Fondamenti di Automatica

Esercitazione
«Tracciamento completo della funzione Risposta Armonica»
Esame del 14 giugno 2016

Dario Masucci

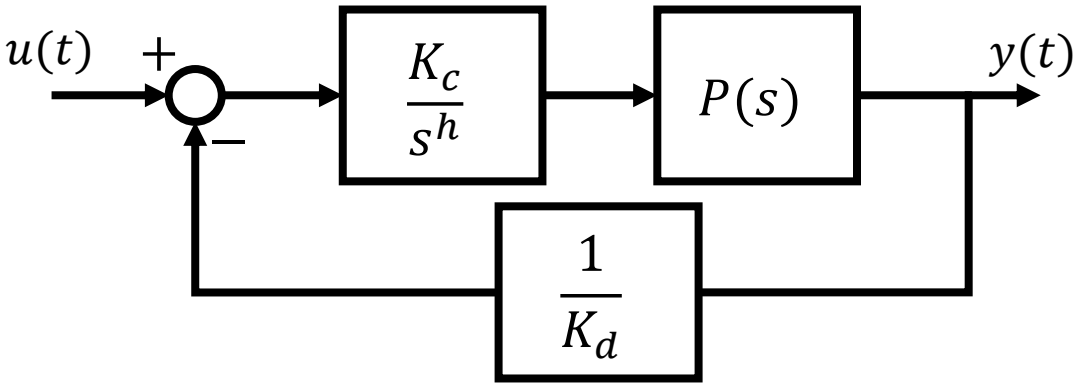
10/05/2019

Traccia d'esame (compito B)

Sia dato un processo $P(s)$ descrivibile mediante la funzione di trasferimento che segue

$$P(s) = \frac{10\left(\frac{s^2}{5^2} + \frac{0{,}4s}{5} + 1\right)}{\left(\frac{s}{10} + 1\right)^2 \left(\frac{s}{50} + 1\right)}$$

Sintetizzare il sistema di controllo in figura determinando h e K_c, e considerando $K_d = 0{,}5$ in modo tale che l'errore per l'ingresso a rampa $u(t) = 32(t)$ sia minore o uguale a 0,1



Scelto il valore minimo di K_c compatibile con le specifiche, tracciare i diagrammi di Bode della funzione a ciclo aperto $F(s)$ e determinare su questi il margine di fase e il margine di guadagno

Svolgimento (1)

1 Si riscrive la trasferenza del processo $P(s)$

$$P(s) = \frac{10\left(\frac{s^2}{5^2} + \frac{0{,}4s}{5} + 1\right)}{\left(\frac{s}{10} + 1\right)^2 \left(\frac{s}{50} + 1\right)}$$

2 E' richiesto da specifica che l'errore a regime per un ingresso a rampa sia minore o uguale ad un valore costante, in particolare $e|u(t)| \leq 0{,}1$.

Allora il sistema composto da $C(s)$ e $P(s)$ deve essere di **tipo 1** e quindi avere esattamente un polo nell'origine.

Poiché in $P(s)$ non è presente alcun polo, allora deve necessariamente essere presente nel controllore, ossia in $C(s)$.

Possiamo scrivere $\boldsymbol{h = 1}$

Svolgimento (2)

3 Il guadagno K_c del controllore $C(s)$ si ottiene dall'espressione dell'errore tenendo in considerazione che

$$e|u(t)| \leq 0{,}1 \qquad \text{in cui} \qquad |u(t)| = 32$$

Dalla tabella riguardante l'espressione dell'errore, definito in base al tipo di sistema e alla natura dell'ingresso, si ottiene

	0	1	2
$\delta_{-1}(t)$	$\frac{{k_d}^2}{k_d + K_G}$	0	0
$t\delta_{-1}(t)$	∞	$\frac{{k_d}^2}{K_G}$	0
$\frac{t^2}{2}\delta_{-1}(t)$	∞	∞	$\frac{{k_d}^2}{K_G}$

$$e = \frac{K_d^2}{K_G}$$

in cui $K_d = 0{,}5$ è un dato del problema

e K_G è il guadagno statico del sistema

K_G si ottiene come $\quad K_G = \lim_{s \to 0} s^h C(s)P(s) = K_c \cdot 10$

Quindi si può scrivere $\quad e|u(t)| = \frac{0{,}25}{K_c \cdot 10} \cdot 32 \leq 0{,}1$

da cui $\quad \boldsymbol{K_c \geq 8}$

Svolgimento (3)

4 Si calcola la funzione di trasferimento a ciclo aperto $F(s)$ del sistema come

$$\boldsymbol{F(s)} = C(s)P(s)H(s) = \frac{K_c}{s^h} \cdot P(s) \cdot \frac{1}{K_d} = \frac{8}{s} \cdot \frac{10\left(\frac{s^2}{5^2} + \frac{0{,}4s}{5} + 1\right)}{\left(\frac{s}{10} + 1\right)^2 \left(\frac{s}{50} + 1\right)} \cdot \frac{1}{0{,}5} = \frac{\mathbf{160}\left(\frac{\boldsymbol{s^2}}{\mathbf{5^2}} + \frac{\mathbf{0{,}4}\boldsymbol{s}}{\mathbf{5}} + \mathbf{1}\right)}{\boldsymbol{s}\left(\frac{\boldsymbol{s}}{\mathbf{10}} + \mathbf{1}\right)^{\mathbf{2}} \left(\frac{\boldsymbol{s}}{\mathbf{50}} + \mathbf{1}\right)}$$

5 Si individuano i fattori che compongono la funzione di trasferimento $F(s)$

$\boldsymbol{G_0}$ → termine costante 160

$\boldsymbol{G_{1D}}$ → polo nell'origine $\frac{1}{s}$

$\boldsymbol{G_{2D}}$ → polo reale $\frac{1}{\frac{s}{50} + 1}$

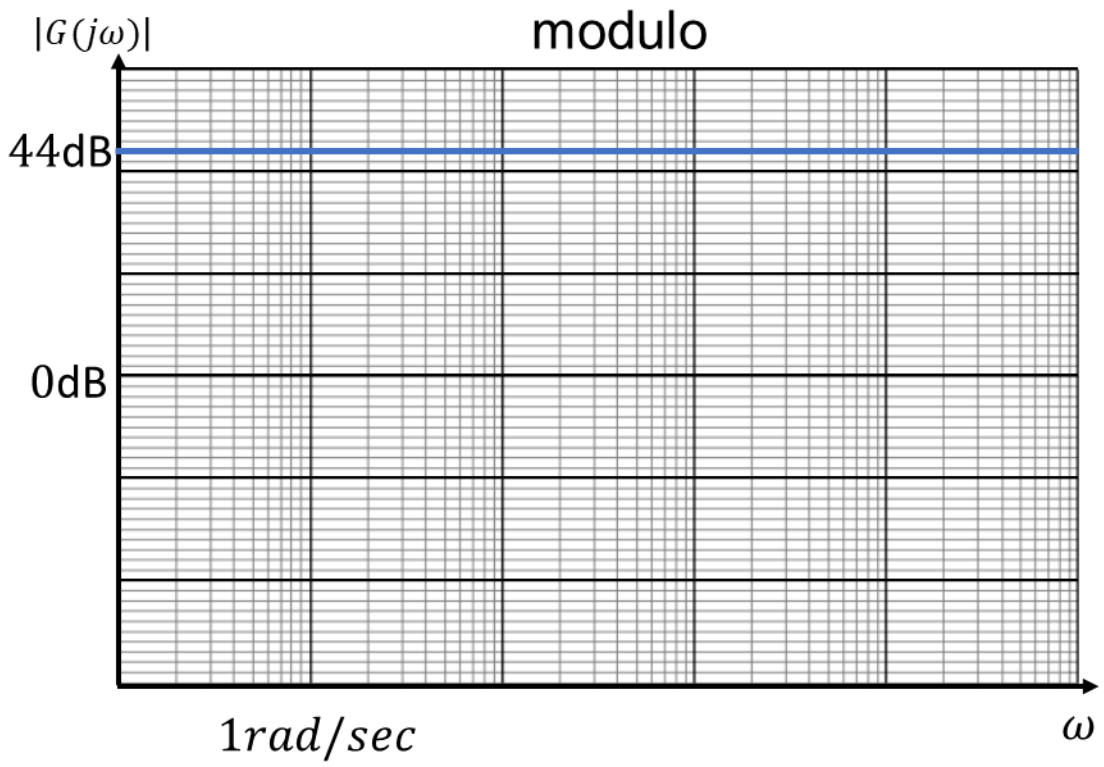
$\boldsymbol{G_{2D}}$ → doppio polo reale $\frac{1}{\frac{s}{10} + 1}$

