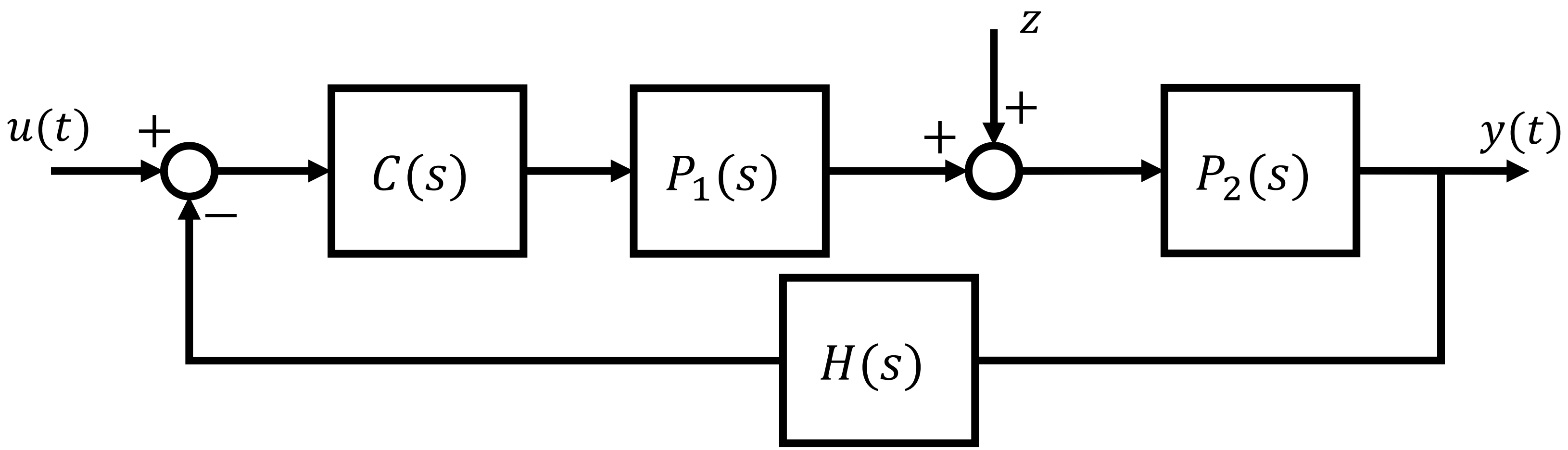
Fondamenti di Automatica

«Analisi e stabilizzazione dei sistemi di controllo a controreazione»

Dario Masucci

Dato il sistema di controllo in figura



Determinare:

1. Per quali valori di **Kc** il sistema risulta stabile a ciclo chiuso
2. Il tipo di sistema di controllo
3. Astatismo rispetto al disturbo costante **z**
4. L'uscita permanente $\mathbf{y_p(t)}$ con $\boldsymbol{u(t) = 7\delta_{-3}}$ e $\boldsymbol{z(t) = 0}$
5. L'uscita permanente $\mathbf{y_z(t)}$ con $\boldsymbol{u(t) = 0}$ e $\boldsymbol{z(t) = 2\delta_{-1}(t)}$

Domanda 1 – Determinare per quali valori di **Kc** il sistema risulta stabile a ciclo chiuso

a Si calcola la Funzione di Trasferimento a ciclo chiuso del sistema:

$$W(s) = \frac{C(s)P_1(s)P_2(s)}{1 + C(s)P_1(s)P_2(s)H(s)}$$

b Si considera l'equazione caratteristica $Q(s)$ del sistema, ossia il polinomio a denominatore della Funzione di Trasferimento a ciclo chiuso. E si applica ad essa il criterio di Routh.

