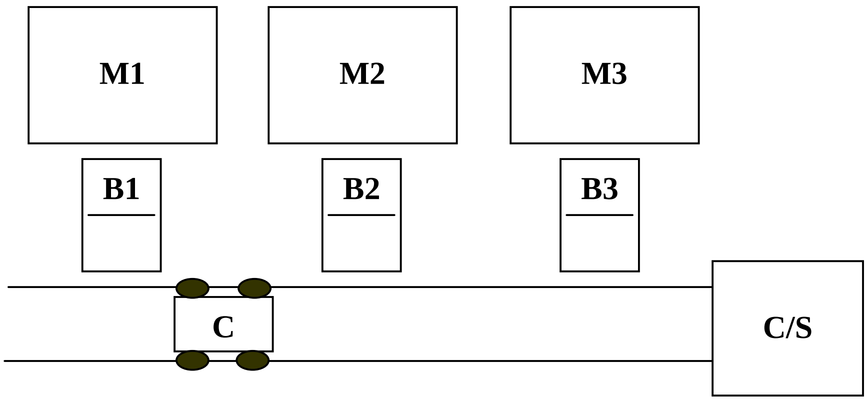
Si schematizzi il funzionamento del carrello trasportatore con una rete di Petri.

Soluzione


arrivo pezzi di tipo A
1 pezzo
2 pezzi
3 o più pezzi
coda vuota
arrivo pezzi di tipo B
carrello
presente
pronto a
partire per
l'officina di
assemblaggio
coda vuota
1 pezzo
2 o più pezzi
viaggio
viaggio
arrivo
scarico
ritorno

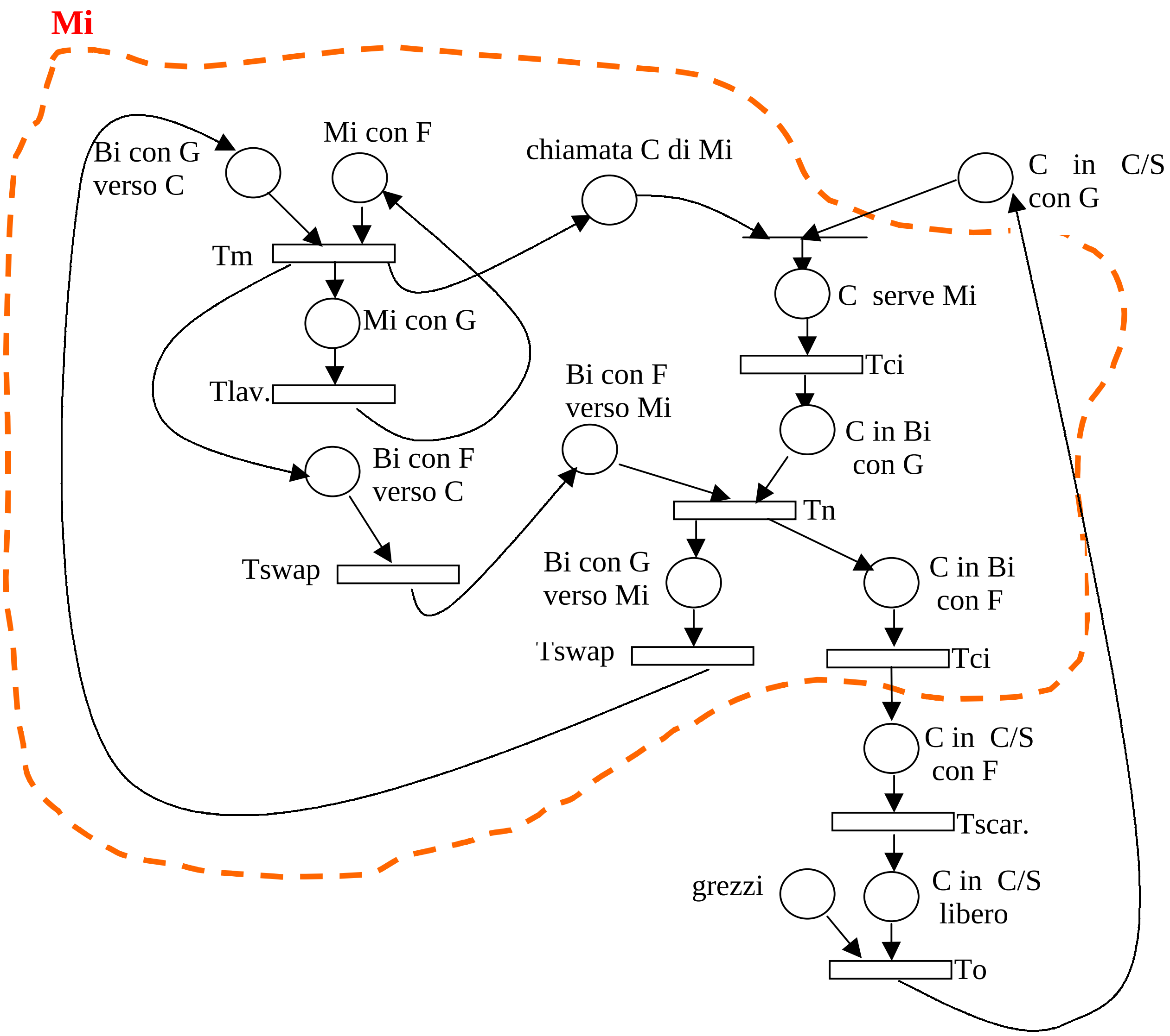
Problema 2.10

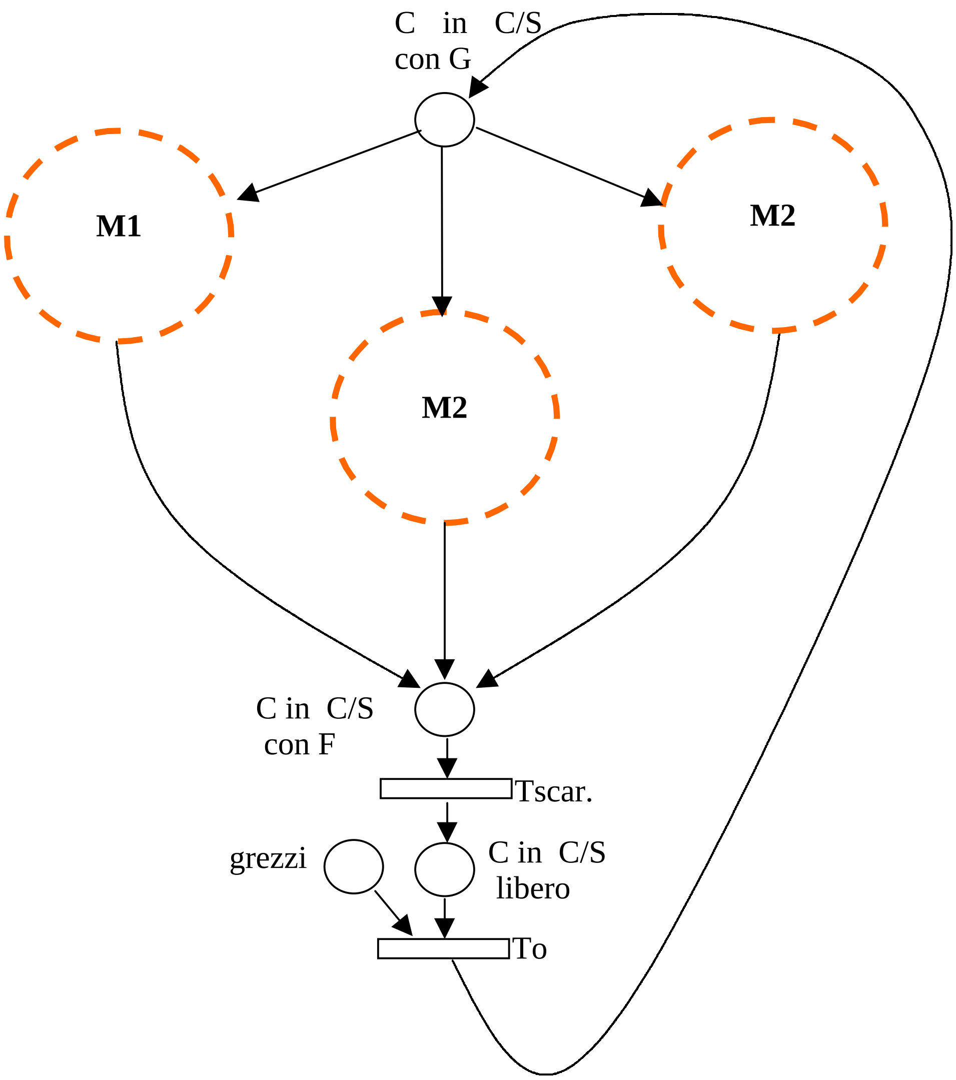
Un tipico FMS e' costituto da 3 macchine (**M1**, **M2**, **M3**), una stazione di carico e scarico **C/S** e un sistema di trasporto costituito da una navetta **C**. Per ogni macchina Mi e' presente un buffer ad un posto **Bi** in cui vengono ospitati sia i grezzi in attesa di lavorazione che i pezzi lavorati in attesa di essere trasportati verso C/S. Nella situazione di lavoro normale le tre macchine ospitano un pezzo in lavorazione (il tempo di lavorazione **Tlav** e' uguale per tutti i pezzi) ed e' presente un grezzo in ciascun buffer. La navetta si trova in attesa, cioè presso la stazione C/S con un grezzo gia' montato .
Quando una macchina Mi termina la lavorazione di un pezzo, se nel buffer Bi e' presente un grezzo da lavorare, Mi scambia il finito con il grezzo presente nel buffer (operazione che richiede un tempo **Tm**) altrimenti rimane bloccata, al termine dell'operazione invia una chiamata alla navetta C perché questa provveda a scambiare il pezzo finito presente ora nel buffer Bi con un nuovo grezzo questa operazione richiede un tempo **Tn** per lo scambio del pezzo con il buffer). Quindi il carrello si dirige verso la stazione di C/S (tempo **Tci**) dove il pezzo finito viene scaricato e, se sono presenti altri grezzi da lavorare in C/S, un uovo grezzo viene depositato sulla navetta (tempo **To**). A questo punto se sono presenti altre chiamate la navetta si dirige casualmente verso una stazione chiamante, altrimenti resta in attesa in questa posizione.
Modellare il sistema con una rete di Petri.



Soluzione

Esaminiamo prima le caratteristiche di una singola macchina (che risultano essere identiche per tutte e tre le macchine)




C in C/S
con G
M1
M2
M2
C in C/S
con F
Tscar.
grezzi
C in C/S
libero
To

PARTE III

Problema 2.11

Gestione di un magazzino a ricircolo

In figura è rappresentato un magazzino a ricircolo con una stazione di ingresso I e due stazioni di uscita A e B. Nel magazzino circolano in senso antiorario un certo numero di pallet (portapezzi) che hanno il compito di trasportare i pezzi da una stazione alla successiva.
I pezzi in ingresso possono entrare nel magazzino solo se è disponibile un pallet vuoto nella stazione d'ingresso; i pallet, siano essi vuoti o pieni, continuano a circolare nel magazzino dalla stazione I verso la stazione A, da questa verso la stazione B e da B verso la stazione d'ingresso. Quando un pallet arriva alla stazione d'ingresso sono possibili le seguenti alternative:

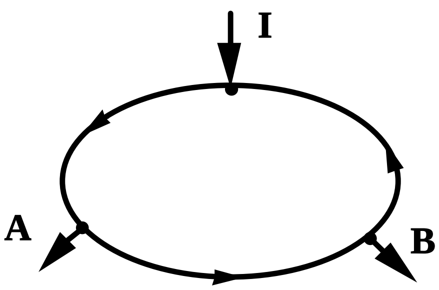
1- se il pallet è vuoto ed è disponibile un nuovo pezzo in I, carica un nuovo pezzo e si dirige verso A,
2- se il pallet è vuoto e non è disponibile un nuovo pezzo in I, si dirige comunque verso la stazione A anche se vuoto,
3- se il pallet è carico, si dirige direttamente verso la stazione A senza caricare un nuovo pezzo.

Quando un pallet arriva ad una stazione d'uscita (A o B) sono possibili le seguenti alternative:

a- se il pallet è carico, viene interrogata la stazione d'uscita, se questa richiede il pezzo lo preleva ed il pallet prosegue vuoto verso la stazione successiva,
b- se il pallet è vuoto non interroga la stazione e prosegue verso la stazione successiva.

Modellare con una rete di Petri il funzionamento di tale magazzino supponendo per semplicità che esista un unico pallet.
Suggerimenti:

- rappresentare la richiesta di pezzi da parte di ognuna delle due stazioni d'uscita con dei posti esogeni,
- rappresentare lo stato del pallet (vuoto/carico) con la presenza/assenza di una marca in un apposito posto.



