Fondamenti di Automatica

Esercitazione
«Tracciamento completo della funzione Risposta Armonica»
Esame del 14 giugno 2016

Dario Masucci

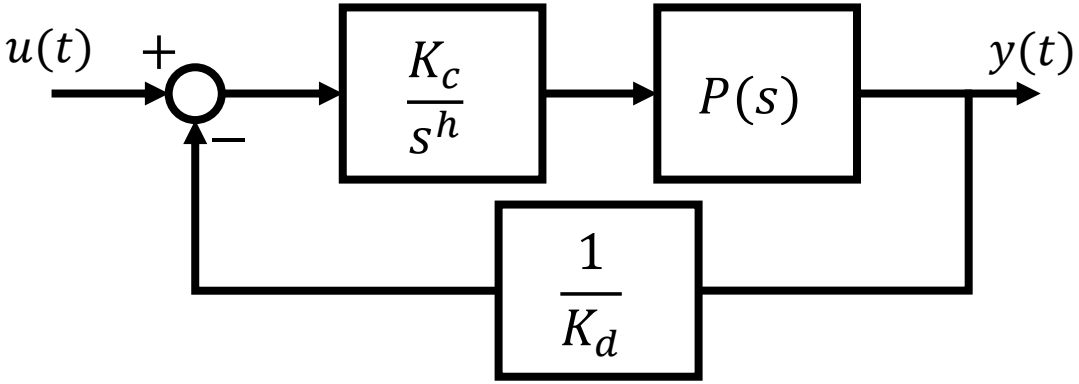
10/05/2019

Traccia d'esame (compito A)

Sia dato un processo $P(s)$ descrivibile mediante la funzione di trasferimento che segue

$$P(s) = \frac{2\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{100}+1\right)}{\left(\frac{s^2}{50^2}+\frac{0{,}6s}{50}+1\right)\left(\frac{s}{500}+1\right)}$$

Sintetizzare il sistema di controllo in figura determinando h e K_c, e considerando $K_d = 2$ in modo tale che l'errore per l'ingresso a rampa $u(t) = 3\delta_{-2}(t)$ sia minore o uguale a 0,2



Scelto il valore minimo di K_c compatibile con le specifiche, tracciare i diagrammi di Bode della funzione a ciclo aperto $F(s)$ e determinare su questi il margine di fase e il margine di guadagno

Svolgimento (1)

1 Si riscrive la trasferenza del processo $P(s)$

$$P(s) = \frac{2\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{100}+1\right)}{\left(\frac{s^2}{50^2}+\frac{0{,}6s}{50}+1\right)\left(\frac{s}{500}+1\right)}$$

2 E' richiesto da specifica che l'errore a regime per un ingresso a rampa sia minore o uguale ad un valore costante, in particolare $e|u(t)| \leq 0{,}2$.

Allora il sistema composto da $C(s)$ e $P(s)$ deve essere di **tipo 1** e quindi avere esattamente un polo nell'origine.

Poiché in $P(s)$ non è presente alcun polo, allora deve necessariamente essere presente nel controllore, ossia in $C(s)$.

Possiamo scrivere $\boldsymbol{h = 1}$

Svolgimento (2)

3 Il guadagno K_c del controllore $C(s)$ si ottiene dall'espressione dell'errore tenendo in considerazione che

$$e|u(t)| \leq 0{,}2 \quad \text{in cui} \quad |u(t)| = 3$$

Dalla tabella riguardante l'espressione dell'errore, definito in base al tipo di sistema e alla natura dell'ingresso, si ottiene

	0	1	2
$\delta_{-1}(t)$	$\frac{{k_d}^2}{k_d + K_G}$	0	0
$t\delta_{-1}(t)$	∞	$\frac{{k_d}^2}{K_G}$	0
$\frac{t^2}{2}\delta_{-1}(t)$	∞	∞	$\frac{{k_d}^2}{K_G}$

$$e = \frac{K_d^2}{K_G}$$

in cui $K_d = 2$ è un dato del problema

e K_G è il guadagno statico del sistema

K_G si ottiene come $\quad K_G = \lim_{s \to 0} s^h C(s)P(s) = K_c \cdot 2$

Quindi si può scrivere $\quad e|u(t)| = \frac{4}{K_c \cdot 2} \cdot 3 \leq 0{,}2$

da cui $\quad \boldsymbol{K_c \geq 30}$

Svolgimento (3)