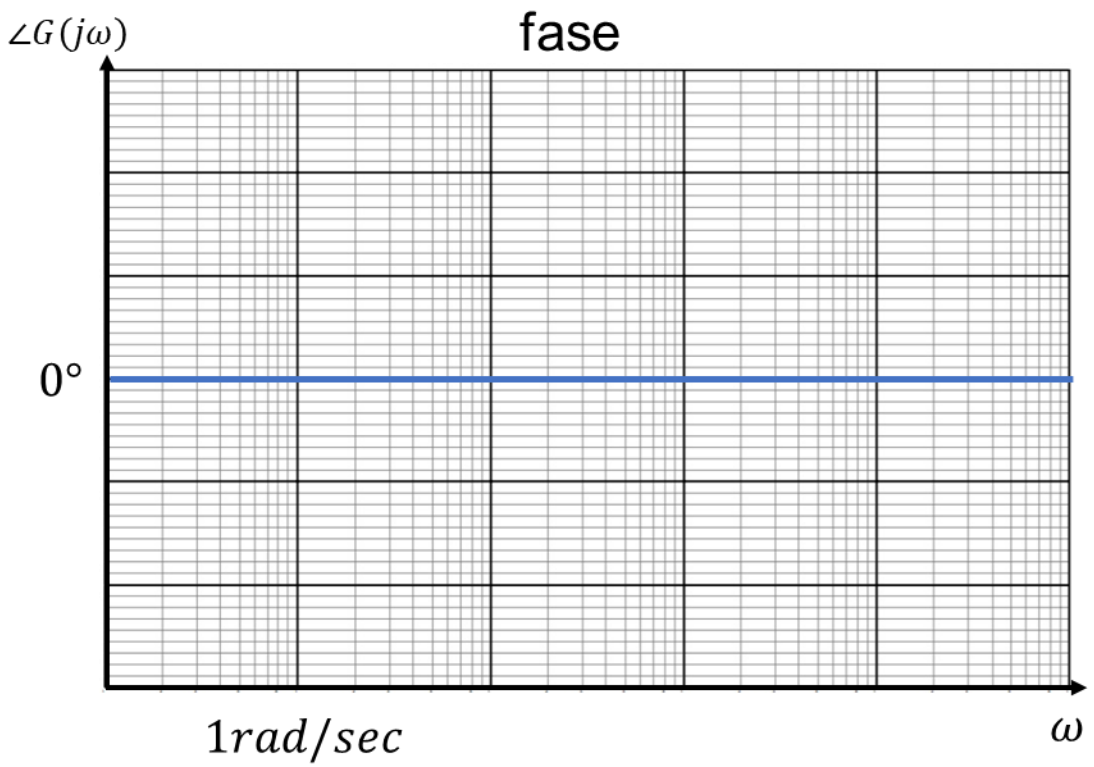
$\boldsymbol{G_{3N}}$ → zeri complessi $\frac{s^2}{5^2} + \frac{0{,}4s}{5} + 1$

Svolgimento (4)

6 Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

a $\boldsymbol{G_0}$ → termine costante 160 Modulo → $20\log_{10} 160 \approx 44\ dB$ Fase → 0°





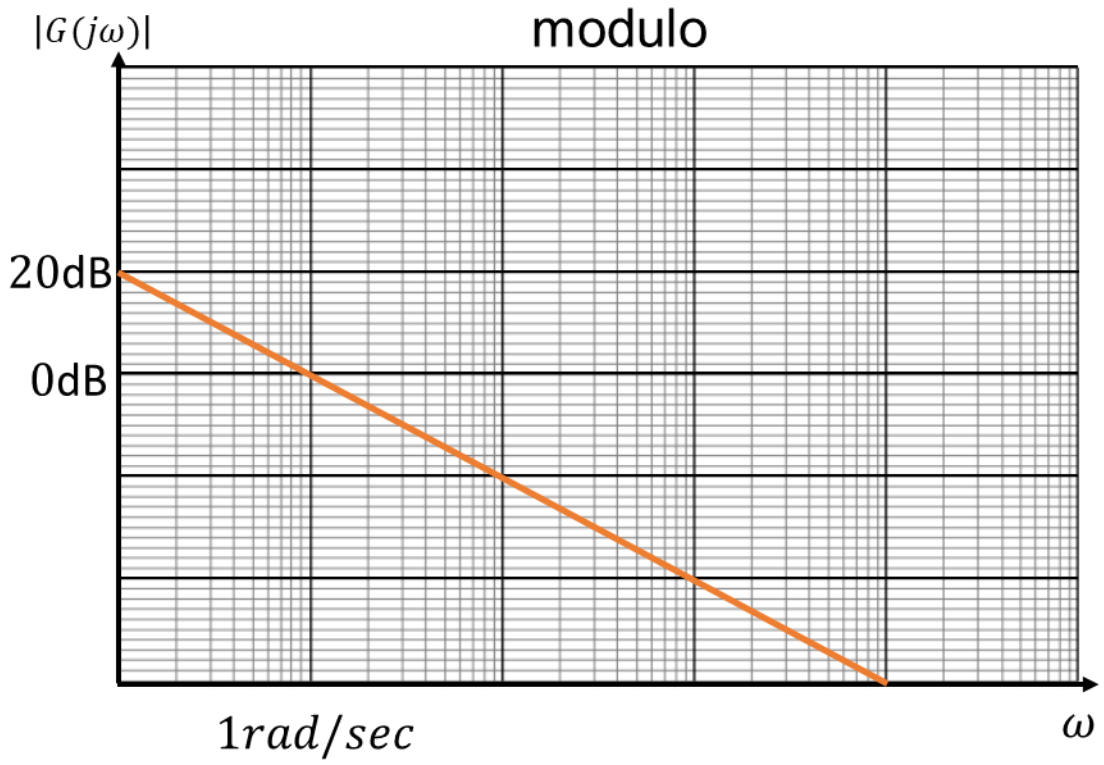
Svolgimento (5)