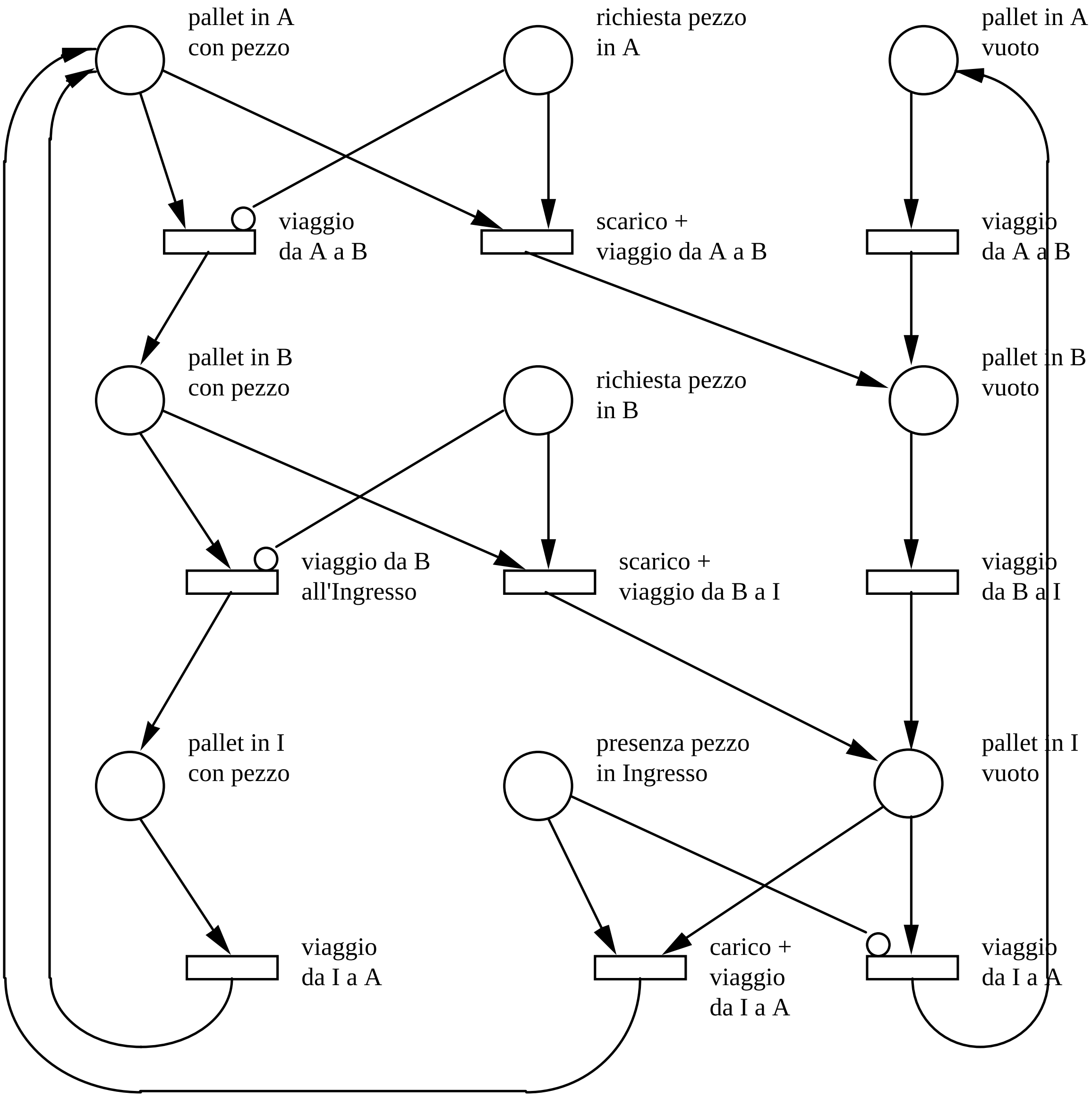
Soluzione

Prima di fornire un esempio di soluzione del problema si vuole costruire un elenco degli eventi fondamentali (e azioni conseguenti) che caratterizzano il sistema stesso. Tale elenco rappresenta, a tutti gli effetti, una descrizione alternativa del problema di partenza orientata alla costruzione di una rete di Petri che modelli il sistema stesso.

La descrizione degli eventi caratterizzanti il sistema definisce un modo "naturale" di costruire una rete di Petri che modelli il sistema, come riportato in figura.

evento	**azione**
pallet in ingresso (I) pieno	vai in A pieno
pallet in I vuoto e pezzo in I	carica pezzo e vai in I pieno
pallet in I vuoto e nessun pezzo in I	vai in A vuoto
pallet in A vuoto	vai in B vuoto
pallet in A pieno e richiesta pezzo da A	scarica pezzo e vai in B vuoto
pallet in A pieno e no richiesta pezzo da A	vai in B pieno
pallet in B vuoto	vai in I vuoto
pallet in B pieno e richiesta pezzo da B	scarica pezzo e vai in I vuoto
pallet in B pieno e no richiesta pezzo da B	vai in I pieno

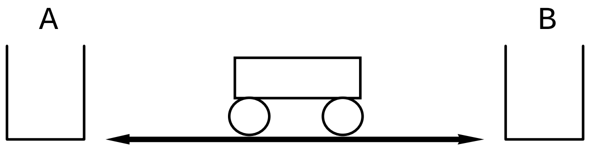
Soluzione



pallet in A
con pezzo
richiesta pezzo
in A
pallet in A
vuoto
viaggio
da A a B
scarico +
viaggio da A a B
viaggio
da A a B
pallet in B
con pezzo
richiesta pezzo
in B
pallet in B
vuoto
viaggio da B
all'Ingresso
scarico +
viaggio da B a I
viaggio
da B a I
pallet in I
con pezzo
presenza pezzo
in Ingresso
pallet in I
vuoto
viaggio
da I a A
carico +
viaggio
da I a A
viaggio
da I a A

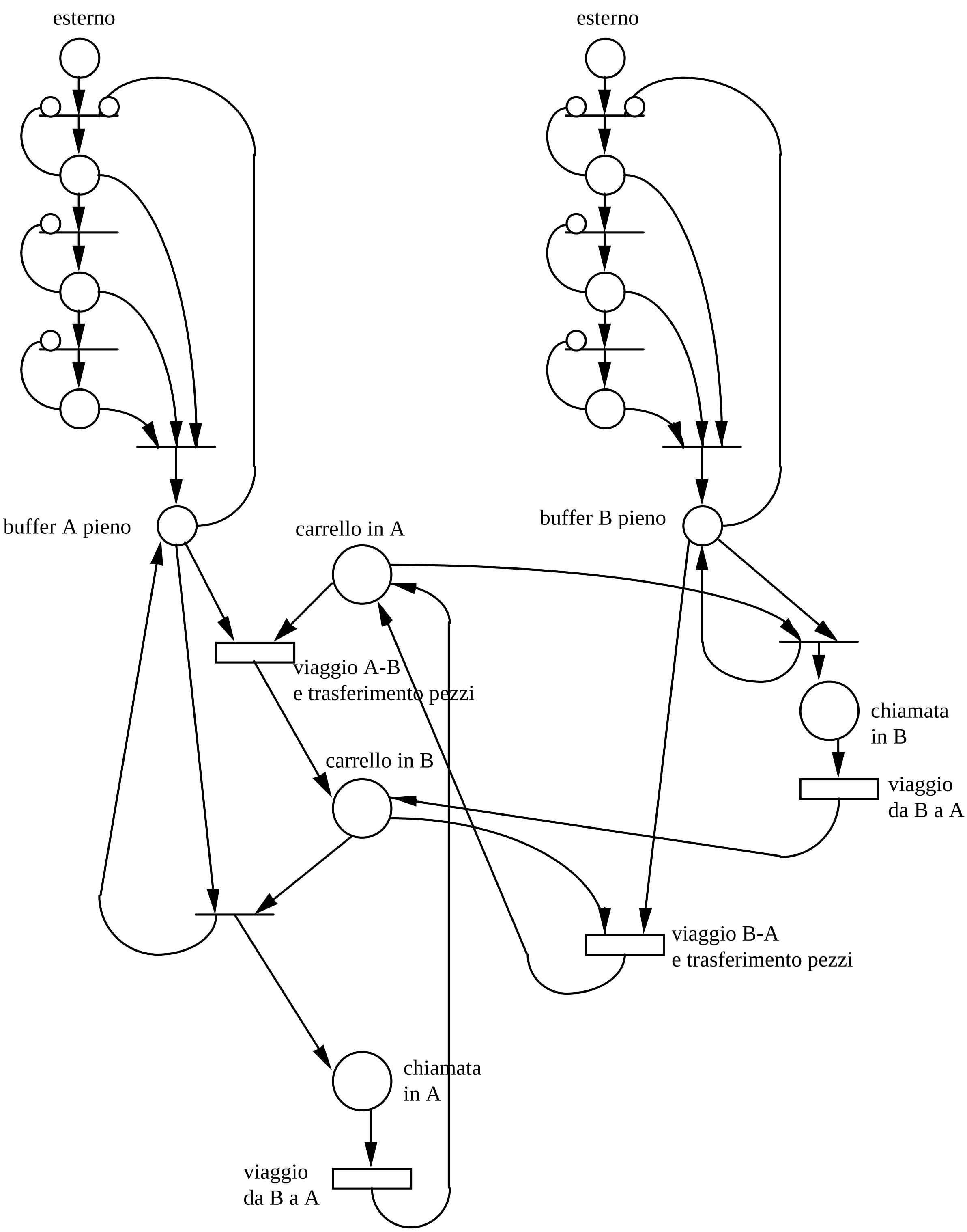
Problema 2.12

Un carrello AGV è utilizzato per trasportare pezzi tra due stazioni A e B. Ogni stazione è costituita da un buffer di ingresso, in cui si accumulano (dall'esterno) i pezzi da trasferire all'altra stazione, e un buffer di uscita, in cui invece vanno depositati i pezzi provenienti dall'altra stazione (si supponga tale buffer di capacità infinita). I buffer di ingresso hanno capacità 3. Quando un buffer di ingresso è pieno, il carrello viene chiamato (se non era già presente nella stazione) per effettuare il trasferimento all'altra stazione. Schematizzare il funzionamento del sistema con una rete di Petri.



evento	**azione**
carrello in A, buffer d'ingresso pieno	effettua il trasferimento
carrello non in A, buffer d'ingresso pieno	chiama il carrello
arrivo pezzo in A, buffer disponibile	mettilo in buffer d'ingresso di A
arrivo pezzo in B, buffer disponibile	mettilo in buffer d'ingresso di B

Soluzione

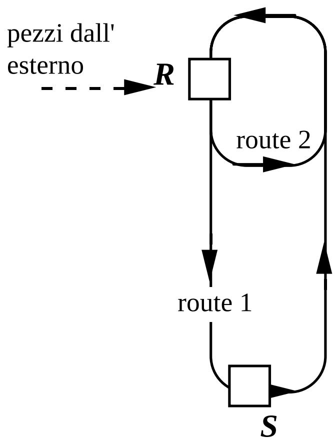


esterno
esterno
buffer A pieno
carrello in A
buffer B pieno
viaggio A-B
e trasferimento pezzi
chiamata
in B
carrello in B
viaggio
da B a A
viaggio B-A
e trasferimento pezzi
chiamata
in A
viaggio
da B a A

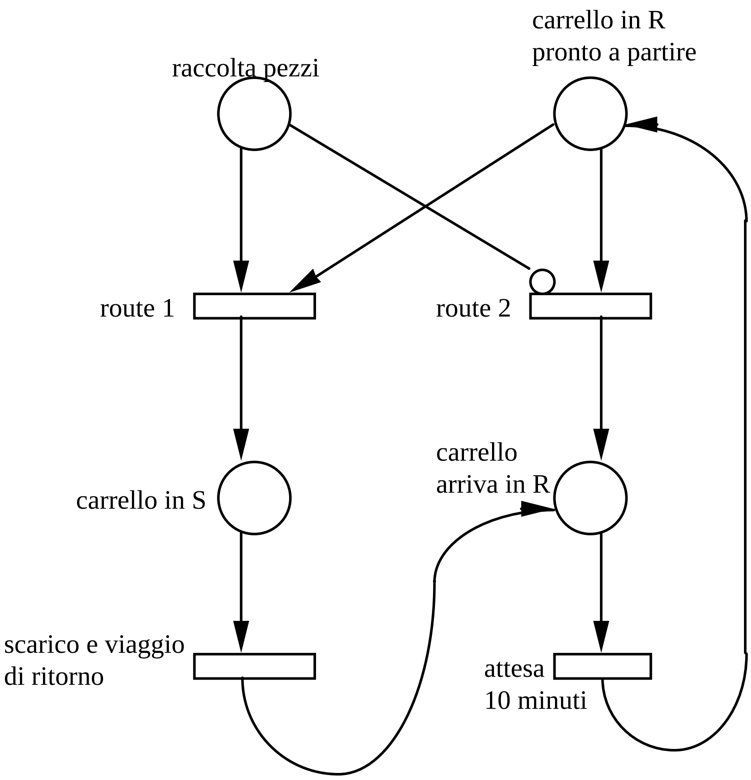
Problema 2.13

Un sistema di trasferimento pezzi completamente automatizzato utilizza un carrello per spostare pezzi da un punto di raccolta (R) a un punto di scarico (S). Dopo aver effettuato lo scarico dei pezzi, il carrello ritorna in R, pronto a ricevere tutti i pezzi che, dall’esterno, vanno via via accumulandosi in esso. Esattamente 10 minuti dopo il suo ritorno in R, esso si rimette in moto: se, nell’arco di questi 10 minuti, nel carrello si è depositato almeno un pezzo, allora il carrello si dirige, normalmente, verso il punto di scarico (route 1), altrimenti esso effettua un breve giro a vuoto (route 2) e si ripresenta quindi al punto di raccolta R.