4 Si calcola la funzione di trasferimento a ciclo aperto $F(s)$ del sistema come

$$F(s) = C(s)P(s)H(s) = \frac{K_c}{s^h} \cdot P(s) \cdot \frac{1}{K_d} = \frac{30}{s} \cdot \frac{2\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{100}+1\right)}{\left(\frac{s^2}{50^2}+\frac{0{,}6s}{50}+1\right)\left(\frac{s}{500}+1\right)} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{F(s) = \frac{30\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{100}+1\right)}{s\left(\frac{s^2}{50^2}+\frac{0,6s}{50}+1\right)\left(\frac{s}{500}+1\right)}}$$

5 Si individuano i fattori che compongono la funzione di trasferimento $F(s)$

$\boldsymbol{G_0}$ → termine costante 30

$\boldsymbol{G_{1D}}$ → polo nell'origine $\frac{1}{s}$

$\boldsymbol{G_{2N}}$ → zero reale $\begin{cases} \frac{s}{10}+1 \\ \frac{s}{100}+1 \end{cases}$

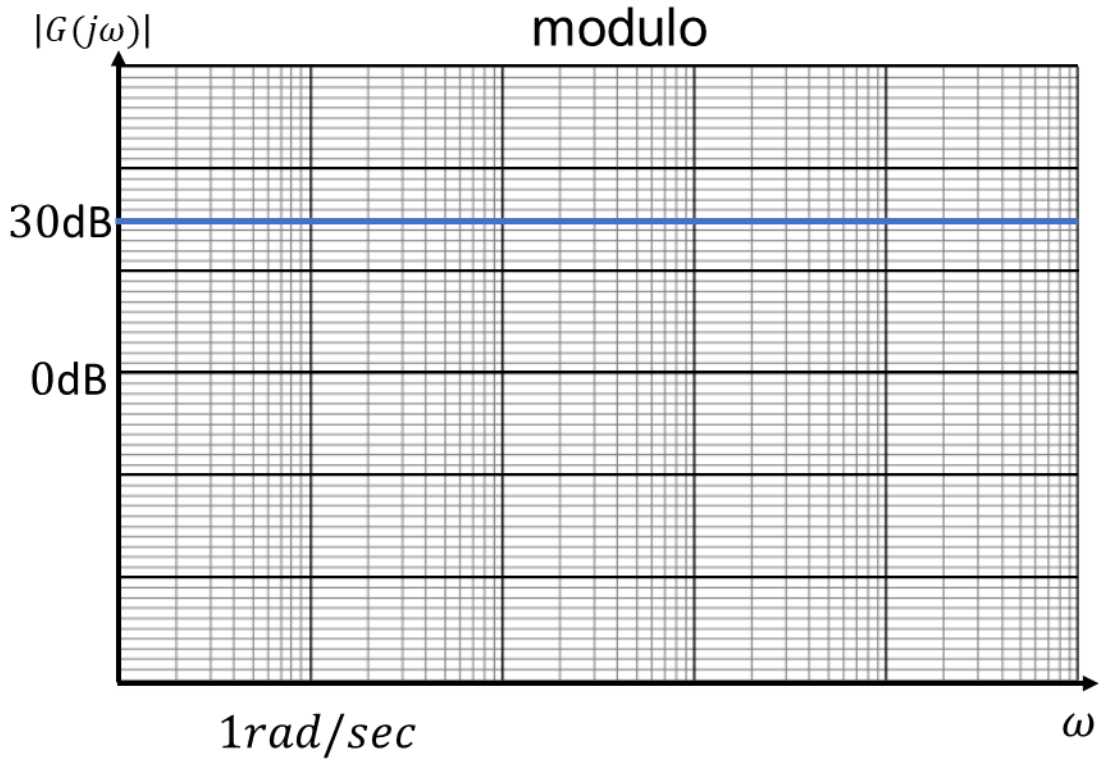
$\boldsymbol{G_{2D}}$ → polo reale $\frac{1}{\frac{s}{500}+1}$