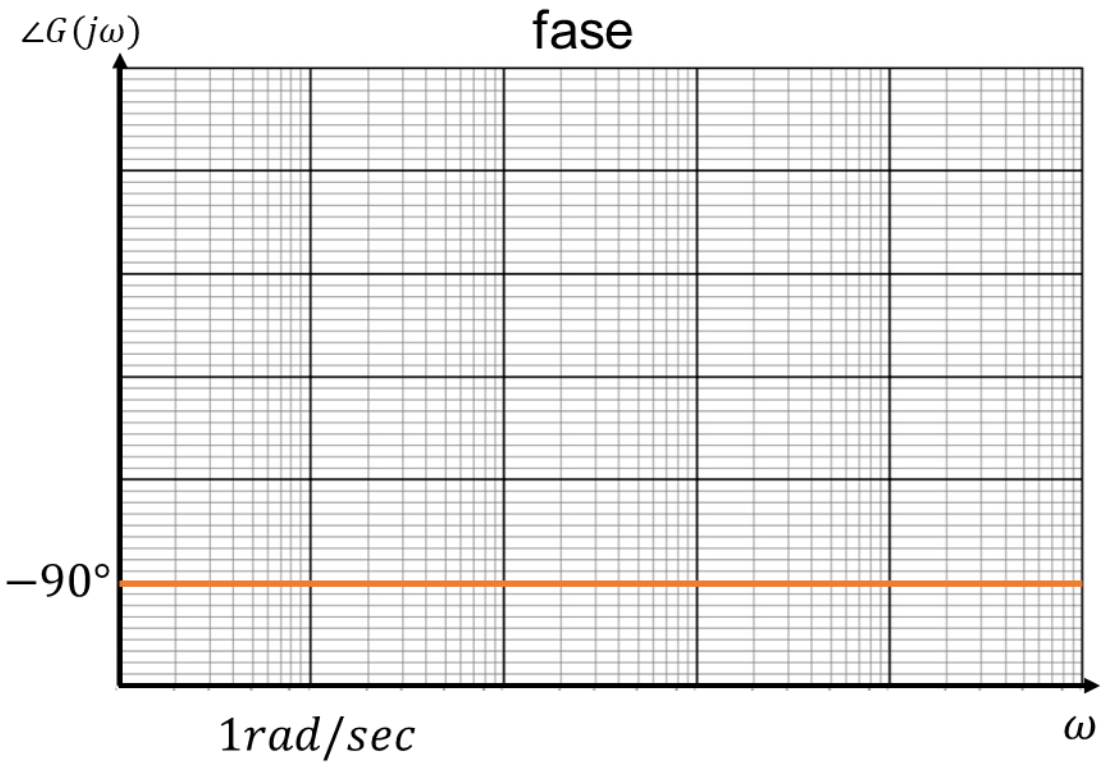
6 Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

b G_{1D} → polo nell'origine $\frac{1}{s}$

Modulo → $-20\ dB/dec$
$0\ dB\ in\ 1\ rad/\sec$

Fase → $-90°$

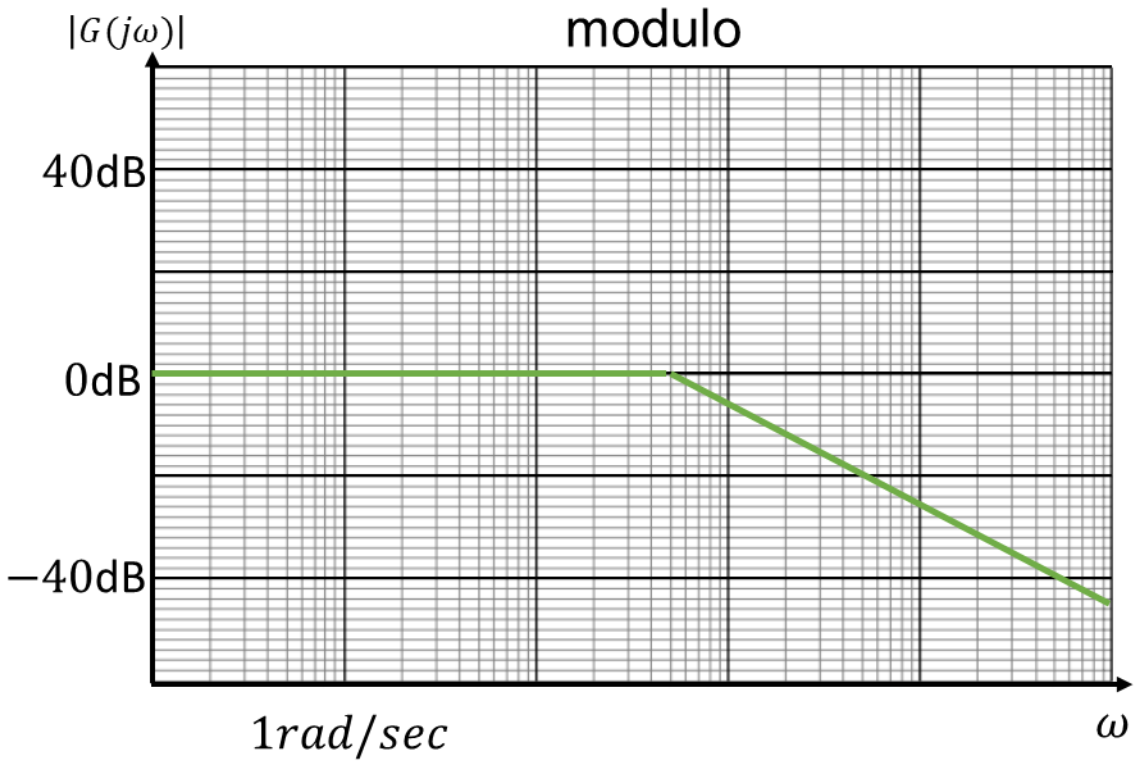




Svolgimento (6)

6 Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

c $\boldsymbol{G_{2D}} \rightarrow$ polo reale $\dfrac{1}{\frac{s}{50}+1}$ Modulo $\rightarrow \begin{cases} 0\ dB \text{ per } \omega < 50 \\ -20\ dB/dec \text{ per } \omega \geq 50 \end{cases}$ Fase $\rightarrow \begin{cases} 0° \text{ per } \omega < 5 \\ -45°/dec \text{ per } 5 \leq \omega \leq 500 \\ -90° \text{ per } \omega > 500 \end{cases}$



Svolgimento (7)