Modellare il funzionamento del sistema con una rete di Petri.

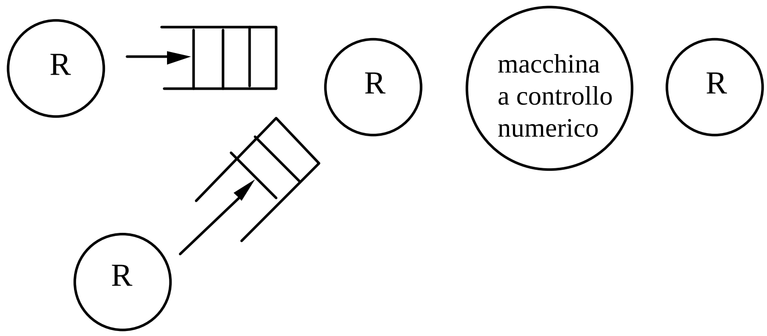


Soluzione

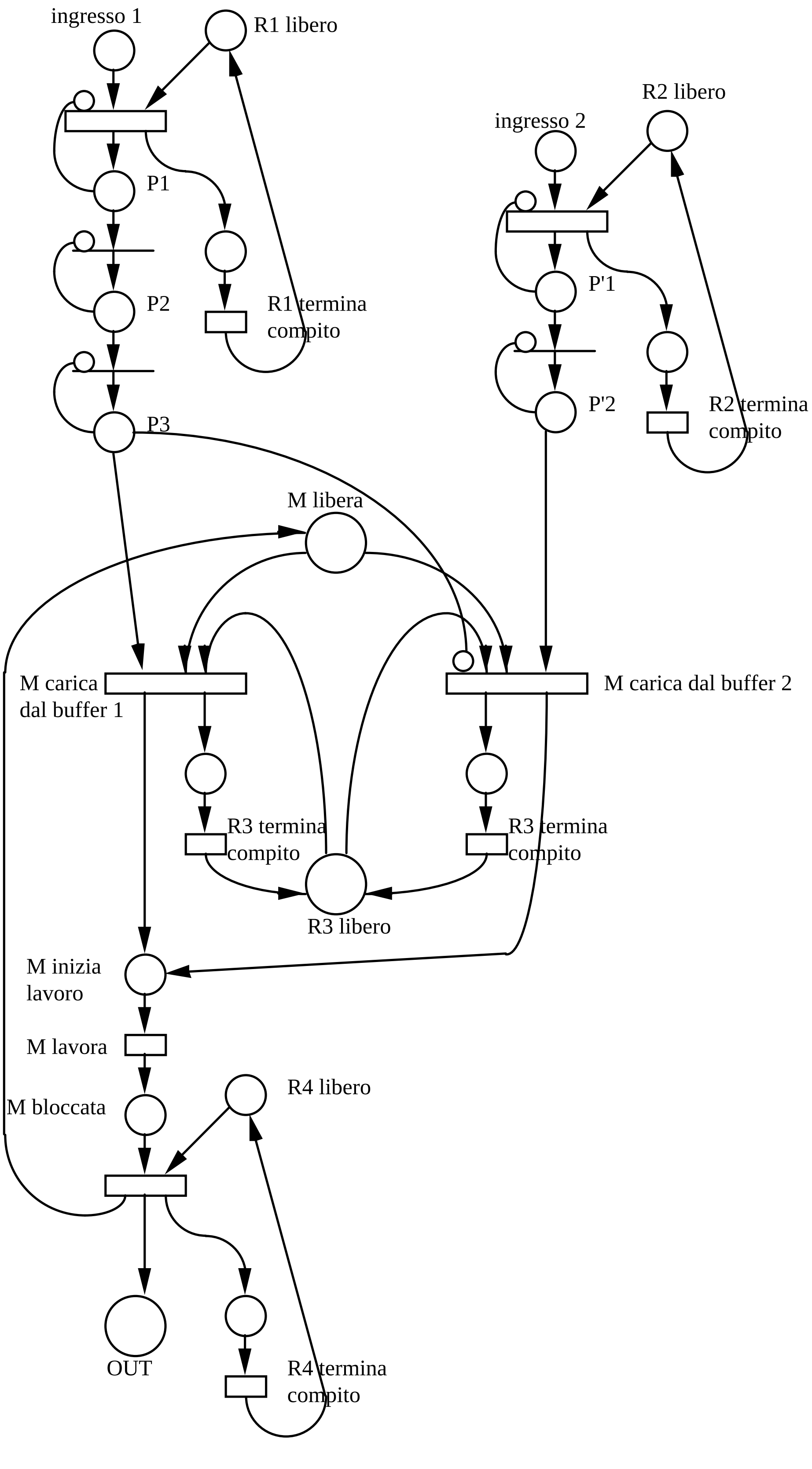

carrello in R
pronto a partire
raccolta pezzi
route 1
route 2
carrello in S
carrello
arriva in R
scarico e viaggio
di ritorno
attesa
10 minuti

Problema 2.14

Un centro di lavorazione è costituito da una macchina a controllo numerico, due buffer di input e un robot che effettua il trasferimento dai buffer alla macchina. I due buffer di input hanno priorità diverse, e funzionano ambedue in modalità FIFO. Solo quando il buffer a priorità più alta (che ha 3 posti) è vuoto, e la macchina è libera, può essere prelevato il primo pezzo in coda nel buffer a priorità più bassa (che ha 2 posti). I due buffer sono riforniti da altrettanti robot, come pure lo scarico del pezzo finito dalla macchina a controllo numerico avviene tramite robot.
Modellare il sistema con una rete di Petri.



Soluzione



ingresso 1
R1 libero
P1
P2
R1 termina
compito
P3
R2 libero
ingresso 2
P'1
P'2
R2 termina
compito
M libera
M carica
dal buffer 1
M carica dal buffer 2
R3 termina
compito
R3 termina
compito
R3 libero
M inizia
lavoro
M lavora
M bloccata
R4 libero
OUT
R4 termina
compito

Problema 2.15

Sia dato il sistema in figura 1.
Il buffer B1 è un magazzino, supposto di capacità infinita, in cui entrano nuovi pezzi in istanti di tempo aleatori.
Dal magazzino i pezzi vengono prelevati e processati da una delle due macchine M1, M2 di capacità unitaria operanti in parallelo e quindi inseriti nel buffer B2 d'uscita (di capacità infinita).
La movimentazione dei pezzi dal buffer B1 alle macchine e da queste al buffer B2 è affidata al robot R1 che opera secondo la seguente regola di priorità: "in caso di conflitto tra due o più operazioni, dai priorità massima allo svuotamento della macchina M1, quindi allo svuotamento della macchina M2, quindi al caricamento della macchina M1 e, infine, al caricamento della macchina M2 (priorità minima)".
Modellare il sistema come una rete di Petri.

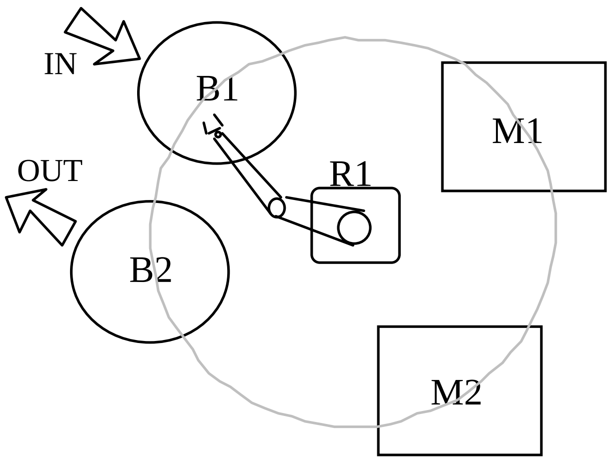
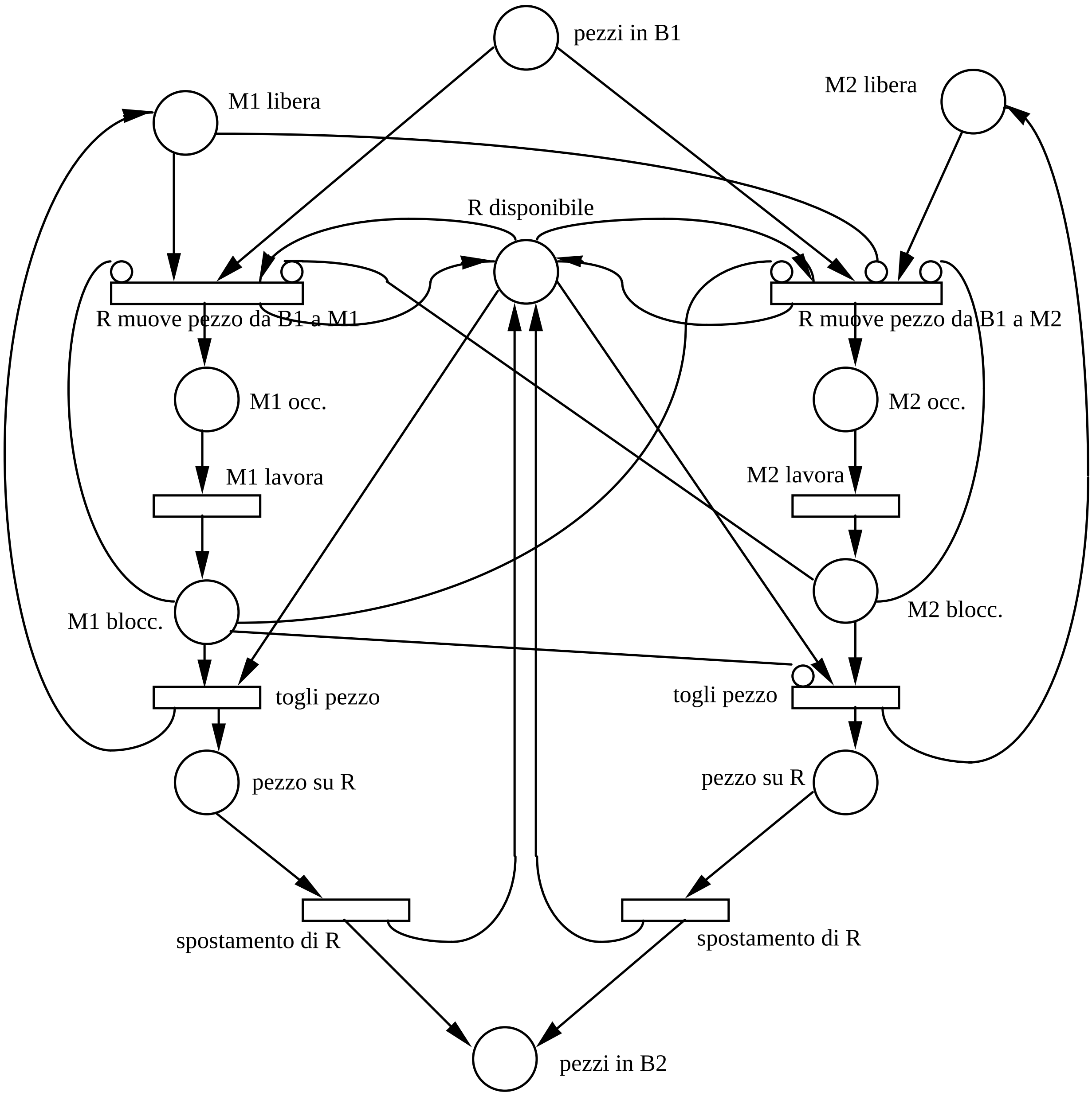