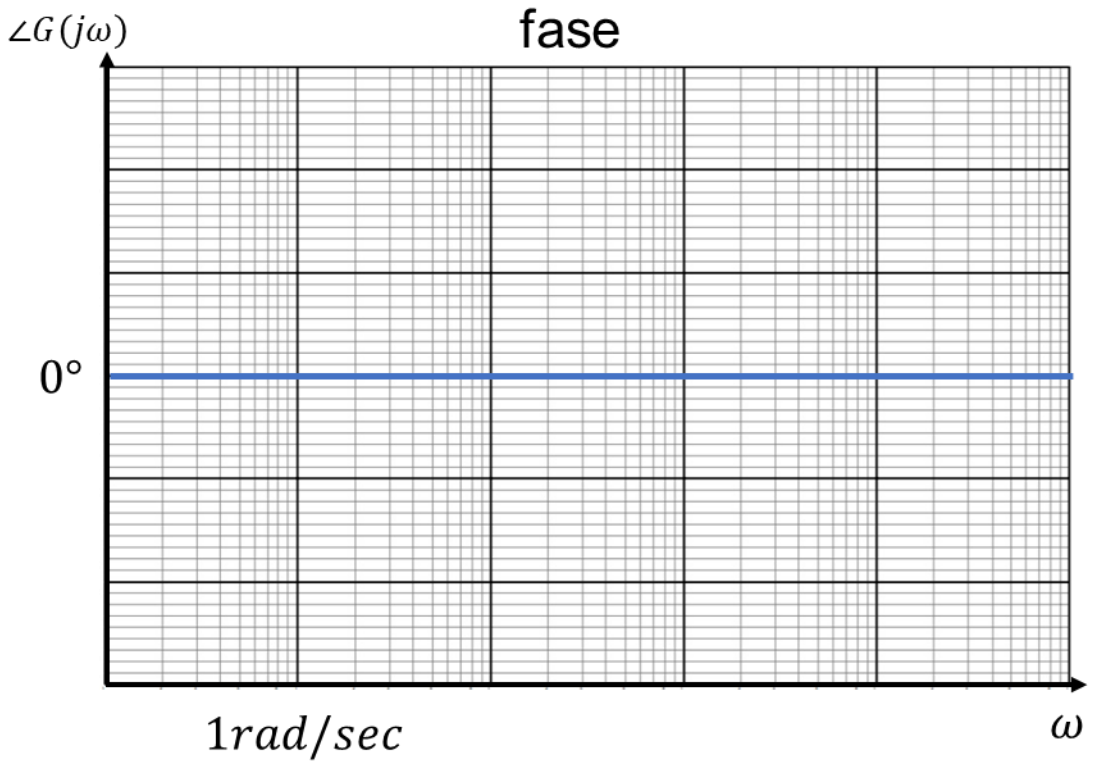
$\boldsymbol{G_{3D}}$ → poli complessi $\frac{1}{\frac{s^2}{50^2}+\frac{0{,}6s}{50}+1}$

Svolgimento (4)

6 Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

a $\boldsymbol{G_0}$ → termine costante 30 Modulo → $20\log_{10} 30 \approx 30\ dB$ Fase → 0°