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_1$$

Tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cccc} n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & \dots & \\ n-3 & b_{n-3} & b_{n-5} & \dots & \end{array}$$

coefficienti derivati →

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-4} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-3} = \frac{b_{n-2}a_{n-3} - a_{n-1}b_{n-4}}{b_{n-2}}$$

Definizione: (condizione necessaria e sufficiente per la stabilità)

La *condizione necessaria e sufficiente* affinché il sistema sia stabile è che tutte le radici dell'equazione caratteristica abbiano parte reale negativa. Perciò:

- I coefficienti dell'equazione caratteristica devono essere *tutti strettamente positivi*
- Gli elementi della prima colonna della tabella di Routh, devono essere tutti positivi (*criterio di Routh*)

Tabella di Routh

$$
\begin{array}{c|cccc}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\
n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & \dots & \\
n-3 & b_{n-3} & b_{n-5} & \dots &
\end{array}
\xrightarrow{\text{coefficienti prima colonna}}
a_n, a_{n-1}, b_{n-2}, b_{n-3}, \dots > 0
$$

Osservando la tabella di Routh si ha che:

- Ad ogni variazione di segno dei coefficienti della prima colonna corrisponde un polo a parte reale positiva
- Ad ogni permanenza di segno dei coefficienti della prima colonna corrisponde un polo a parte reale negativa

Tabella di Routh

$$
\begin{array}{c|cccc}
n & \boxed{a_n} & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\
n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & \dots & \\
n-3 & b_{n-3} & b_{n-5} & \dots &
\end{array}
$$

c Si impone che tutti i coefficienti della prima colonna abbiano lo stesso segno, forzando quelli che presentano K_c.

In questo modo si ricava l'intervallo di valori che assicura la stabilità del sistema a ciclo chiuso.

Domanda 2 – Determinare il **tipo di sistema** di controllo

Per definire il tipo di sistema di controllo si considerano i poli nell'origine presenti nelle trasferenze sulla catena diretta. Il numero di poli nell'origine corrisponde al tipo di sistema.

Domanda 3 – Determinare se il sistema è **astatico** rispetto al disturbo costante **z**

Si deve valutare se il sistema presenta almeno un polo nell'origine a monte del punto in cui interviene il disturbo costante.
Se ciò viene riscontrato, allora il disturbo costante viene completamente reiettato. Il sistema risulta quindi **astatico** rispetto al disturbo costante.

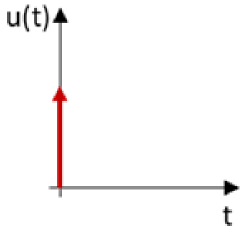
Definizione: (Tipo del sistema)

La notazione utilizzata è:

- il sistema è di *tipo 0* quando in $G(s)$ non sono presenti poli nell'origine;
- il sistema è di *tipo 1* quando in $G(s)$ è presente un polo nell'origine;
- il sistema è di *tipo 2* quando in $G(s)$ sono presenti due poli nell'origine;
- il sistema è di *tipo n* quando in $G(s)$ sono presenti n poli nell'origine.

Definizione: (Tipo di segnale canonico)

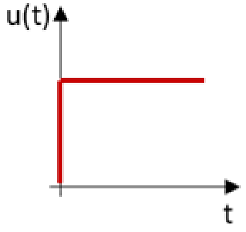
Impulso (uso teorico)



$$u(t) = \delta_0(t)$$

$$U(s) = 1$$

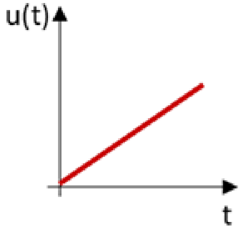
Gradino



$$u(t) = \delta_{-1}(t)$$

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

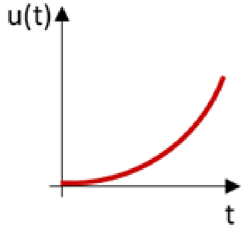
Rampa



$$u(t) = \delta_{-2}(t)$$

$$U(s) = \frac{1}{s^2}$$

Rampa parabolica



$$u(t) = \delta_{-3}(t)$$

$$U(s) = \frac{1}{s^3}$$

Domanda 4 – Determinare l'uscita permanente $\boldsymbol{y_p(t)}$ con $u(t) \neq 0$ e $z(t) = 0$