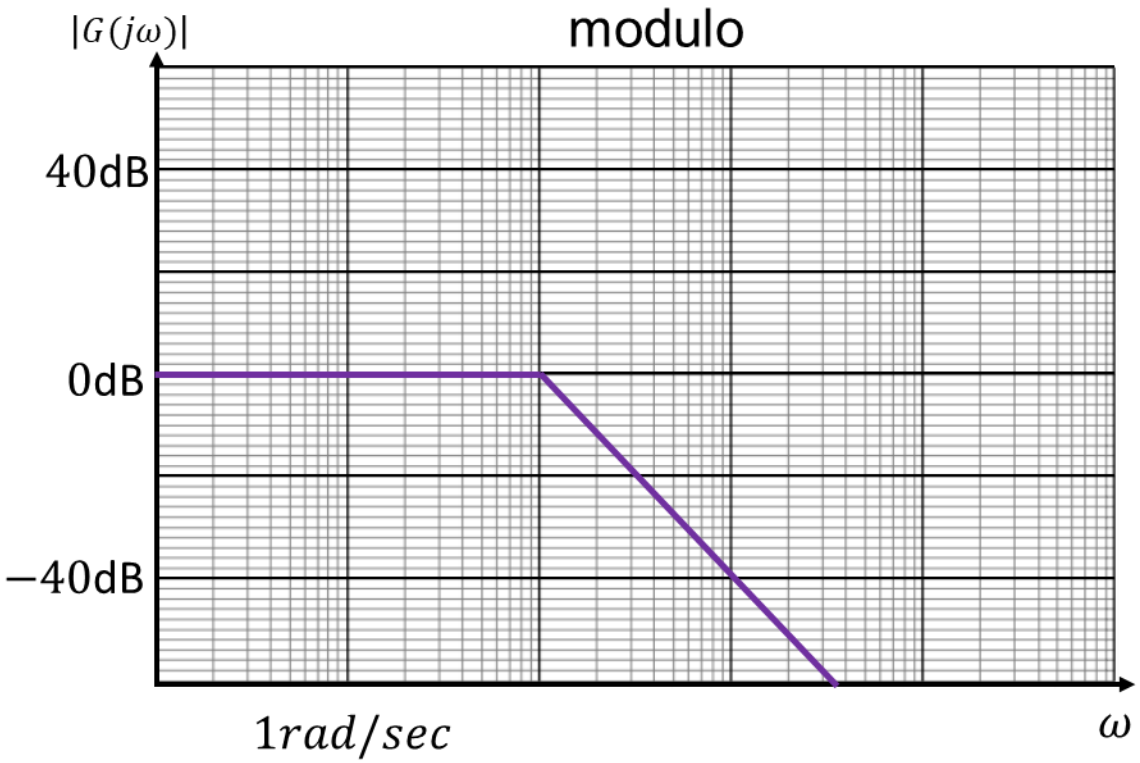
6 Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

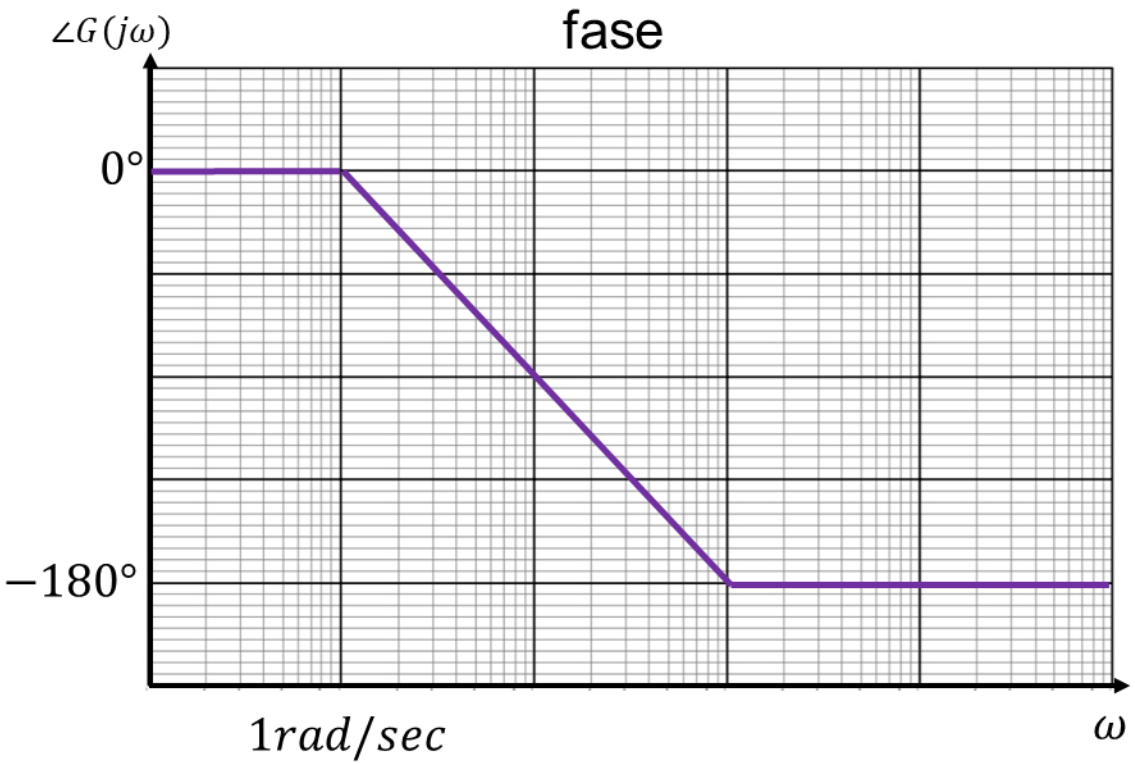
d G_{2D} → doppio polo reale

$$\frac{1}{\frac{s}{10}+1}$$

Modulo → $\begin{cases} 0\ dB \text{ per } \omega < 10 \\ -40\ \ dB/dec \text{ per } \omega \geq 10 \end{cases}$

Fase → $\begin{cases} 0° \text{ per } \omega < 1 \\ -90°/dec \text{ per } 1 \leq \omega \leq 100 \\ -180° \text{ per } \omega > 100 \end{cases}$





Svolgimento (8)

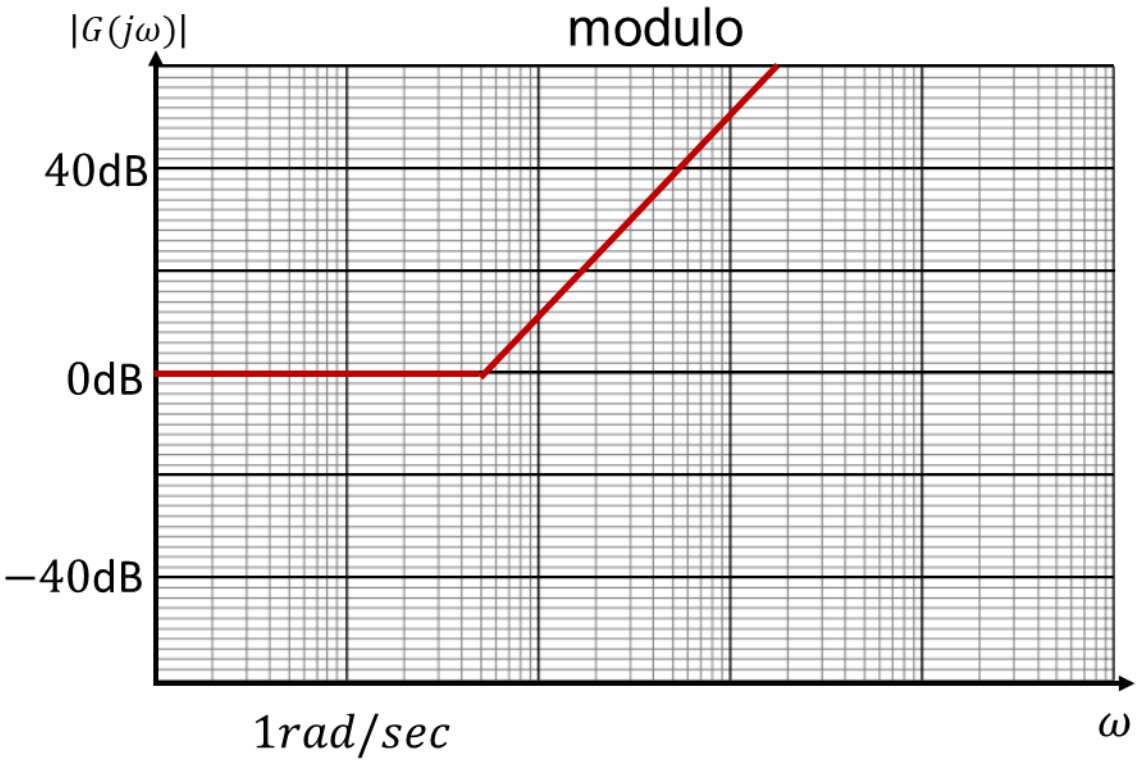
6 Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