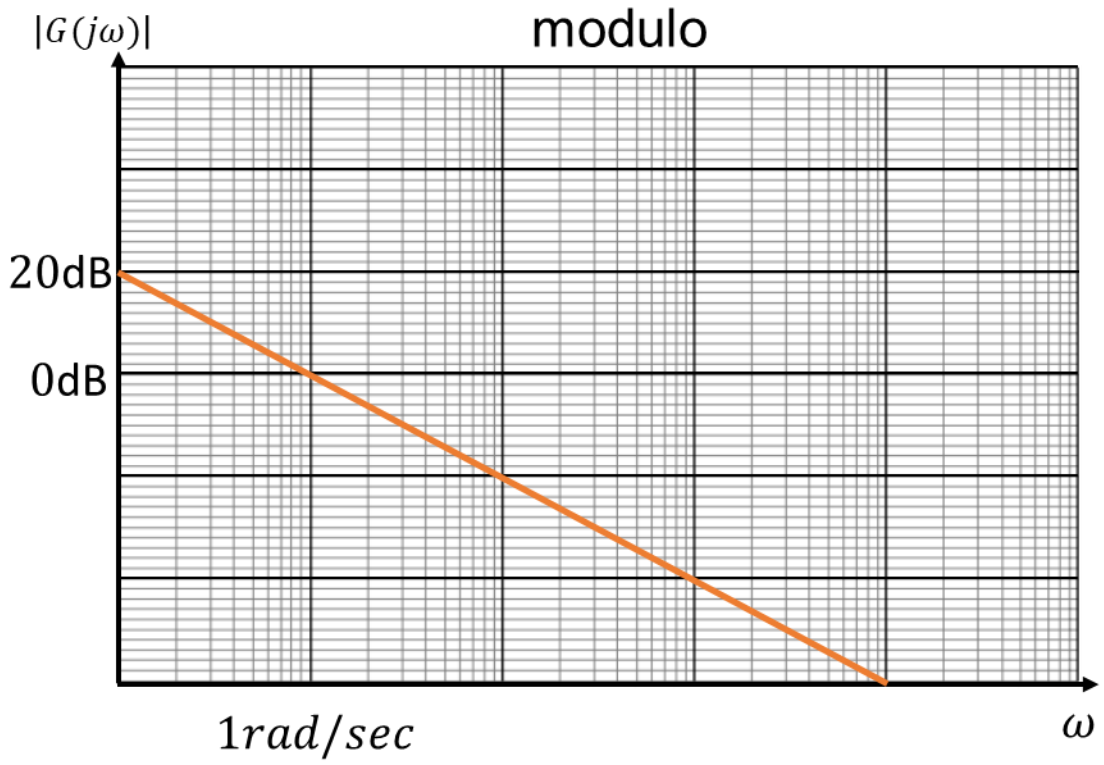
Svolgimento (5)

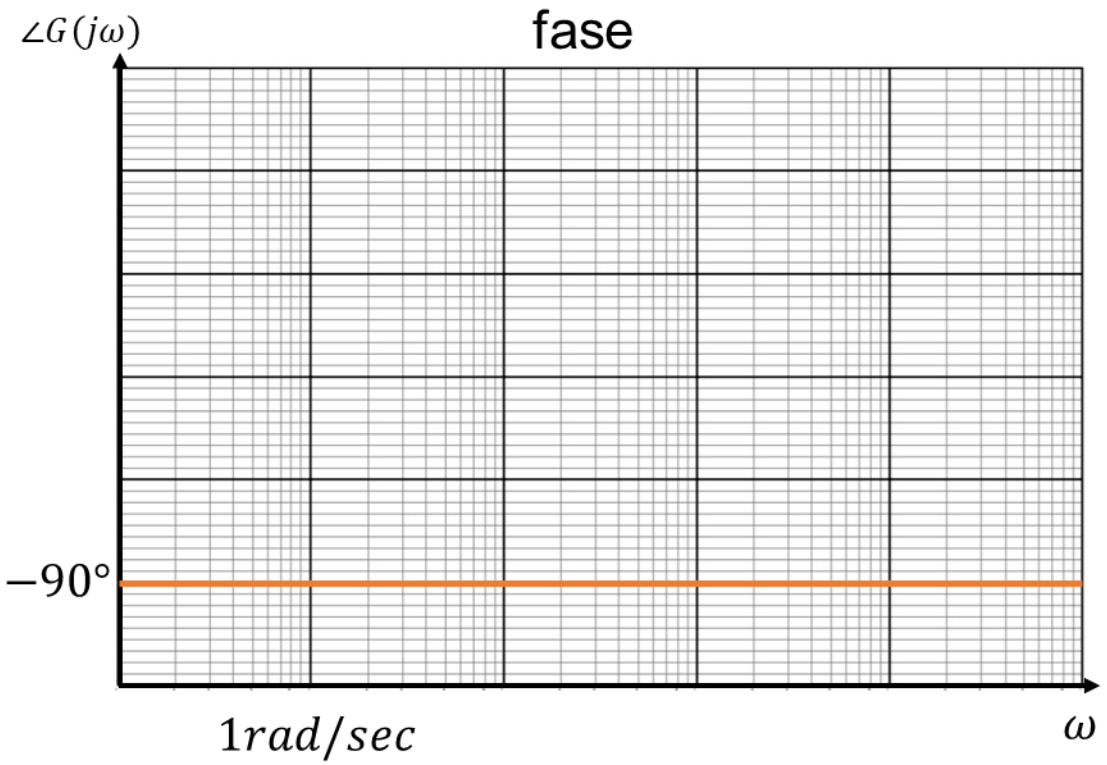
6 Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