Fig.1

Soluzione

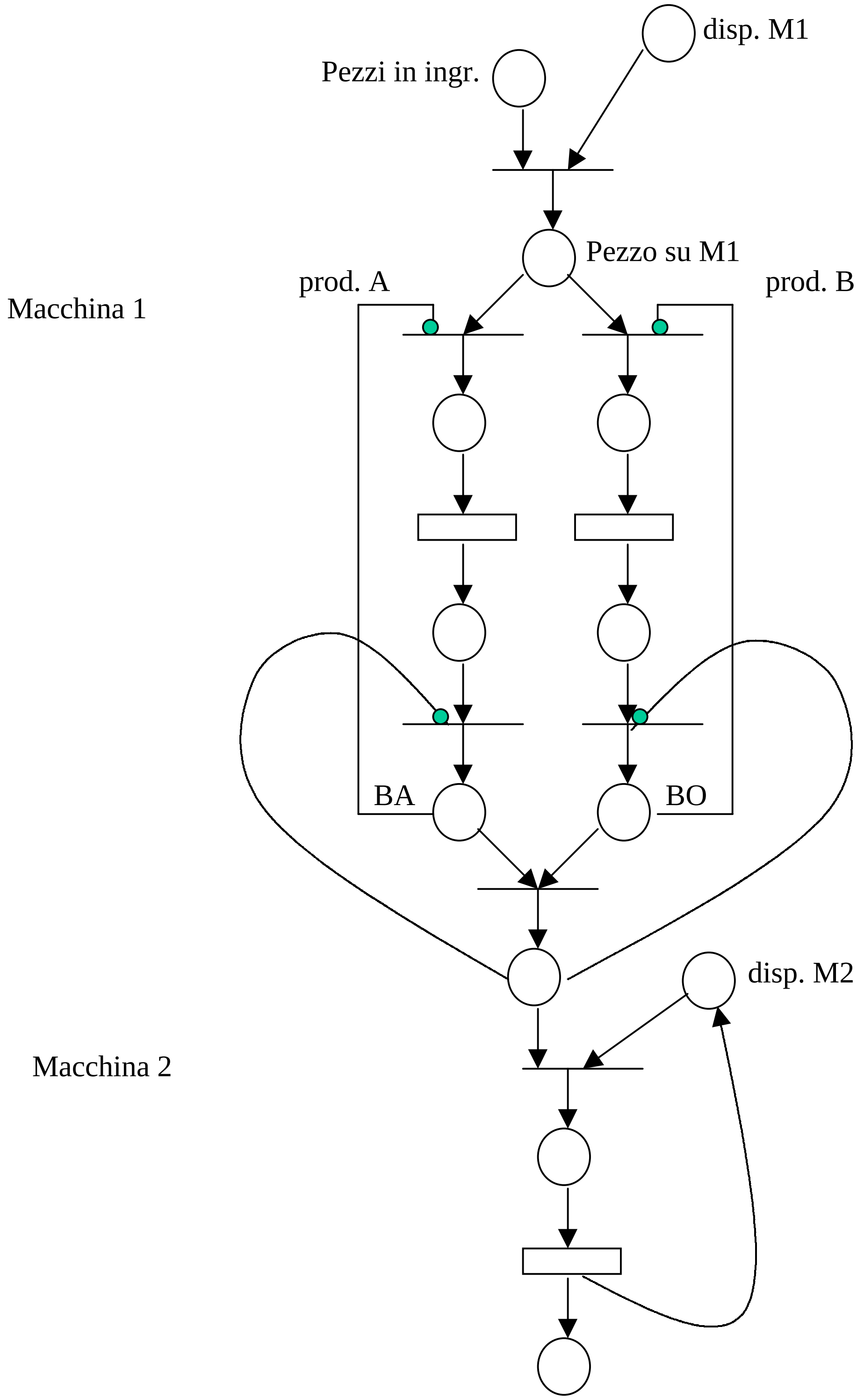

pezzi in B1
M1 libera
M2 libera
R disponibile
R muove pezzo da B1 a M1
R muove pezzo da B1 a M2
M1 occ.
M2 occ.
M1 lavora
M2 lavora
M1 blocc.
M2 blocc.
togli pezzo
togli pezzo
pezzo su R
pezzo su R
spostamento di R
spostamento di R
pezzi in B2

Problema 2.16

Sistema per la produzione e l'assemblaggio di pezzi

Un sistema di produzione e di assemblaggio é costituito da una macchina M1 per la produzione di due tipi di pezzi A e B a partire dalla stessa materia prima. I semilavorati A e B sono rispettivamente immagazzinati nei buffer, ad un solo posto, BA e BB di una macchina M2 che effettua l'operazione di assiematura.
I prodotti finiti AB sono scaricati da M2 ed escono dal sistema.
Per evitare situazioni di stallo del sistema si vuole che il tipo pezzo che M1 produrrà nel successivo istante di tempo dipenda dallo stato di BA e BB.
In particolare si richiede che:
se BA é pieno e BB é vuoto M1 produca un pezzo di tipo B;
se BA é vuoto e BB é pieno M1 produca un pezzo di tipo A;
se BA e BB sono entrambi vuoti o pieni sia indifferente il tipo di pezzo prodotto da M1.

Soluzione



disp. M1
Pezzi in ingr.
Pezzo su M1
prod. A
prod. B
Macchina 1
BA
BO
disp. M2
Macchina 2

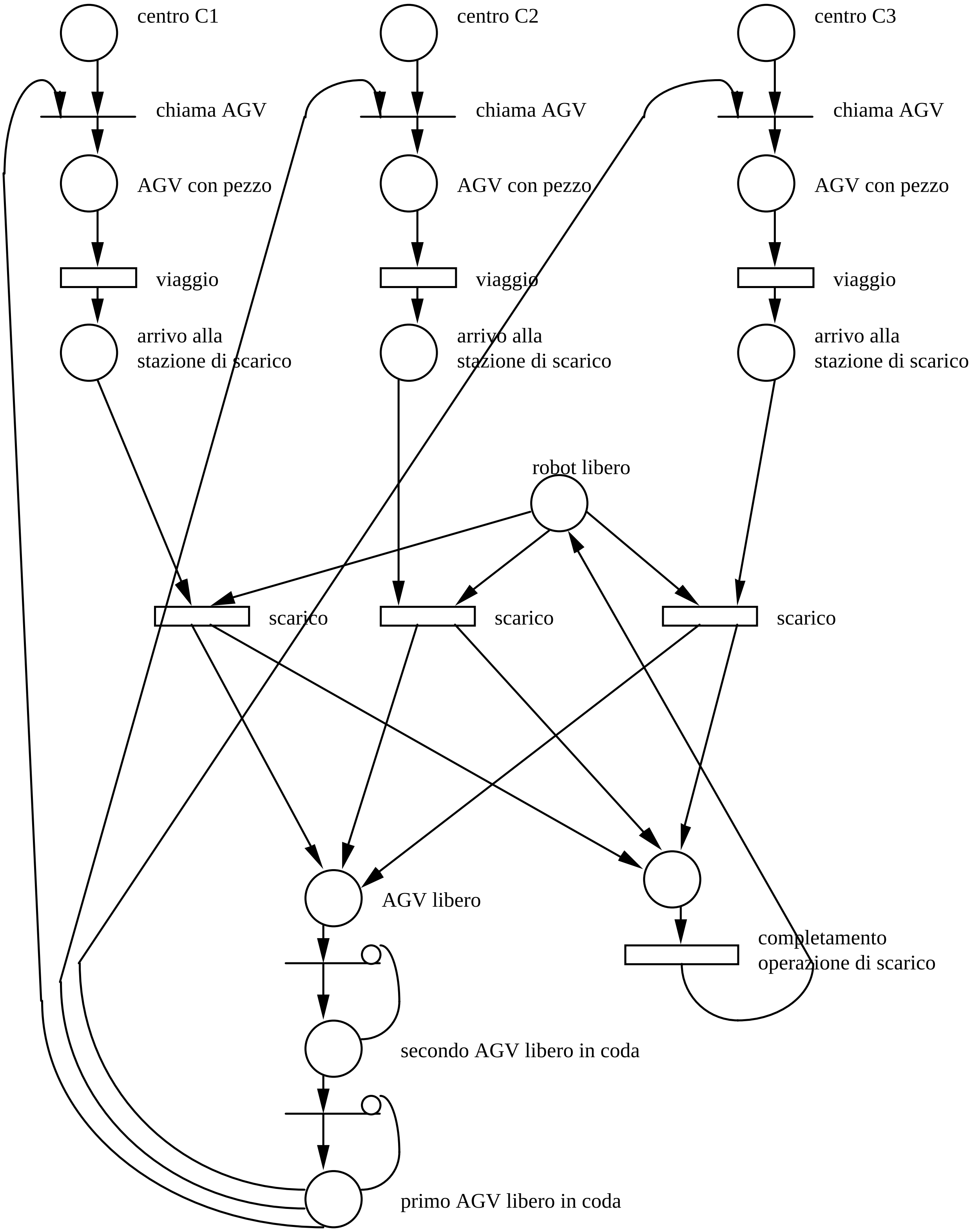
Problema 2.17

Un sistema flessibile di lavorazione consiste di tre centri di lavorazione più una stazione di scarico e un sistema di trasporto costituito da due AGV. I centri di lavorazione ricevono direttamente i grezzi da alimentatori esterni. Quando un centro di lavorazione termina un pezzo, chiama un AGV che prende il pezzo e lo porta alla stazione di scarico, dove un robot, *se libero*, provvede al prelievo del pezzo dall'AGV. Quando un AGV termina un servizio, torna *comunque* al posto di riposo. Allorché viene richiesto il servizio di un AGV da parte di un centro, viene chiamato quello che da più tempo si trova nel posto di riposo: in altre parole, un AGV che ha terminato un servizio entra in una *coda* (con disciplina, dunque, FIFO).

Tutti i tempi di percorrenza dal posto di riposo ai centri di lavorazione, da questi alla stazione di scarico e da questa al posto di riposo sono noti. Non sono noti a priori invece gli istanti in cui avvengono le chiamate agli AGV né il tempo che il robot della stazione di scarico impiega a scaricare i pezzi.

Modellare il sistema con una rete di Petri.

Soluzione

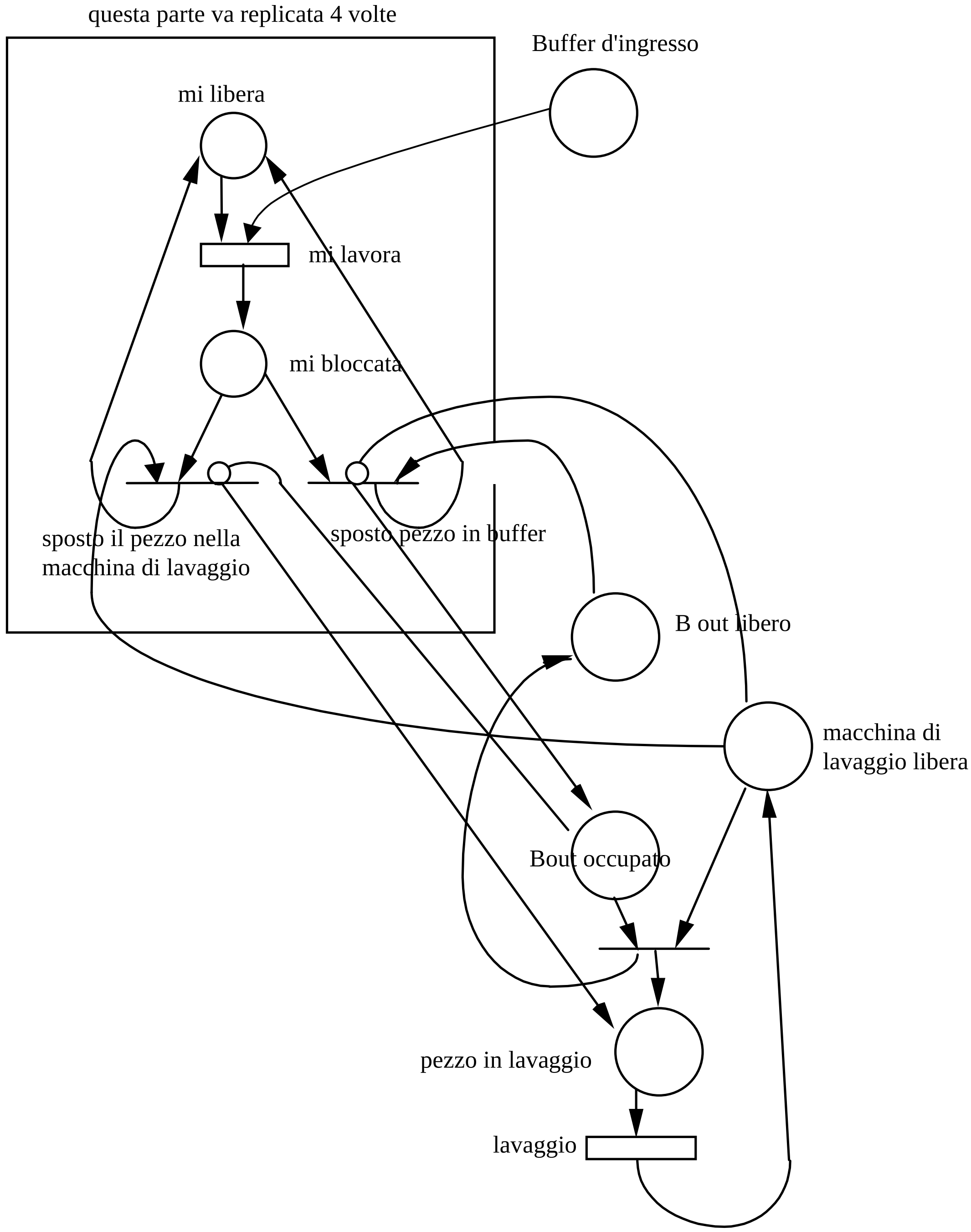

centro C1
centro C2
centro C3
chiama AGV
chiama AGV
chiama AGV
AGV con pezzo
AGV con pezzo
AGV con pezzo
viaggio
viaggio
viaggio
arrivo alla
stazione di scarico
arrivo alla
stazione di scarico
arrivo alla
stazione di scarico
robot libero
scarico
scarico
scarico
AGV libero
completamento
operazione di scarico
secondo AGV libero in coda
primo AGV libero in coda