Si considerano:

- L'indice relativo all'ingresso canonico i
- L'indice relativo al tipo del sistema h (poli nell'origine in catena diretta)

Si possono avere tre diverse situazioni:

- Se il tipo di sistema è maggiore dell'indice relativo all'ingresso ($h > i$), allora l'errore a regime è nullo $e_r = 0$

  L'uscita permanente si calcola come $\boldsymbol{y_p(t) = u(t)K_d}$

- Se il tipo di sistema è minore dell'indice relativo all'ingresso ($h < i$), allora l'errore a regime è infinito $e_r = \infty$

- Se il tipo di sistema è uguale all'indice relativo all'ingresso ($h = i$), allora l'errore a regime assume un valore costante, in particolare

$$\text{se } h = i = 0 \;\rightarrow\; e_r = \frac{K_d^2}{K_d + K_G} \qquad\qquad \text{se } h = i > 0 \;\rightarrow\; e_r = \frac{K_d^2}{K_G}$$

l'uscita permanente si calcola come $\boldsymbol{y_p(t) = u(t)K_d - e_r|u(t)|}$

$$\text{in cui } K_d = \frac{1}{H(s)} = 4 \text{ e } K_G = \lim_{s\to 0} s^h C(s)P_1(s)P_2(s)$$

Tabella nella quale è riportato il valore dell'errore a regime in funzione sia dell'ingresso canonico applicato che del tipo di sistema

	0	1	2
$\delta_{-1}(t)$	$\frac{{k_d}^2}{k_d + K_G}$	0	0
$t\delta_{-1}(t)$	∞	$\frac{{k_d}^2}{K_G}$	0
$\frac{t^2}{2}\delta_{-1}(t)$	∞	∞	$\frac{{k_d}^2}{K_G}$

Domanda 5 – Determinare l'uscita permanente $\boldsymbol{y_z(t)}$ con $u(t) = 0$ e $z(t) \neq 0$

Per valutare l'effetto del disturbo $z(t)$ sul sistema, e quindi per calcolare l'uscita permanente del disturbo $y_z(t)$ si considerano:

- L'indice relativo al tipo di disturbo i
- L'indice relativo al numero di integratori a monte del disturbo h'

Si possono avere tre diverse situazioni:

- Se $h' > i$, allora l'uscita permanente del disturbo è $\boldsymbol{y_z(t) = 0}$
- Se $h' < i$, allora l'uscita permanente del disturbo è $\boldsymbol{y_z(t) = \infty}$

Si può verificare calcolando

$$\boldsymbol{y_z(t) = \lim_{s \to 0} sW_z(s)Z(s)}$$

$$\begin{cases} W_z(s) \text{ funzione di trasferimento a ciclo chiuso del disturbo} \\ Z(s) \text{ è la trasformata di Laplace del disturbo} \end{cases}$$

Domanda 5 – Determinare l'uscita permanente $\boldsymbol{y_z(t)}$ con $u(t) = 0$ e $z(t) \neq 0$

Per valutare l'effetto del disturbo $z(t)$ sul sistema, e quindi per calcolare l'uscita permanente del disturbo $y_z(t)$ si considerano:

- L'indice relativo al tipo di disturbo i
- L'indice relativo al numero di integratori a monte del disturbo h'

Si possono avere tre diverse situazioni:

- Se $h' = i$, allora l'uscita permanente del disturbo assume un valore costante calcolabile come

$$\boldsymbol{y_z(t) = \lim_{s \to 0} sW_z(s)Z(s)}$$

$$\begin{cases} W_z(s) \text{ funzione di trasferimento a ciclo chiuso del disturbo} \\ Z(s) \text{ è la trasformata di Laplace del disturbo} \end{cases}$$