b G_{1D} → polo nell'origine $\frac{1}{s}$

Modulo → $-20\ dB/dec$
$0\ dB\ in\ 1\ rad/\sec$

Fase → $-90°$

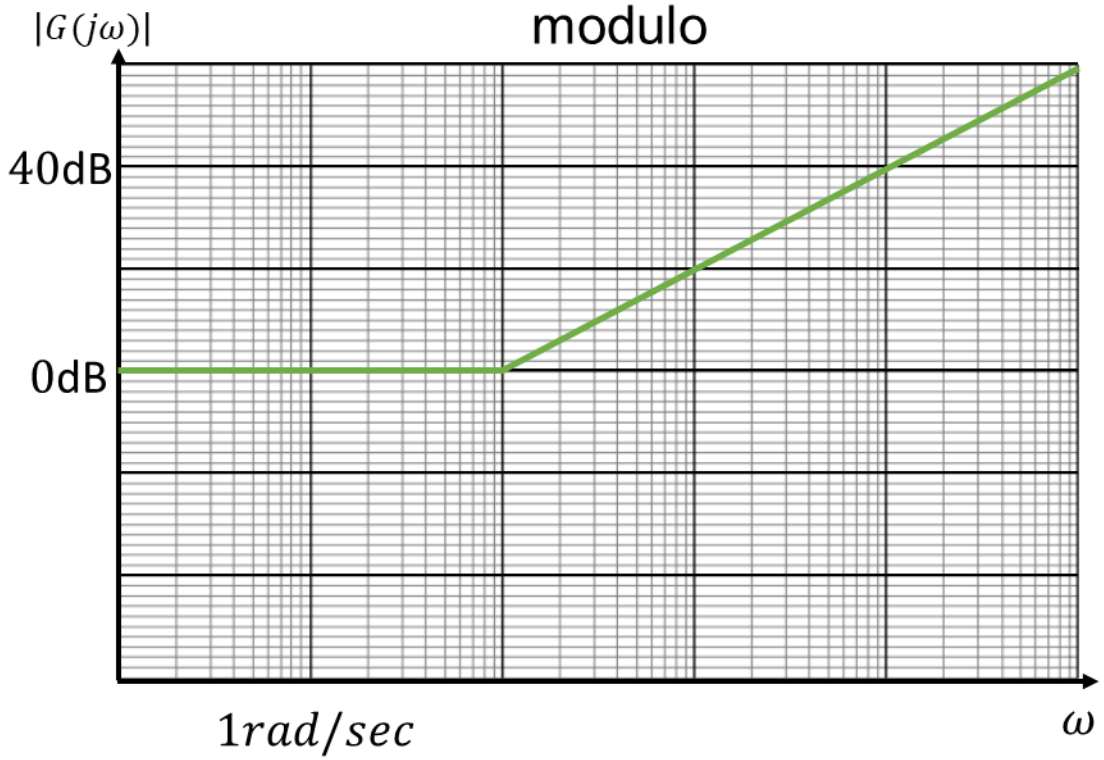


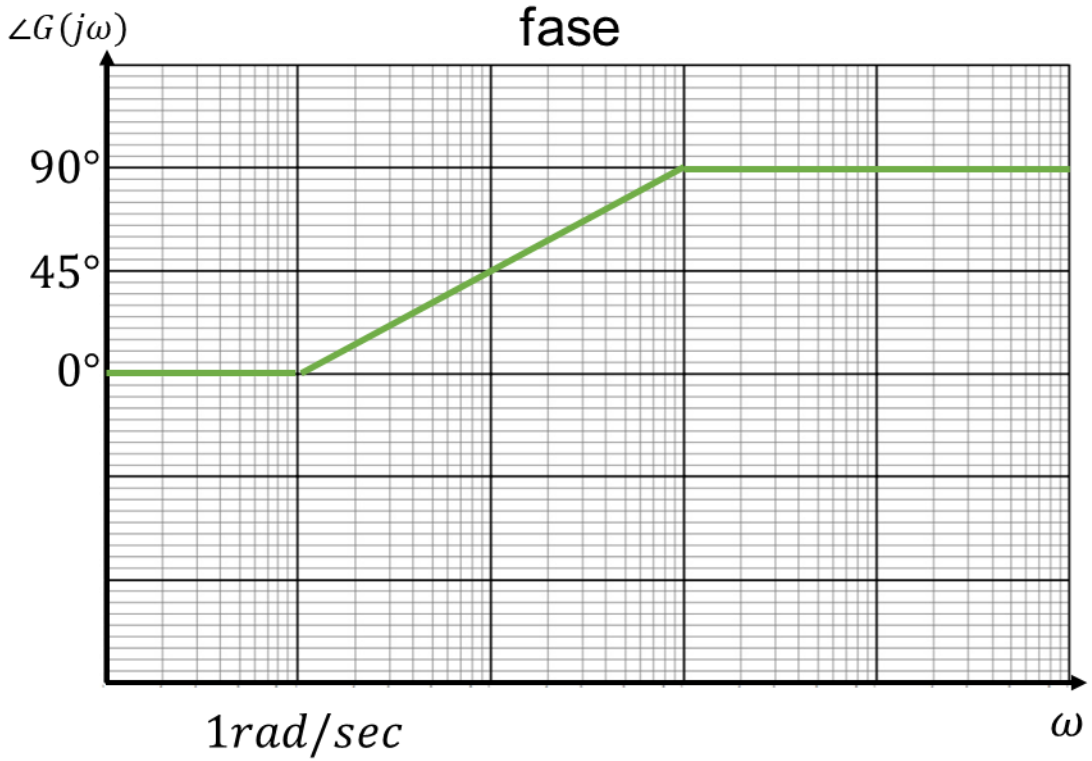


Svolgimento (6)

6 Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

c $G_{2N} \rightarrow$ zero reale $\frac{s}{10} + 1$ Modulo $\rightarrow \begin{cases} 0\ dB \text{ per } \omega < 10 \\ +20\ dB/dec \text{ per } \omega \geq 10 \end{cases}$ Fase $\rightarrow \begin{cases} 0° \text{ per } \omega < 1 \\ +45°/dec \text{ per } 1 \leq \omega \leq 100 \\ +90° \text{ per } \omega > 100 \end{cases}$