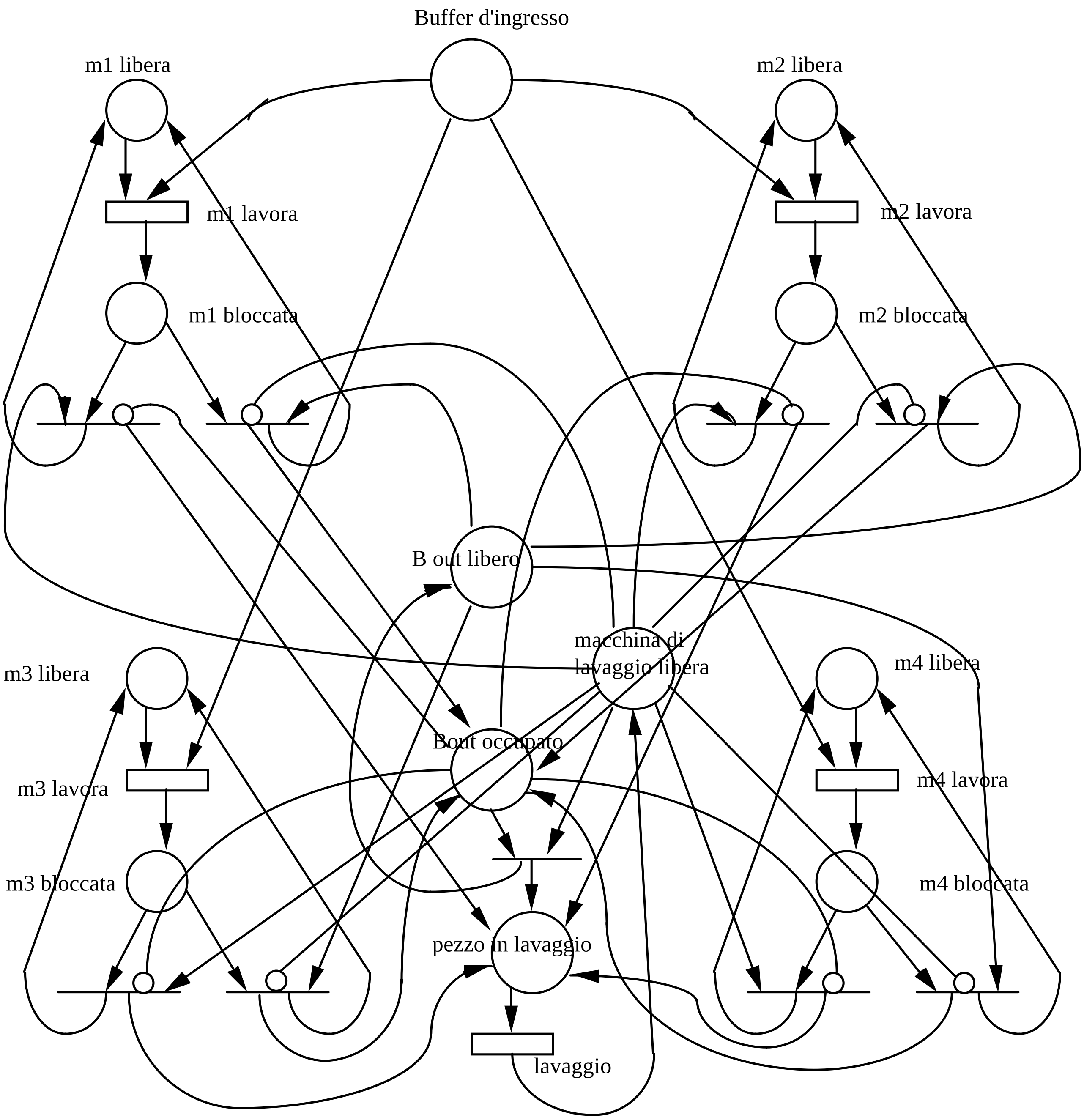
Problema 2.18

Si consideri una cella flessibile, composta di quattro macchine identiche operanti in parallelo più una macchina di lavaggio, in cascata alle precedenti.
Quando un nuovo pezzo entra nel sistema, se le macchine sono tutte occupate esso viene messo in attesa in un buffer supposto di capacità illimitata. Quando una macchina si libera, un pezzo qualsiasi viene prelevato dal buffer e avviato ad essa per la lavorazione. Se più macchine sono libere, e il buffer è vuoto, un nuovo pezzo che entra nel sistema viene inviato ad una macchina qualsiasi tra quelle disponibili.
Una volta terminata la lavorazione il pezzo lavorato viene inviato verso la macchina di lavaggio ovvero, se questa dovesse risultare occupata, verso un buffer di capacità unitaria in ingresso; se anche questo dovesse risultare occupato la macchina utensile rimarrebbe bloccata non potendo così effettuare nuove lavorazioni; una volta liberatosi il buffer se esistono una o più macchine bloccate un pezzo qualsiasi tra quelli in attesa viene immesso nel buffer rendendo così disponibile la macchina corrispondente per una nuova lavorazione
Modellare il sistema con una rete di Petri.

__Soluzione__

una possibile soluzione può ottenersi considerando quattro reti, ciascuna raffigurante una singola macchina, che interagiscono attraverso alcuni posti, rappresentanti la macchina di lavaggio, il buffer unitario in ingresso alla stessa ed il buffer illimitato in ingresso alla cella. Si ottiene la rappresentazione in figura nella quale si è rappresentata una sola macchina per semplicità. La rete complessiva segue nella figura successiva.




Buffer d'ingresso
m1 libera
m2 libera
m1 lavora
m2 lavora
m1 bloccata
m2 bloccata
B out libero
macchina di
lavaggio libera
m3 libera
m4 libera
Bout occupato
m3 lavora
m4 lavora
m3 bloccata
m4 bloccata
pezzo in lavaggio
lavaggio

ESERCIZI SULLO SCHEDULING DEL CORSO DI AUTOMAZIONE INDUSTRIALE

Problema 3.1

Stavolta siete il proprietario di una macchina utensile. Vi hanno commissionato 5 lotti di pezzi, che voi (alquanto incautamente) avete promesso per certe date, prima di considerare quanto tempo ci sarebbe voluto a produrle. Per ciascun lotto, ecco il tempo p_i necessario per produrlo (in giorni) e la data d_i per la quale avete promesso la consegna.

i	1	2	3	4	5
p_i	5	4	7	6	5
d_i	4	2	3	2	4

Per ogni giorno di ritardo sulla consegna di ciascun lotto, dovete pagate una penale di 100,000 lire. Come sequenziare i lotti al fine di minimizzare i costi?

SOLUZIONE

Come si vede, il problema è quello di minimizzare la somma dei ritardi dei vari lotti. Tale problema (da non confondersi con quello in cui si vuole minimizzare il massimo ritardo) non è, in generale, affatto semplice (ne è stata dimostrata l'NP-completezza nel 1990). Tuttavia, dando uno sguardo ai dati, osserviamo che ciascun lotto ha una durata tale da farlo terminare senz'altro in ritardo, qualunque sia la sua posizione nella sequenza. In altri termini, la tardiness viene in questo caso a coincidere con la lateness. Il problema di minimizzare la somma delle lateness dei vari lotti è semplice, in quanto può essere risolto tramite applicazione della regola SPT, ottenendo la sequenza: 2 1 5 4 3 cui corrisponde un ritardo totale di 2 + 5 + 10 + 18 + 24 = 59 giorni e dunque un costo di 5,900,000 lire.

Problema 3.2

La vostra officina deve produrre 5 lotti di pezzi, ciascuno con un suo tempo di processamento (in giorni) p_i. Per quel che riguarda le modalità di consegna, il cliente vi propone il seguente contratto: egli ha fissato, per ogni lotto, una data d_i. Se tale data è violata, la penale è di 100,000 lire per ogni giorno di ritardo. D'altro canto, il cliente è disposto a pagare un premio di 100,000 lire per ogni giorno in anticipo rispetto alla data d_i, per ogni lotto.

Vi sembra un contratto conveniente?

i	1	2	3	4	5
p_i	4	7	2	7	8
d_i	6	8	16	20	20

SOLUZIONE

Come si vede, l'obiettivo è quello di minimizzare la somma delle *lateness*, e quindi ancora una volta il problema è risolto applicando la regola SPT. Si noti che ciò non sarebbe stato possibile se, ad esempio, il premio per ogni giorno di anticipo fosse stato diverso dalla penale per ogni girono di ritardo. Un sequenziamento ottimo dei lotti è dunque:

3 1 2 4 5

cui corrisponde un costo di: -14 + 0 + 5 + 0 + 8 = –1, ossia complessivamente guadagnamo 100,000 lire, e dunque il contratto è conveniente.

Problema 3.3

Una società che produce dolciumi deve soddisfare un ordine per la produzione di cinque lotti di tavolette di cioccolata. Per quanto concerne la consegna dei pezzi, il cliente ha dettato delle date di consegna e vi pone di fronte alla scelta tra due tipi di contratto. In un primo caso, nel caso di ritardi nelle consegne, vi viene chiesto di pagare una cifra pari a un milione moltiplicato il massimo ritardo (in giorni) di un lotto (indipendentemente quindi dal numero di lotti in eventuale ritardo). Un secondo contratto invece è concepito nel seguente modo: nel caso la somma dei ritardi sia positiva, pagherete un numero di milioni pari a tale ritardo complessivo; se invece la somma dei ritardi è negativa (ossia, complessivamente vi è un anticipo rispetto alle date di consegna), un numero di milioni pari a tale anticipo complessivo verrà invece ricevuto in premio. Considerando che ciascun lotto i richiede l'uso di un centro di lavorazione per un tempo p_i (in giorni) riportato più sotto, quale contratto è più conveniente e perché (e in quale ordine vanno sequenziati i lotti)?

i	1	2	3	4	5
p_i	2	3	5	4	6
d_i	9	10	7	8	15

SOLUZIONE

Per valutare la bontà del primo contratto, dobbiamo evidentemente utilizzare la regola EDD. Sequenziando i lotti nell'ordine:

3 4 1 2 5

il ritardo massimo T_{max} si ha in corrispondenza del lotto 5, e vale 5. Dovremmo dunque pagare 5 milioni.

Per valutare il secondo contratto, dobbiamo sequenziare i lotti in modo da minimizzare la somma delle lateness, dal momento che il premio per ogni giorno di anticipo coincide con la penale per ogni giorno di ritardo. Basta dunque sequenziare i lotti in ordine SPT:

1 2 4 3 5

cui corrisponde un valore di lateness pari a $-7-5+1+7+5 = 1$, e dunque complessivamente pagheremmo 1 milione.

Il secondo contratto è dunque più conveniente.

Problema 3.4

Siete i proprietari di un centro di lavorazione per la produzione di pezzi meccanici. Uno dei vostri clienti vi ha appena ordinato un insieme di lotti, specificando, per ciascuno di essi, una data di consegna d_i (espressa in giorni a partire da oggi). In base all'entità e al tipo di lavorazioni, voi calcolate che il lotto i–esimo richiede p_i giorni per essere prodotto.

i	p_i	d_i
A	2	8
B	3	6
C	3	9
D	3	10
E	5	12
F	4	7

A questo punto, il cliente vi propone di scegliere tra due tipi di contratto: il primo prevede che voi paghiate una penale di 2 milioni per ogni lotto non consegnato in tempo. Il secondo, invece, non prevede penale per i lotti consegnati fino a due giorni dopo la scadenza d_i, ma successivamente la penale è di 2.5 milioni per lotto. Quale contratto è più conveniente (e, ovviamente, perché)?

SOLUZIONE

Basta evidentemente applicare due volte l'algoritmo di Moore. La prima volta con le due date indicate, la seconda con le due date aumentate di 2 unità.