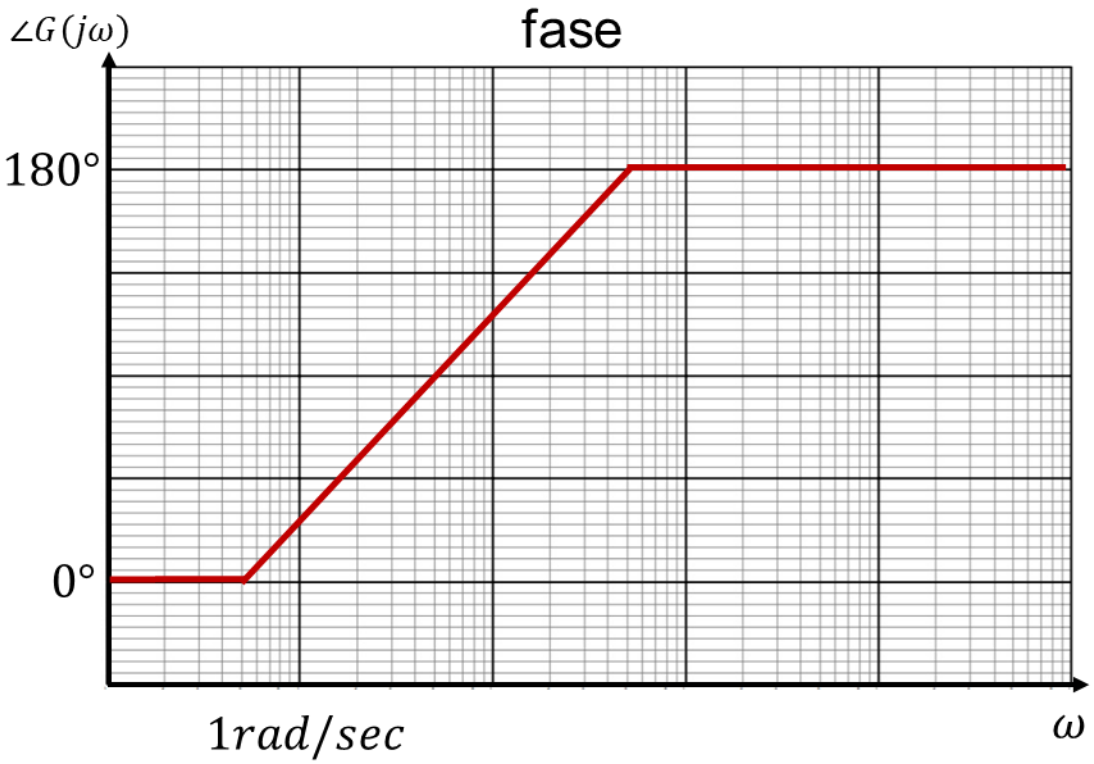
e $G_{3N} \rightarrow$ zeri complessi

$$\frac{s^2}{5^2} + \frac{0{,}4s}{5} + 1$$

Modulo $\rightarrow \begin{cases} 0\ dB \text{ per } \omega < 5 \\ +40\ dB/dec \text{ per } \omega \geq 5 \end{cases}$

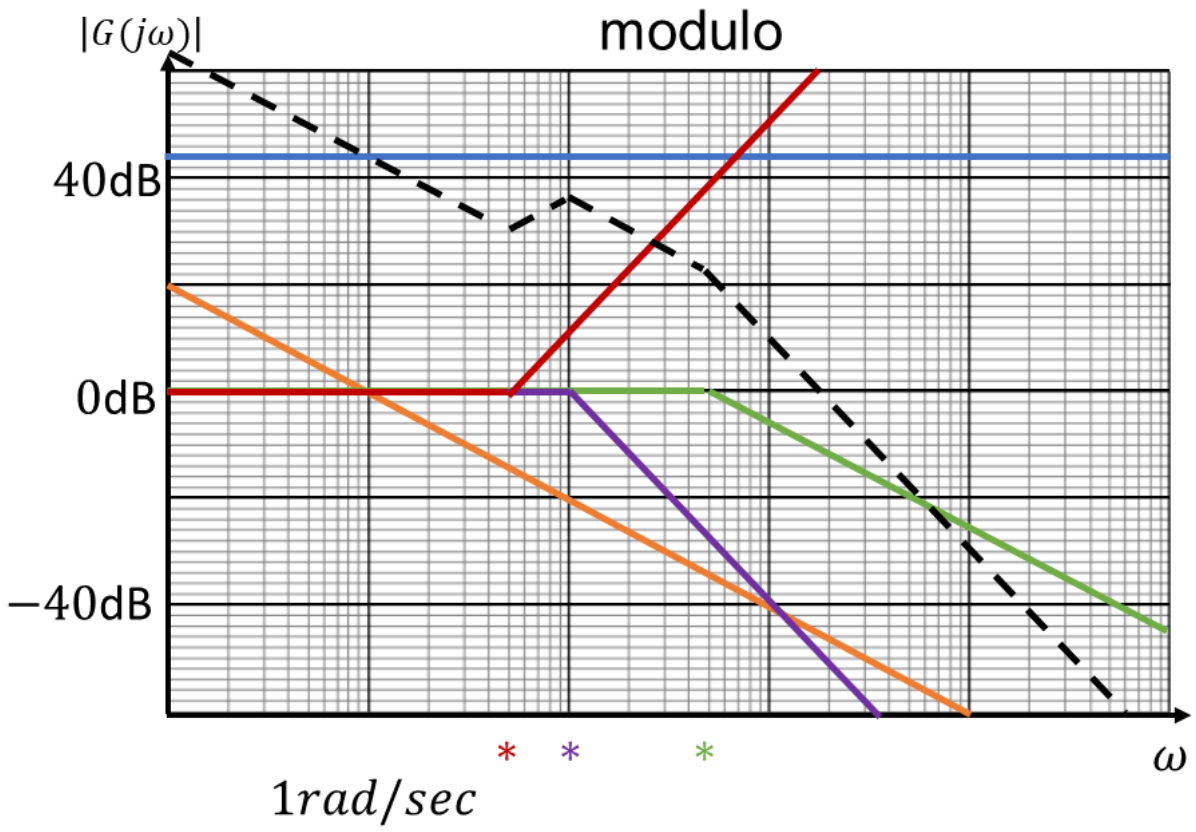
Fase $\rightarrow \begin{cases} 0° \text{ per } \omega < 0{,}5 \\ +90°/dec \text{ per } 0{,}5 \leq \omega \leq 50 \\ +180° \text{ per } \omega > 50 \end{cases}$