Si segue dunque la regola EDD, fino ad avere il primo lotto in ritardo. I primi due lotti arrivano in tempo: B e F, mentre A giungerebbe in ritardo. Tra B, F e A il più lungo lotto è F, che viene quindi posto alla fine. La sequenza rimane:

B A

Il prossimo lotto nell'ordine EDD è C, che all'istante 8 termina in tempo. Invece D, terminerebbe in ritardo. Tra B, A, C e D il più lungo è proprio D, che viene dunque tolto e messo in fondo. La sequenza è per ora

B A C

il job E è però lungo 5, e dunque anch'esso terminerebbe in ritardo. In definitiva, si ha che solo 3 lotti giungono in tempo (B, A e C) e dunque il costo sarebbe di 6 milioni.

Con il secondo contratto, aumentiamo tutte le due date di due unità. Stavolta il primo lotto a eccedere la propria due date secondo l'ordine EDD è C. Tra B, F, A e C il più lungo è F che viene quindi eliminato. La sequenza è per ora

B A C

A questo punto, D termina in tempo mentre E eccede la propria due date. E è il più lungo e viene posto in fondo. In definitiva, i lotti B, A, C e D (in quest'ordine) giungono in tempo e dunque solo due lotti vengono terminati in ritardo. Il costo di questo contratto è dunque 5 milioni, più conveniente del precedente.

Problema 3.5

La vostra macchina utensile deve produrre 6 lotti di pezzi, ciascuno dei quali richiede la macchina per una durata p_i (espressa in giorni) e ha una data di consegna d_i:

i	1	2	3	4	5	6
p_i	4	5	6	6	8	9
d_i	31	17	19	24	15	28

La perdita di credibilità che deriverebbe dal non rispettare anche una sola data di consegna è considerata inaccettabile. Se necessario, è possibile ricorrere a subcommittenti, i quali assicurano pronta consegna, al prezzo però di 1 milione per ciascun lotto subcommissionato. Qual è il costo minimo che siamo costretti a pagare?

SOLUZIONE

L'algoritmo da applicare è quello di Moore. Infatti, l'obiettivo equivale a minimizzare il numero di lotti che arrivano in ritardo. Procedendo come nel Problema 3.7, si ottiene il sequenziamento

2 3 4 6 1

mentre il lotto 5 verrà subcommissionato.

Problema 3.6

La NASA si trova in grave ritardo nella costruzione di un nuovo propulsore, e si rivolge alla vostra azienda per la fornitura di alcuni pezzi. Vi vengono richiesti tre reattori, con scadenza al 10, 15 e 20 del mese rispettivamente; due pannelli atermici, con scadenza il 10 e il 20 del mese; e infine un alettone, per il 15 del mese. Tutte le materie prime verranno fornite all'inizio del mese. Ogni articolo che saremo in grado di consegnare entro la data richiesta verrà pagato centomila dollari. Tuttavia, la NASA non comprerà alcun articolo consegnato oltre la scadenza, in quanto ciò significherebbe un inaccettabile ritardo nei suoi piani.

L'offerta è assai allettante. Mobilitando tutte le risorse di cui disponete, giungete alla conclusione che per costruire un reattore ci vogliono 6 giorni, per un pannello 5 e per un alettone ce ne vogliono 4.

Sapreste applicare un opportuno algoritmo per massimizzare il profitto?

SOLUZIONE

Il problema consiste nel massimizzare il numero di pezzi consegnati in tempo, ovvero di minimizzare il numero di pezzi in ritardo. Ciò si risolve applicando l'algoritmo di Moore (Problema 3.7) all'istanza:

i	1	2	3	4	5	6
p_i	6	6	6	5	5	4
d_i	10	15	20	10	20	15

Una soluzione ottima è data dal produrre, nell'ordine:

4 2 6 5

mentre 1 e 3 non vengono prodotti, in quanto arriverebbero in ritardo.

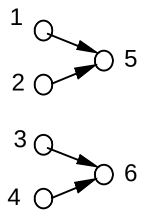
Problema 3.7

Una macchina deve eseguire 6 lavori, ciascuno dei quali è caratterizzato da una durata t_i, una data di consegna d_i e un *peso* w_i, che può pensarsi come una misura dell'importanza di ciascun lavoro. Tra i lavori esiste una relazione di precedenza, illustrata in figura.

Determinare la sequenza di lavorazione sulla macchina in modo tale da minimizzare il massimo valore che assume la quantità

$$w_i \, T_i$$

ove T_i indica la *tardiness* del lavoro *i*–esimo.



i	d_i	w_i	τ_i
1	8	2	4
2	12	1	3
3	8	2	2
4	8	1	4
5	12	4	1
6	13	3	1

SOLUZIONE

Si tratta di applicare l'algoritmo di Lawler. Allochiamo quindi i job a partire dal fondo dello schedule. La somma di tutti i tempi di processamento è 15. Inizialmente, gli unici due candidati a essere ultimi sono i job 5 e 6. Se essi terminano all'istante 15, danno come valori di funzione obiettivo 4*3=12 e 3*2=6 rispettivamente. Scegliamo quindi il job 6:

_ _ _ _ _ 6

aggiorniamo la somma dei tempi dei job non schedulati, che dà 15 – 1 = 14. Ora i candidati sono i job 3, 4 e 5. I valori di funzione obiettivo sono 2*6=12, 1*6=6 e 4*2=8 rispettivamente, e dunque scegliamo il lavoro 4:

_ _ _ _ 4 6

avendo il lavoro 4 durata pari a 4, la somma dei tempi dei job non schedulati si abbassa a 10. I candidati sono ora 3 e 5; poiché il job 5 terminerebbe entro la propria due date mentre il job 3 terminerebbe comunque in ritardo, scegliamo il job 5:

_ _ _ 5 4 6

A questo punto i candidati sono 1, 2 e 3 e la loro somma dei tempi è 9. L'unico job che termina in tempo all'istante 9 è il job 2:

_ _ 2 5 4 6

Poiché a questo punto la somma dei tempi dei job non schedulati è pari a 6, e sia 1 che 3 hanno date di consegna più alte, le due soluzioni (1 3 2 5 4 6) e (3 1 2 5 4 6) sono ugualmente ottime. Il valore ottimo della funzione obiettivo è 6 (ottenuto in corrispondenza ai job 4 e 6).

Problema 3.8

Un centro di lavorazione deve processare, in un certo mese, un insieme di lotti di pezzi. Per ogni lotto sono specificate la durata complessiva (in giorni) delle lavorazioni p_i e una data di consegna d_i. Se un lotto i viene terminato entro d_i, allora la consegna avviene a cura del cliente, altrimenti occorre accollarsi il trasporto, per il quale si rende necessario l'impiego di w_i camion (riutilizzabili poi per ogni altra consegna).

i	p_i	d_i	w_i
A	3	15	2
B	4	17	1
C	5	23	3
D	6	15	4
E	7	14	3

Il gestore dell'azienda vuole dotarsi del minimo numero di camion necessari per far fronte alle consegne ritardatarie. Qual è tale numero minimo e in che ordine vanno sequenziati i lotti?

SOLUZIONE

Il problema va risolto con l'algoritmo di Lawler. Infatti, se anche un solo lotto costringe all'uso di w_i camion, questo è ciò che dobbiamo pagare. Dunque, occorre minimizzare il massimo w_i di un lotto che termina in ritardo. Ciò equivale ad associare a ognuno dei 5 lotti una funzione $g_i(C_i)$ non decrescente del proprio tempo di completamento (e dunque regolare), che vale 0 per $C_i <= d_i$ e vale w_i per $C_i > d_i$. In questo modo, costruendo al solito la sequenza a partire dal fondo, si ha che all'istante finale *T*= 25 qualunque job arriva in ritardo: conviene allora sequenziare per ultimo B, che richiede un solo camion. Si aggiorna quindi *T*, che diviene pari a 21. Il minimo delle g_i si ha in corrispondenza di C, che all'istante 21 è ancora in tempo. Aggiornando *T*, che vale 21 – 5 = 16, si ha che tutti e tre i rimanenti lotti arrivano in ritardo. Selezioniamo allora A, che è quello avente il w_i più basso, pari a 2. A questo punto, gli altri due job possono essere sequenziati in uno qualunque dei due modi. In definitiva si ottengono le due sequenze ottime:

D E A C B oppure E D A C B.

Problema 3.9

Una società che produce ricambi per autovettura deve soddisfare un ordine per la produzione di cinque lotti di pezzi. Ciascun lotto i richiede l'uso di un centro di lavorazione per un tempo p_i (in giorni). Per quanto concerne la consegna dei pezzi, è stato siglato il seguente contratto: a ciascun lotto sono associate tre ”date critiche” d_i', d_i''e d_i''', il cui significato è il seguente. Il mancato completamento *anche di un solo lotto* entro la propria data d_i' si traduce in una penale pari a x; il mancato completamento *anche di un solo lotto* entro la propria data d_i'' si traduce in una penale pari a $y > x$ e infine, il mancato completamento *anche di un solo lotto* entro la propria data d_i''' comporta un costo $z > y$ in quanto a quel punto il committente annullerebbe l'ordine nel suo complesso (restituendo anche i pezzi già consegnati). Sottolineiamo che i costi x, y e z sono indipendenti dal *numero* di lotti che superano le rispettive date d_i', d_i'' e d_i'''.

In quale ordine vanno sequenziati i lotti al fine di minimizzare i costi (e perché).

i	1	2	3	4	5
p_i	1	2	3	4	5
d_i'	2	7	8	5	6
d_i''	9	8	10	9	15
d_i'''	16	8	15	11	15

SOLUZIONE

Il problema può essere risolto in due diversi modi. Quello più elegante è forse quello consistente nell'applicare l'algoritmo di Lawler. Infatti, è possibile associare a ciascun lotto una funzione $g_i(C_i)$ che vale 0 per $C_i <= d_i'$, vale x per $d_i' < C_i <= d_i''$, vale y per $d_i'' < C_i <= d_i'''$, e vale infine z per $C_i > d_i'''$. Partendo allora da $t = 15$, si ha che il lotto da seqeunziare per ultimo sarà il lotto 5, il quale è l'unico che ci consente di pagare una penale pari a x.

_ _ _ _ 5

Aggiornando t al valore 10, osserviamo che il lotto 3 è l'unico che consente di pagare ancora solo x, e dunque

_ _ _ 3 5

A questo punto t è pari a 7, e chiaramente, in questo caso, l'ordine in cui vengono svolti gli altri tre lotti è indifferente, in quanto tutti hanno $d_i'' > 7$. La penale da pagare è quindi pari a x.

Un metodo alternativo poteva essere quello di applicare più volte la semplice regola EDD, osservando di volta in volta se T_{max} risulta positivo o nullo. In effetti, eseguendo EDD rispetto alle date d_i' si otterrebbe $T_{max} > 0$, mentre già rispetto alle d_i'' si avrebbe $T_{max} = 0$.

Problema 3.10

Una unità operatrice deve svolgere 6 lavori, ciascuno dei quali è caratterizzato da una durata (espressa in giorni) e una due date:

i	1	2	3	4	5	6
p_i	4	2	3	4	2	5
d_i	13	13	5	14	1	18

il problema consiste nel sequenziare i 6 lavori in modo tale che la massima violazione di una due date non sia superiore a 2 giorni, e che sia minimizzato il tempo medio trascorso nel sistema da un lavoro (F). Possibilmente, indicare una sequenza ottima efficiente, ovvero tale che si possa dire con certezza che F non può migliorare senza aumentare il massimo ritardo accettabile e viceversa.

SOLUZIONE

Occorre applicare l'algoritmo di Smith-Van Wassenhove. Anzitutto, quindi, aumentiamo di 2 tutte le due date, dal momento che si richiede una sequenza (se esiste) tale che nessun job arrivi con più di 2 giorni di ritardo. La tabelmla diventa:

i	1	2	3	4	5	6

p_i	4	2	3	4	2	5
d_i	15	15	7	16	3	20

Allochiamo quindi i job a partire dal fondo dello schedule. La somma di tutti i tempi di processamento è 20. L'unico job che, secondo le nuove due date, sequenziato per ultimo, può terminare in tempo è job 6:

_ _ _ _ _ 6

A questo punto, l'istante di completamento del penultimo job è l'istante 15. Adesso sono ben tre i job candidati a essere messi al penultimo posto, in quanto hanno una due date = 15: i job 1, 2 e 4. Secondo l'algoritmo di Smith, poiché vogliamo minimizzare la somma dei tempi di completamento, la scelta va ristretta a quello o quelli più lunghi. Nel nostro caso ce ne sono due: 1 e 4. Se vogliamo poi anche una sequenza efficiente, tra questi dobbiamo scegliere quello con la due date più grande, e dunque il job 4:

_ _ _ _ 4 6

il nuovo istante di fine è ora 11. I job tra cui selezionare il predecessore del job 4 sono ancora 1 e 2. Scegliamo il job 1, in base alla regola di Smith:

_ _ _ 1 4 6

la scelta è ora ristretta ai job 2 e 3 (entrambi con due date = 7). Poiché il job 3 è più lungo, lo selezioniamo:

_ _ 3 1 4 6

infine, si ottiene:

5 2 3 1 4 6.

Problema 3.11

Questo mese la vostra officina deve produrre 6 lotti di pezzi, ciascuno con una sua data di consegna d_i e un suo tempo di processamento (in giorni) p_i. All'inizio del mese acquistate le materie prime: tra capitale immobilizzato e affitto del magazzino, voi calcolate che venite a pagare 100,000 lire al giorno per ogni lotto che non avete ancora ultimato. D'altro canto, violare le date di consegna dei job è considerato inaccettabile.

i	1	2	3	4	5	6
p_i	3	5	6	2	7	4
d_i	27	11	11	27	19	24

In quale ordine converrà sequenziare i job e perché?

SOLUZIONE

L'obiettivo del problema equivale a minimizzare la somma dei giorni di lavorazione di tutti i lotti. Questo obiettivo è perciò quello di minimizzare la somma dei tempi di flusso, ovvero, essendo tutte le release date nulle, la somma dei tempi di completamento, con il vincolo che nessun job arrivi in ritardo. Basterà allora sequenziare i lotti secondo l'algoritmo di Smith, ovvero:

2 3 5 4 6 1

cui corrisponde una spesa di 10,500,000 lire.

Problema 3.12

Un cliente vi ha commisionato 5 lotti di pezzi, ciascuno con un suo tempo di processamento (in giorni) p_i e una sua data di consegna d_i. *Per ogni giorno* in cui un lotto di pezzi non è terminato (e quindi contribuisce al work-in-process), voi pagate un costo di immagazzinamento che è uguale per tutti i lotti, e pari a £.10,000. Inoltre, avete concordato con il vostro cliente che pagherete una multa pari a £.15,000 per ogni giorno di ritardo *del lotto più in ritardo* sulla consegna.

In che ordine conviene sequenziare i lotti e perché?

i	1	2	3	4	5
p_i	2	3	3	2	4
d_i	9	6	10	10	14

SOLUZIONE

E' un problema in cui i due obiettivi, ossia il tempo totale di flusso, e il ritardo massimo, sono combinati secondo certi coefficienti di costo: precisamente, la funzione obiettivo è:

$$15{,}000\ T_{max} + 10{,}000\ \Sigma_i F_i$$

vogliamo allora trovare soluzioni efficienti, partendo dal caso $T_{max} = 0$. In questo caso, applicando l'algoritmo di Smith, si ottiene la sequenza:

1 2 4 3 5

che dà un tempo totale di flusso pari a 38, e dunque un costo di £.380,000.

Aumentiamo ora tutte le due date di 1 giorno, ottenendo:

i	1	2	3	4	5
p_i	2	3	3	2	4
d_i	10	7	11	11	15

e riapplicando Smith, si ottiene:

1 4 2 3 5

che dà un tempo totale di flusso pari a 37. In effetti, il lotto 2 arriva con un ritardo pari a 1, che è proprio T_{max}. Il costo complessivo è dunque 15,000 + 370,000 = 385,000, peggiore del precedente.

A questo punto osserviamo che la sequenza ottenuta coincide con quella SPT, ovvero, in altri termini, permettere un T_{max} più elevato non porterebbe alcun miglioramento in termini di tempo totale di flusso. Dunque, la soluzione ottima è quella di costo £.380,000.

Sequenziamento di due lavori con incompatibilità

Problema 3.13

Un sistema di produzione è caratterizzato da una cella costituita da due centri di lavorazione, da un magazzino utensili e da due sequenze di operazioni ciascuna assegnata ad un centro. Ogni operazione di una sequenza richiede l'utilizzo di un determinato utensile. I due centri possono procedere in parallelo nell'esecuzione delle operazioni assegnate finchè non sia richiesto l'uso dello stesso utensile (operazioni incopatibili). Se questo accade si genera un conflitto ed uno dei due centri di lavorazione deve attendere che l'altro rilasci l'utensile.

Il problema consiste nel determinare, al sorgere di ogni conflitto, quale dei due centri debba attendere e quale invece debba iniziare la lavorazione.

I tempi di processamento dei due lavori sulle macchine sono:

macchina	1	2	3	4	5
A	10	3	5	3	3
B	6	5	7	5	7

Le coppie di operazioni incopatibili (quelle che richiedono, cioè, lo stesso utensile) sono: A2,B3; A4,B4; A5,B5.

Si vuole sequenziare i due lavori su ogni macchina in modo da minimizzareil tempo di completamento totale.

SOLUZIONE

Il problema si riconduce ad un problema di cammino minimo su un grafo aciclico opportuno e può essere risolto applicando un algoritmo di programmazione dinamica.

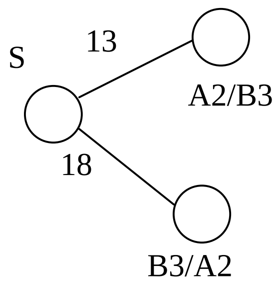
B5					
B4					
B3					
B2					
B1					
	A1	A2	A3	A4	A5

Indichiamo nel seguito con $A^{(i)}$ e con $B^{(j)}$ rispettivamente le sottosequnenze di operazioni Ai, Ai+1, … ,A5 e Bj, Bj+1, … ,B5. Siano inoltre t(Ai) e t(Bj) le durate delle corrispondenti operazioni.

All'inizio i due lavori sono eseguibili in parallelo fino ad incontare la prima coppia di operazioni incopatibili. A questo punto, come già detto, una delle due deve attendere il completamento dell'altra. Fatta una scelta, chiamiamo *milestone* l'istante di completamento della prima delle due operazioni in conflitto.

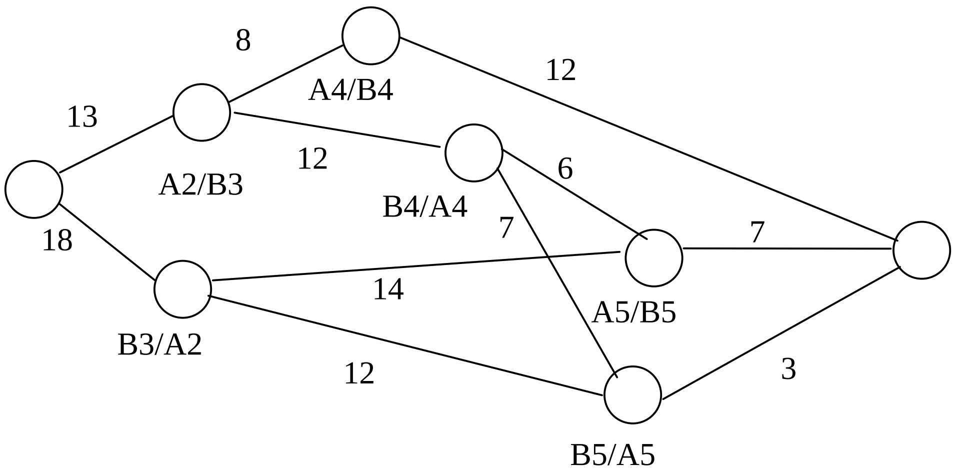
Se Ai è eseguita prima di Bj, la distanza temporale dall'inizio fino al milestone è quindi t(A1)+…+ t(Ai). Analogamente, nell'altro caso, tale distanza sarà t(B1)+…+ t(Bj).

Queste due alternative si possono rappresentare con due nodi etichettati con rispettivamente con Ai/Bj e Bj/Ai, si aggiunga, inoltre, un nodo S rappresentante il punto di inizio connesso ai due nodi precedenti. I due archi sono pesati con la corrispondente durata temporale.



Da ognuna delle due situazioni precedenti possiamo poi proseguire, considerando il nodo relativo all'alternativa scelta come il punto di inizio di un sottoproblema in cui i due lavori da eseguire, riferendosi al milestone Ai/Bj sono $A^{(i+1)}$ e $B^{(j)}$.

Reiterando il ragionamento precedente si ottiene il grafo in figura. In cui gli archi sono pesati con la distanza tra due milestone, eccetto qulli entranti in nel nodo P, che invece sono pesati con la distanza dal milestone alla fine dello schedule. Il cammino minimo su questo grafo dà lo schedule ottimo.



3.14 Tempi di set-up dipendenti dalla sequenza

Si consideri una cella di produzione costituita da una macchina che deve processare un insieme di job, tutti disponibili all'istante inziale, con tempi di set-up dipendenti dalla sequenza di processamento.

In particolare ad ogni job sono assegnati i parametri a_j e b_j, che indicano lo stato di inizio e di fine della macchina. Il tempo di set-up per processare il job k dopo il job j risulta essere $|a_k - b_j|$.

I job ed i relativi parametri sono espressi nella seguente tabella:

job	0	1	2	3	4	5	6
b_j	1	15	6	24	33	29	21
a_k	3	28	46	41	14	35	18

Trovare il sequenziamento che minimizzi il tempo totale di set-up.

SOLUZIONE

Il problema può essere risolto applicando l'algolritmo di Gilmore e Gomory.

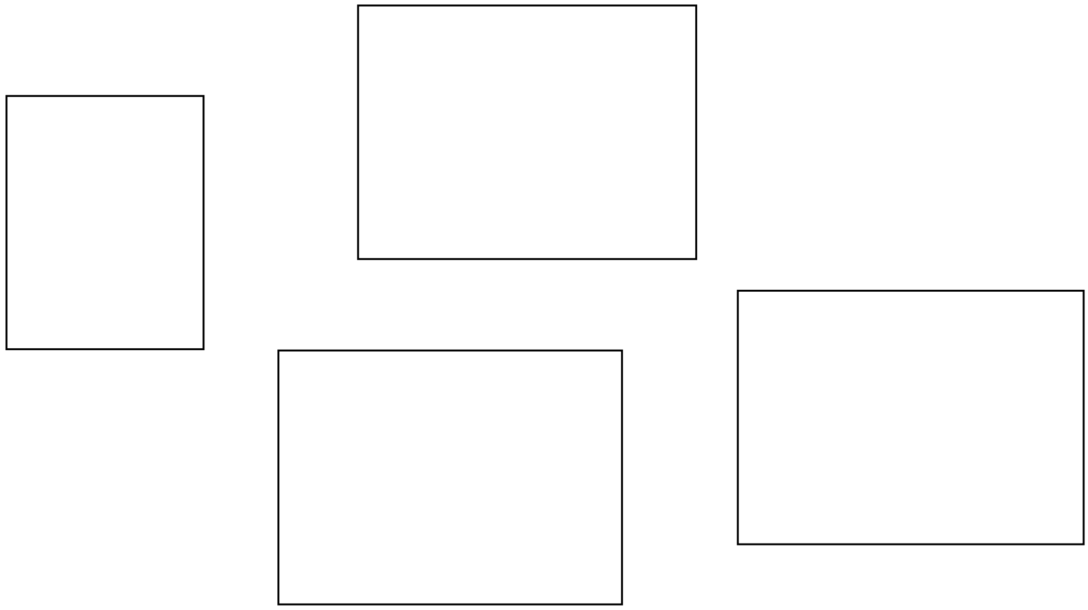
Passo 1

Riordina e rinumera i job secondo i bj crescenti. Calcola la funzione φ *.

job	0	1	2	3	4	5	6
b_j	1	6	15	21	24	29	33
a_j	3	46	28	18	41	35	14
$a_{\varphi^*(j)}$	3	14	18	28	35	41	46
$\varphi^*(j)$	0	6	3	2	5	4	1

Passo 2

Dai valori di φ *(j) si deduce che i nodi sono connessi l'uno all'altro nel seguente modo:



Passo 3

job	0	1	2	3	4	5	6
b_j	1	6	15	21	24	29	33
$a_{\varphi *(j)}$	3	14	18	28	35	41	46

Calcolo dei costi di interscambio $c_{\varphi *} I(j, j+1)$:

$c_{\varphi *} I(0, 1) = 2(6-3) = 6$;

$c_{\varphi *} I(1, 2) = 2(15 - 14) = 2$;