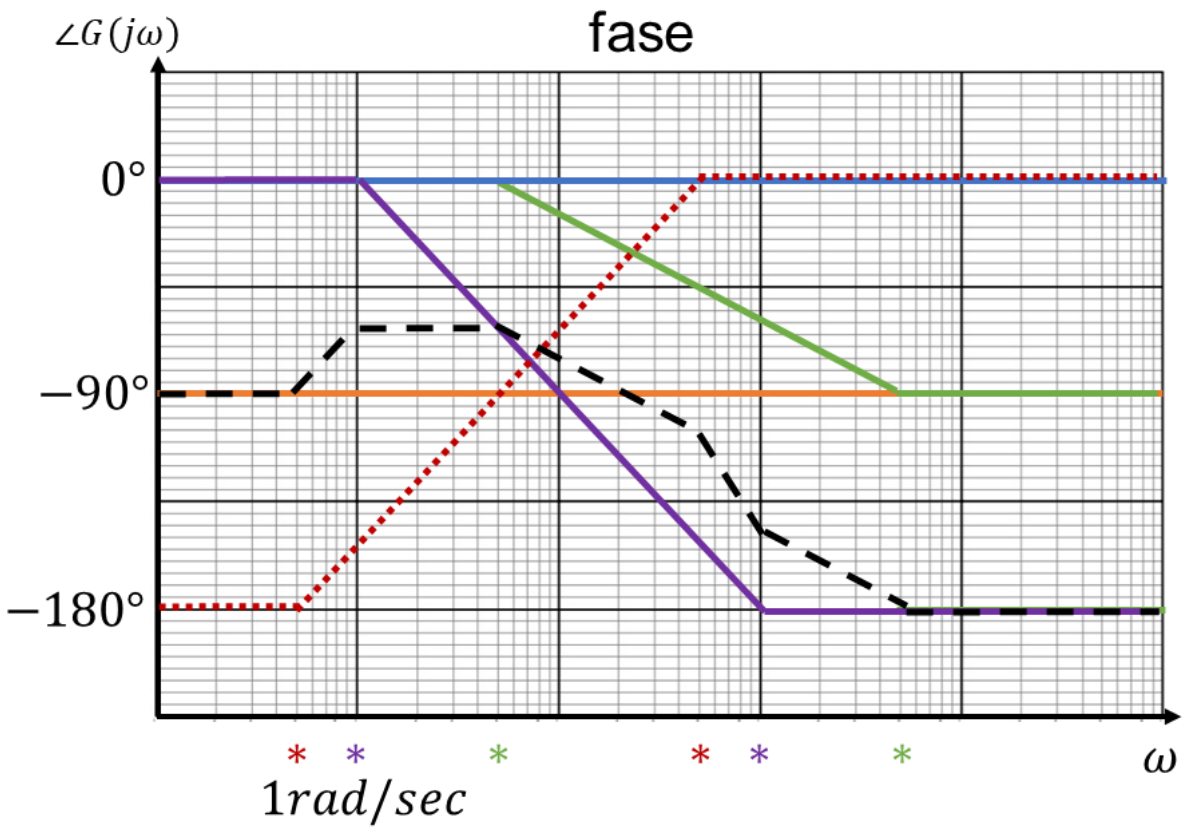




Svolgimento (9)

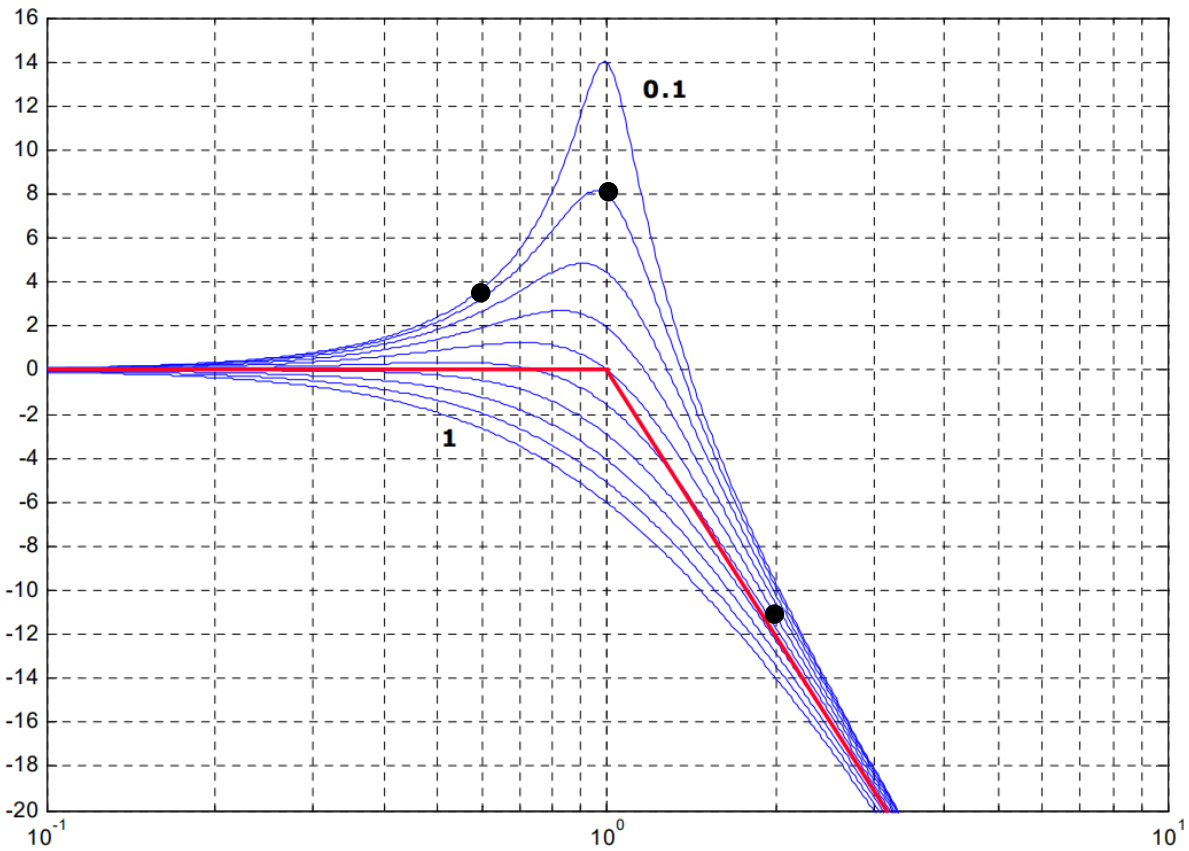
7 Si sommano i contributi di ogni termine per ottenere il tracciamento completo