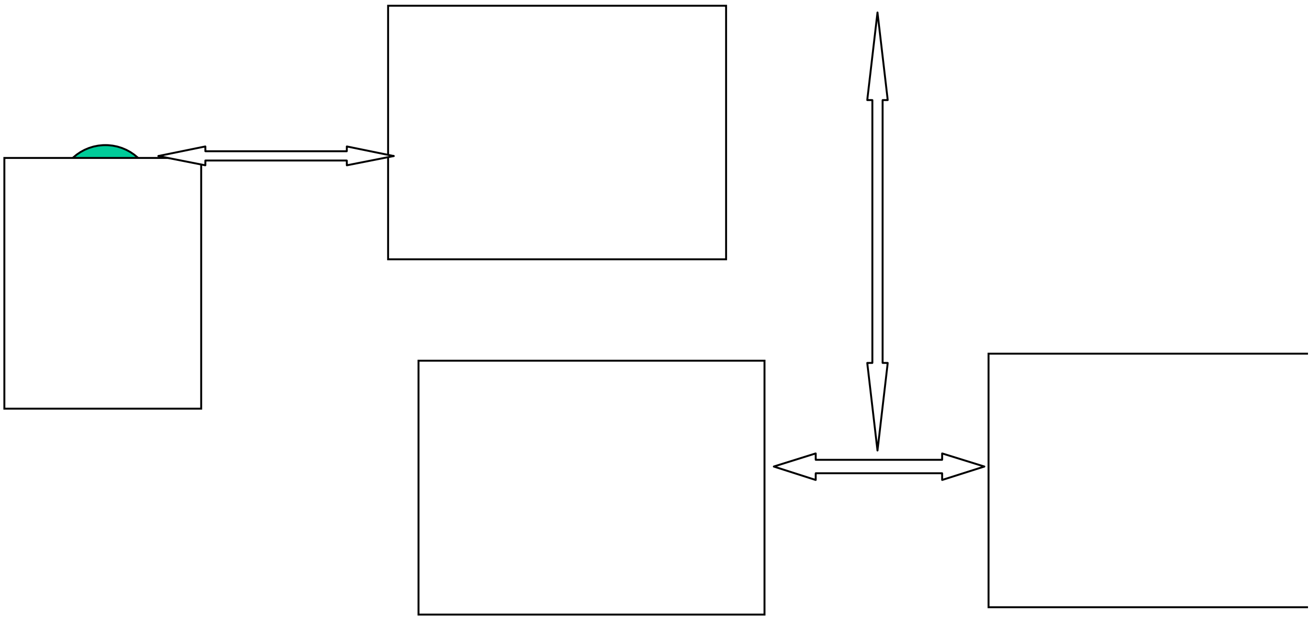
$c_{\varphi *}\, I(2, 3) = 2(21 - 18) = 6$;

$c_{\varphi *}\, I(3, 4) = 0$;

$c_{\varphi *}\, I(4, 5) = 0$;

$c_{\varphi *}\, I(5, 6) = 0$;

Passo 4



Passo 5

Vediamo a che gruppo appartengono gli scambi:

archi	bj	$a_{\varphi *(j)}$	gruppo
I(0,1)	1	3	A
I(3,4)	21	28	A
I(5,6)	29	41	A

J1=5, J2=3, J3=0.

Passo 7

Il ciclo ottimo è ottenuto dopo il seguente scambio:

$\varphi^{**}=\varphi^{*} I(5,6)\ I(3,4)\ I(0,1)$.

Si ha quindi che il ciclo ottimo e'

0 6 4 2 3 5 1 0

Problema 3.16

Un’azienda che lavora su commessa deve produrre il prototipo di un nuovo acceleratore di particelle. Tale prodotto si compone di cinque componenti *A, B, C, D, E,* prodotti da altrettante ditte subcommittenti. Si tratta di componenti estremamente ingombranti e delicati, che richiedono, per il trasporto, particolare cura. Sicché, un TIR della nostra azienda verrà utilizzato per ritirare ciascuno dei cinque componenti dalle rispettive ditte che li hanno prodotti. A causa della delicatezza e dell’ingombro di cui sopra, viene dedicato un viaggio diverso al ritiro di ogni componente. Una volta portato ciascun componente in azienda, questo deve essere collaudato da un macchinario apposito. Quando tutti i componenti sono stati collaudati, è possibile finalmente effettuare la fase finale di assiematura. Si consideri che per andare a prendere *A, B, C, D, E* sono necessari 2, 3, 4, 5 e 7 giorni rispettivamente, che il loro collaudo richiede 6, 6, 5, 3 e 5 giorni rispettivamente, e che infine la fase finale di assiematura e la consegna richiedono, complessivamente, un altro giorno. L’azienda dispone di un solo TIR.

1) In quanti giorni l'azienda può riuscire a consegnare il prodotto finito?

2) Il fatto di avere 2 TIR anziché uno sarebbe vantaggioso?

SOLUZIONE

Si tratta di applicare l'algoritmo di Johnson, in quando il ritiro e il collaudo di ciascun componente sono assimilabili a due operazioni da effettuarsi in sequenza su ogni componente, e dunque a un flow shop costituito da due macchine. L'obiettivo è quello di minimizzare il tempo di completamento.

Com'è noto, la sequenza di Johnson si costruisce dagli estremi verso il centro. Il tempo più basso in assoluto è quello del ritiro di A (2 giorni), che dunque verrà posto all'inizio della sequenza:

A _ _ _ _

Quindi, abbiamo il ritiro di B e il collaudo di D che durano ambedue 3 giorni. Possiamo quindi porre B subito dopo A e D in fondo alla sequenza:

A B _ _ D

Il tempo più basso è ora il ritiro di C (4 giorni), che viene dunque posto in coda a B. Si ottiene perciò:

A B C E D

Il tempo di completamento, come si arguisce tracciando il diagramma di Gantt, è pari a 27.

Per rispondere al secondo punto, osserviamo che tale valore è pari alla somma dei tempi di collaudo più il più piccolo dei tempi di ritiro. La disponibilità di un secondo TIR non servirebbe evidentemente a nulla, in termini di tempo di completamento del prodotto.

Innanzitutto, occorre calcolare qual è la specifica sul tempo di ciclo. Dovendo produrre 32 unità in 24 ore, evidentemente ciò vuol dire una unità ogni tre quarti d'ora, e quindi C = 45 minuti.

1. Per applicare l'euristica RPW occorre calcolare il peso posizionale di ogni operazione. Ciò porta ad avere:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
178	75	103	103	49	60	34	64	44	24

e dunque, riordinando le operazioni in base al loro peso posizionale, si ottiene:

a c d b h f e i g j

applicando allora l'euristica con C = 45, si ottiene la seguente soluzione:

a c || d b || h f e || i g || j che richiede dunque 5 stazioni.

Problema 3.17

La vostra officina deve produrre 8 lotti di pezzi. Alcuni lotti richiedono una macchina di stampaggio (1), altri di piegatura (2), altri entrambe (prima la 1 e poi la 2). Precisamente, i lotti **A** e **B** richiedono la macchina 1 per un tempo pari a 1 e 4 giorni rispettivamente. Il lotto **C** richiede la macchina 2 per 3 giorni. Gli altri lotti richiedono di essere lavorati su entrambe le macchine, secondo i tempi riportati in tabella:

i	D	E	F	G	H
p1	2	8	5	5	7
p2	6	3	4	9	6

Qual è il tempo minimo di completamento di tutti i lotti?

SOLUZIONE

Si tratta di applicare l'algoritmo di Johnson (Problema 3.10), osservando che i primi job a essere sequenziati saranno A, B (in fondo) e C (in testa) in quanto hanno tempo di lavorazione 0 su una delle due macchine. La soluzione ottima sarà:

C D G H F E A B

cui corrisponde un tempo minimo di completamento pari a 32.

Problema 3.18

Un sistema di produzione è costituito da 4 macchine che devono eseguire 3 job.

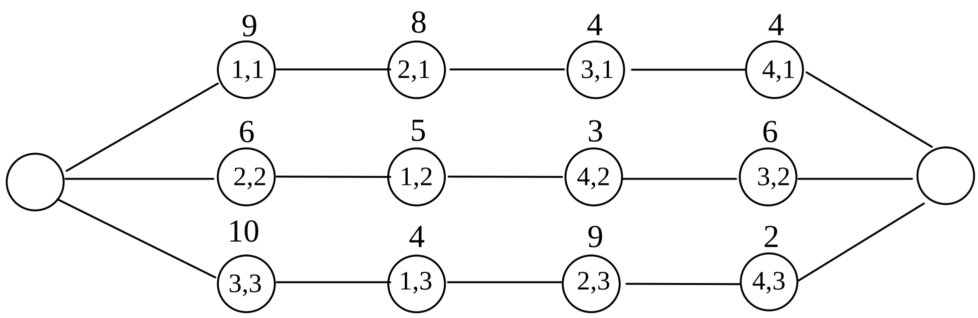
Gli instradamenti ed i tempi di processamento sono dati nella seguente tabella:

job	instradamento	tempi di proc.
1	1, 2, 3,4	p_{11}=9 p_{21}=8 p_{31}=4 p_{41}=4
2	2, 1, 4, 3	p_{22}=8 p_{12}=5 p_{42}=3 p_{32}=6
3	3, 1, 2, 4	P_{33}=10 p_{13}=4 p_{23}=9 p_{43} =2

Si vuole minimizzare C_{max}.

Soluzione

Il problema si può risolvere con l'algoritmo euristico Shifting Bottleneck.



Iterazione 1

Inizialmente, l'insieme M_0 è vuoto ed il grafo G contiene solamente archi congiuntivi. Il percorso critico ed il makespan $C_{max}(0)$ è 25 ed è raggiunto dai job 1 e 3. Per individuare quale macchina schedulare per prima, si associa ad ognuna di esse un problema $1/r_j/L_{max}$

con release date e due date determinate dal cammino più lungo in G (assumendo un makespan di 25).

Per la macchina 1 il problema $1/r_j/L_{max}$ ha i seguenti dati:

job	1	2	3
p_j	9	5	4
r_j	0	6	10
d_j	9	16	14

e la sequenza ottima è 1, 3, 2 con un $L_{max}(1)=3$.

Per la macchina 2 il problema $1/r_j/L_{max}$ ha i seguenti dati:

job	1	2	3
p_j	8	6	9
r_j	9	0	14
d_j	17	11	23

e la sequenza ottima è 2, 1, 3 con un $L_{max}(2)=3$.

Per la macchina 3 si ha:

job	1	2	3
p_j	4	6	10
r_j	17	14	0
d_j	21	25	10

e la sequenza ottima è 3,1,2 con un $L_{max}(3)=2$.

Per la macchina 4 si ha:

job	1	2	3
p_j	4	3	2
r_j	21	11	23
d_j	25	19	25

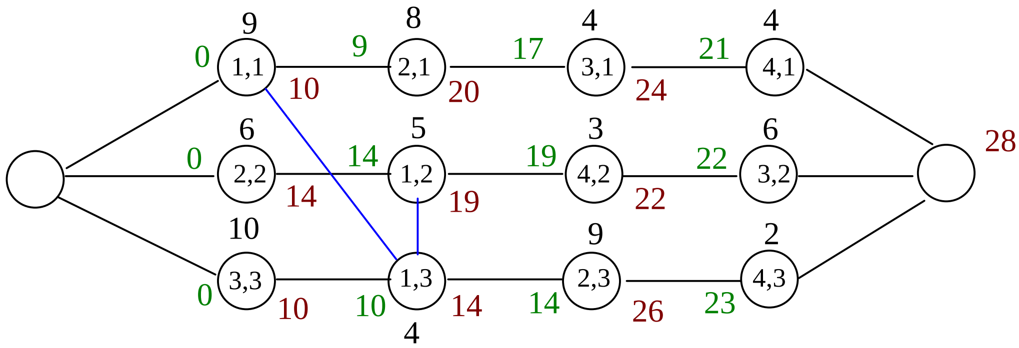
e la sequenza ottima è 2, 1, 3 con un $L_{max}(4)=2$.

Ne consegue che le macchine 1,2 possono essere considerati dei colli di bottiglia del sistema.

Scegliamo, ad esempio, la macchina 1 ed includiamola ad M_0.

Il grafo G" è ottenuto aggiungendo gli archi disgiuntivi corrispondenti alla sequenza sulla macchina 1.

Si ha che $C_{max}(\{1\})=C_{max}(0)+L_{max}(1)=25+3=28$ (vedi figura).



Iterazione 2

Poiché il makespan corrispondente a G" è 28, si può determinare il percorso critico. Le tre macchine rimanenti si possono analizzare in modo separato come problemi del tipo $1/r_j/L_{max}$ con release date e due date determinate dal cammino più lungo in G" (assumendo un makespan di 28).

Per la macchina 2 il problema $1/r_j/L_{max}$ ha i seguenti dati:

job	1	2	3
p_j	8	6	9
r_j	9	0	14
d_j	20	14	26

La sequenza ottima è 2, 1, 3 ed $L_{max}(2)=0$.

Il problema relativo alla macchina 3 ha i seguenti dati:

job	1	2	3
p_j	4	6	10
r_j	17	22	0
d_j	24	28	10

La sequenza ottima è 3, 2, 1 ed $L_{max}(3)=0$.

Il problema relativo alla macchina 4 ha i seguenti dati:

job	1	2	3
p_j	4	3	2
r_j	21	19	23
d_j	28	22	28

La sequenza ottima è 2, 1, 3 ed $L_{max}(4)=0$.

I problemi relativi alle macchine 2, 3 e 4 sono semplici poichè hanno $L_{max}= 0$.

Il sequenziamento finale risulta quindi il seguente:

macchina	Sequenza di job
1	1,3,2
2	2,1,3

3	3,2,1
4	2,1,3

Il makespan è 28.