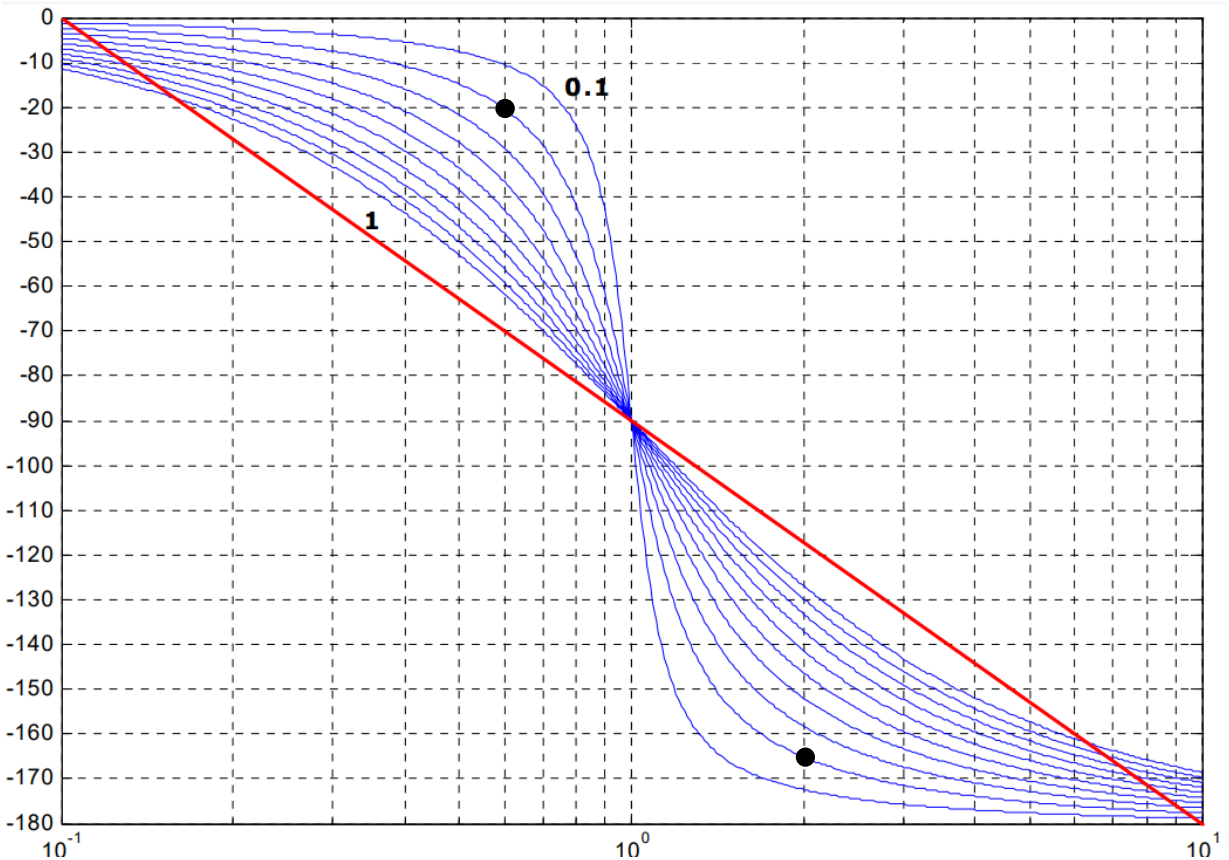




Svolgimento (10)

8 Si definisce la correzione da apportare dovuta al termine trinomio





$\boldsymbol{\zeta = 0,2}$

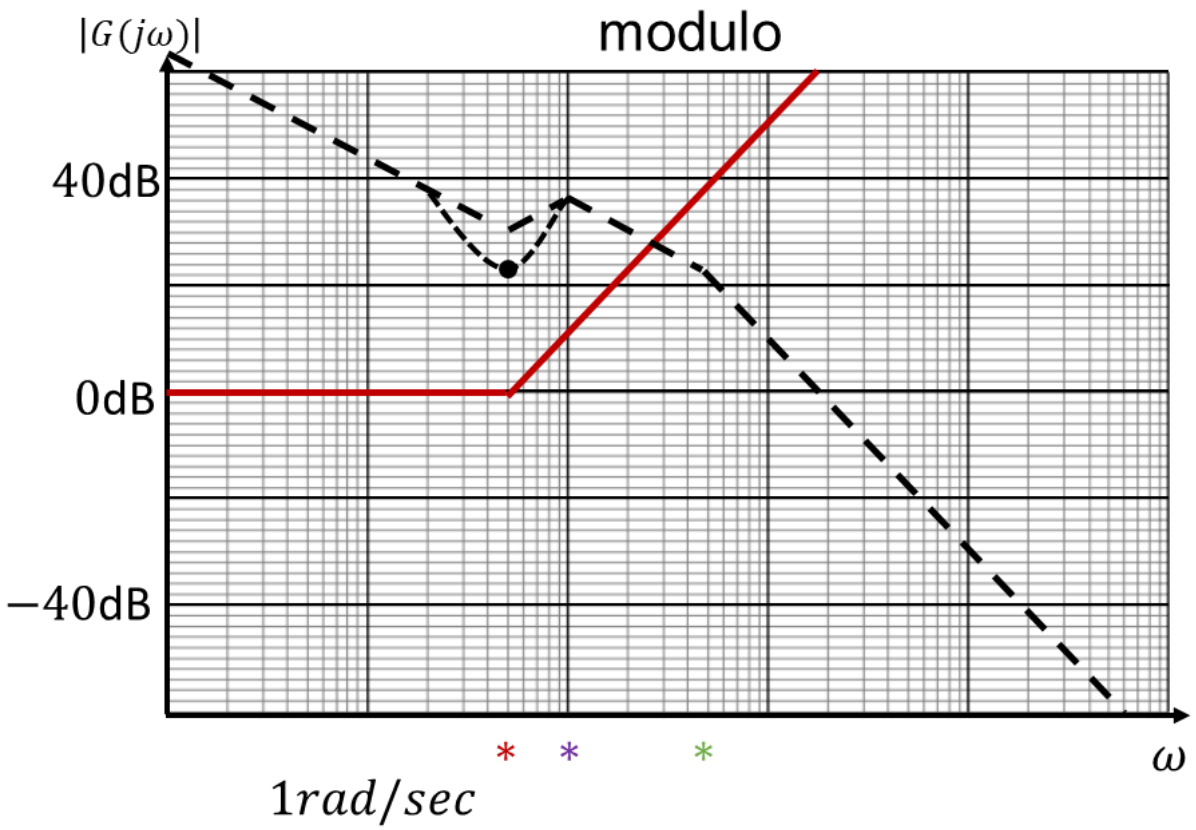
Calcolo delle posizioni su ascisse:

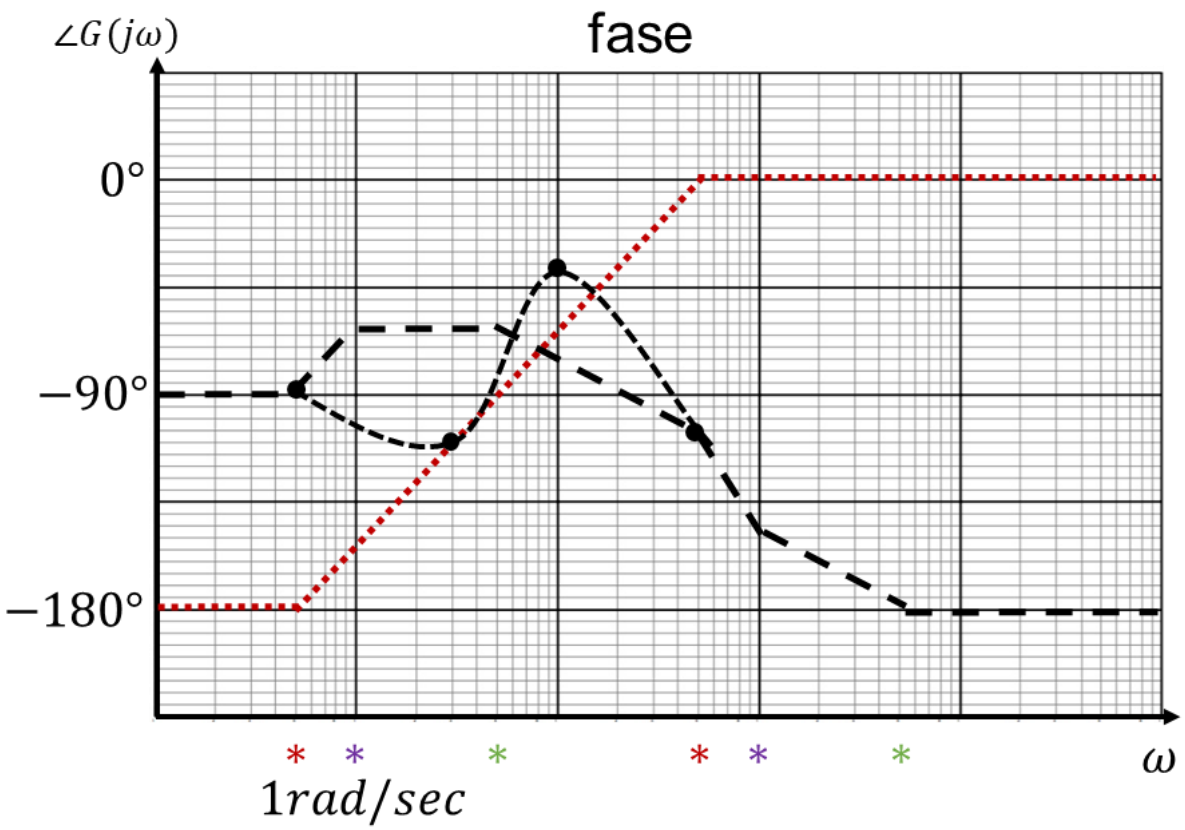
$0.6 : 1 = x_1 : 5 \Rightarrow x_1 = 0.6 * 5 = 3$

$2 : 1 = x_2 : 5 \Rightarrow x_2 = 2 * 5 = 10$

Svolgimento (11)

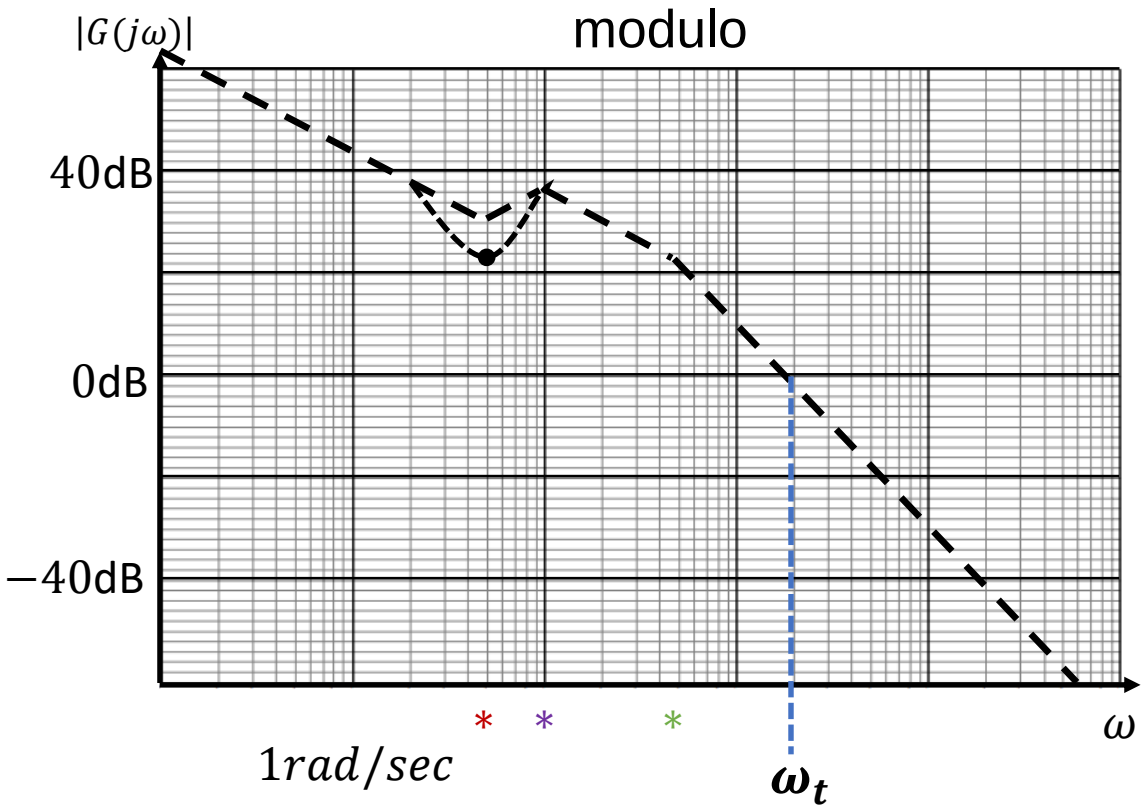
8 Si definisce la correzione da apportare dovuta al termine trinomio

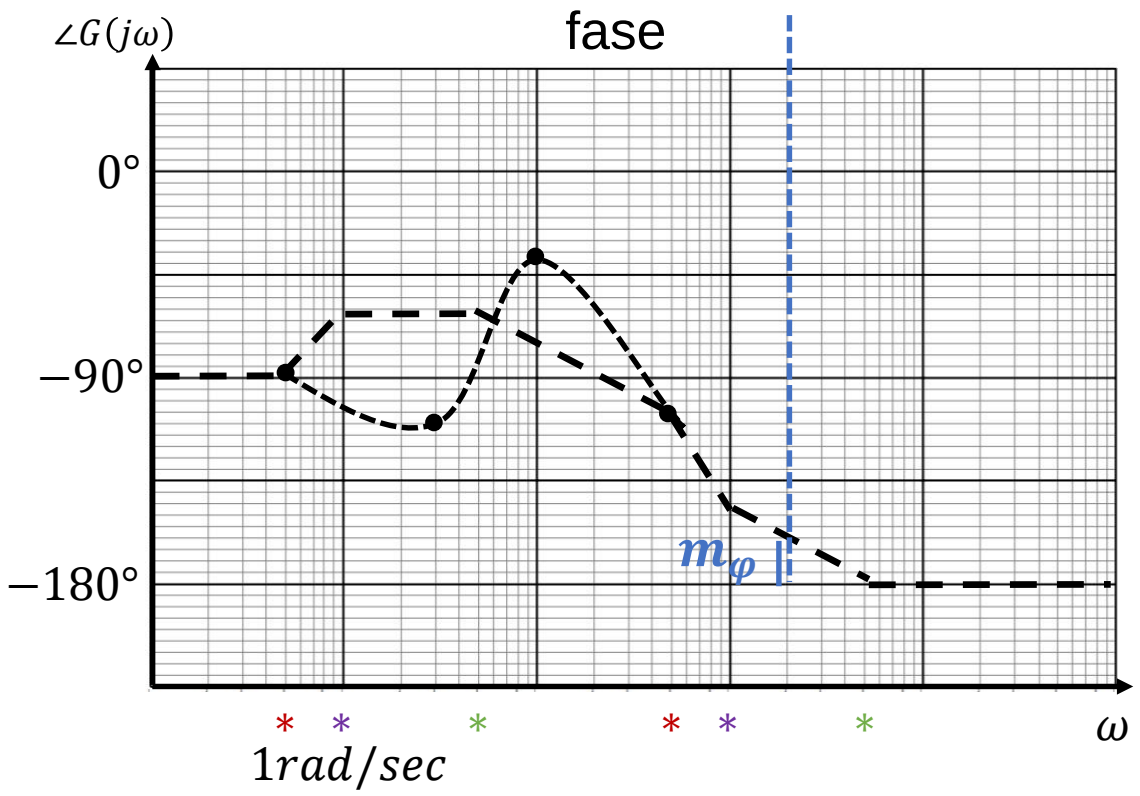




Svolgimento (12)

9 Si individuano: ω_t e il m_φ , $\omega_{-\pi}$ e il m_g





$\omega_t = 200\ rad/sec$ e $m_\varphi \approx 15°$

$\omega_{-\pi}$ non è calcolabile quindi $m_g = \infty$