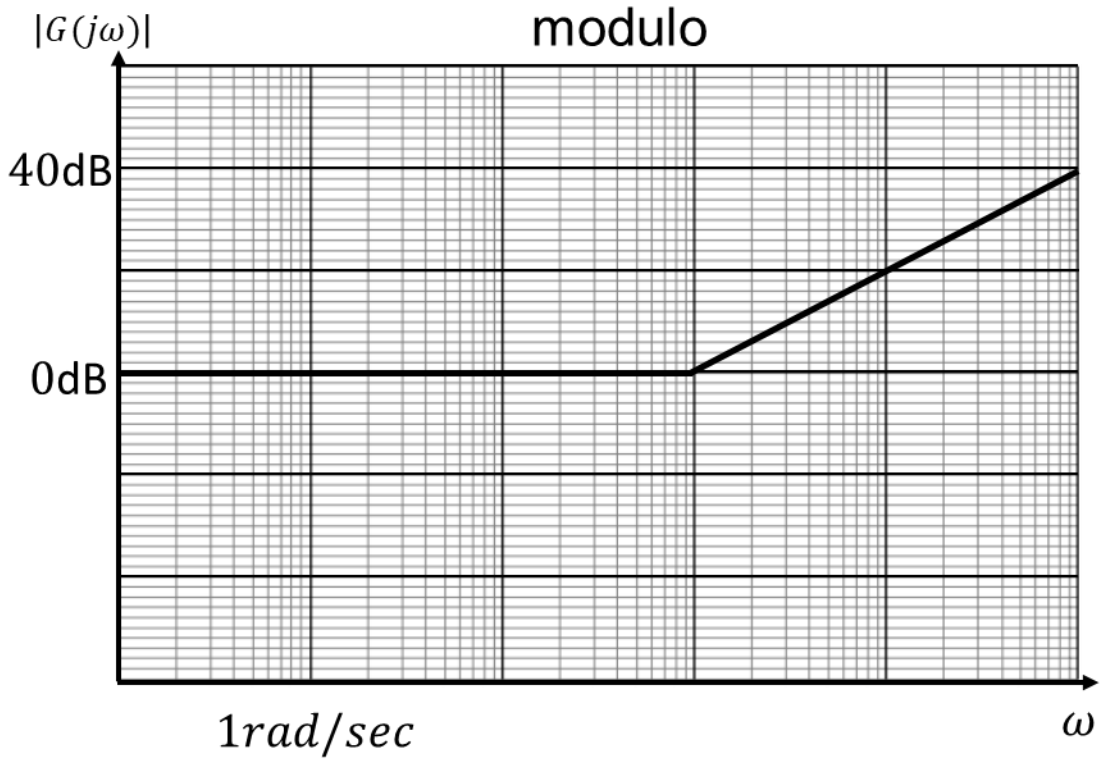


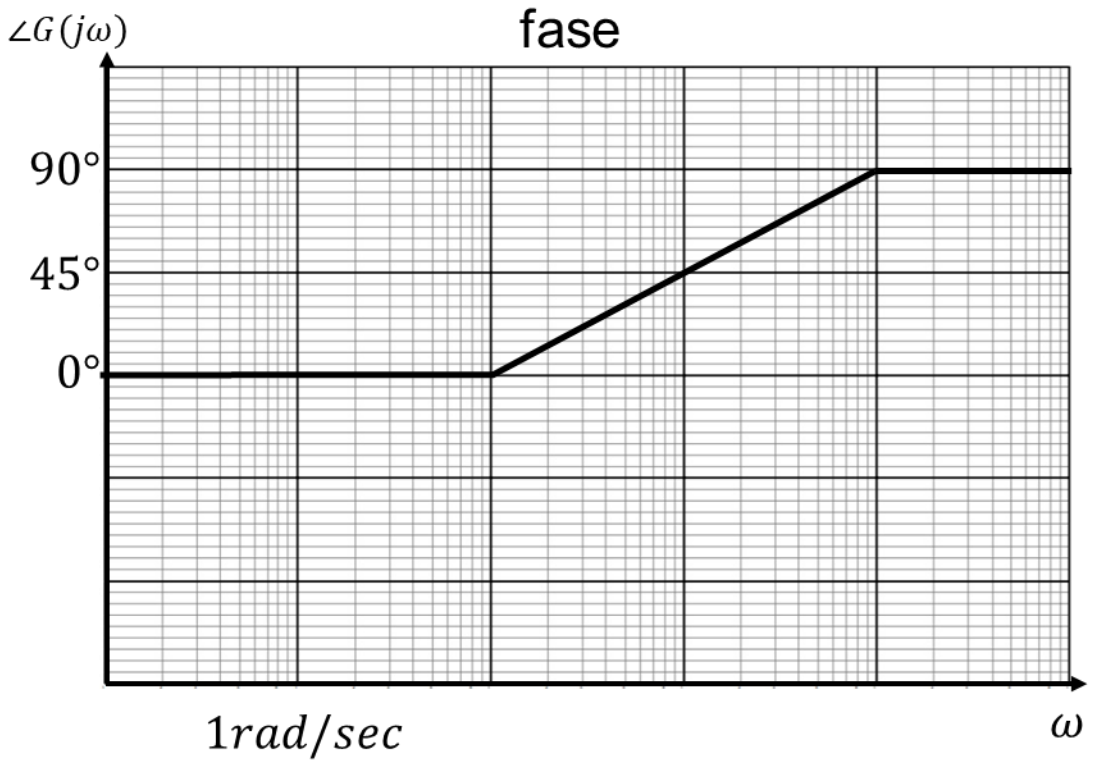


Svolgimento (7)

6 Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

d $G_{2N} \rightarrow$ zero reale $\frac{s}{100} + 1$ Modulo $\rightarrow \begin{cases} 0\ dB \text{ per } \omega < 100 \\ +20\ dB/dec \text{ per } \omega \geq 100 \end{cases}$ Fase $\rightarrow \begin{cases} 0° \text{ per } \omega < 10 \\ +45°/dec \text{ per } 10 \leq \omega \leq 1000 \\ +90° \text{ per } \omega > 1000 \end{cases}$

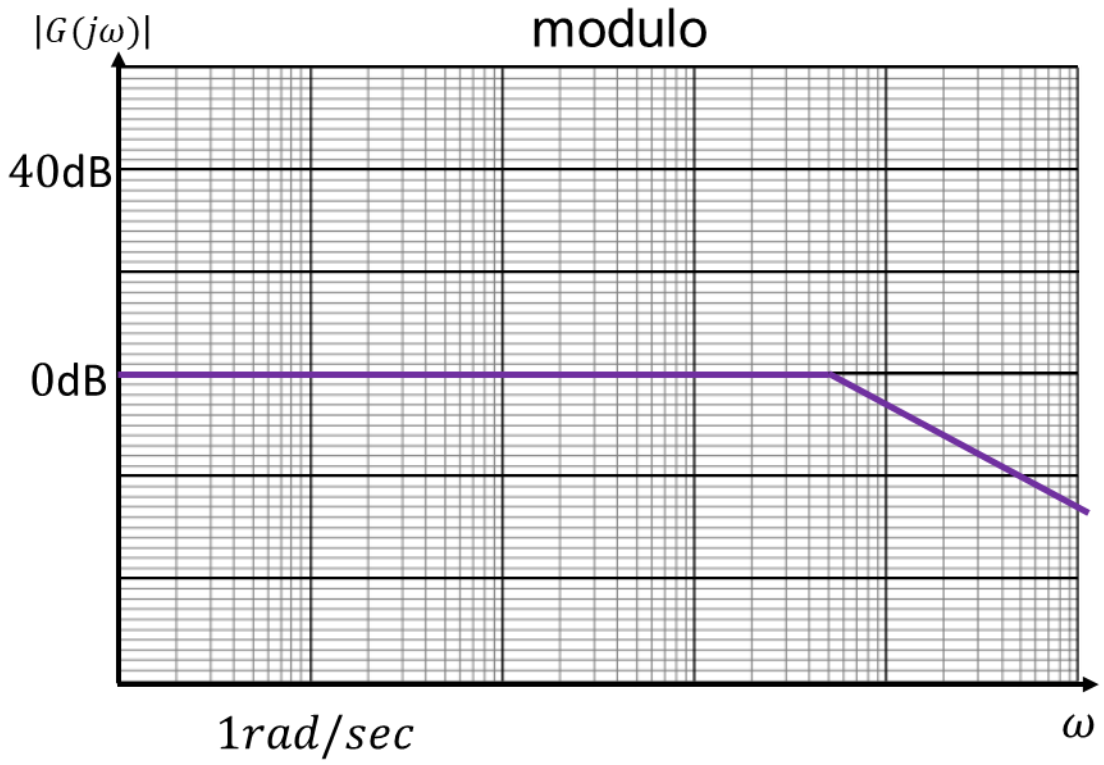


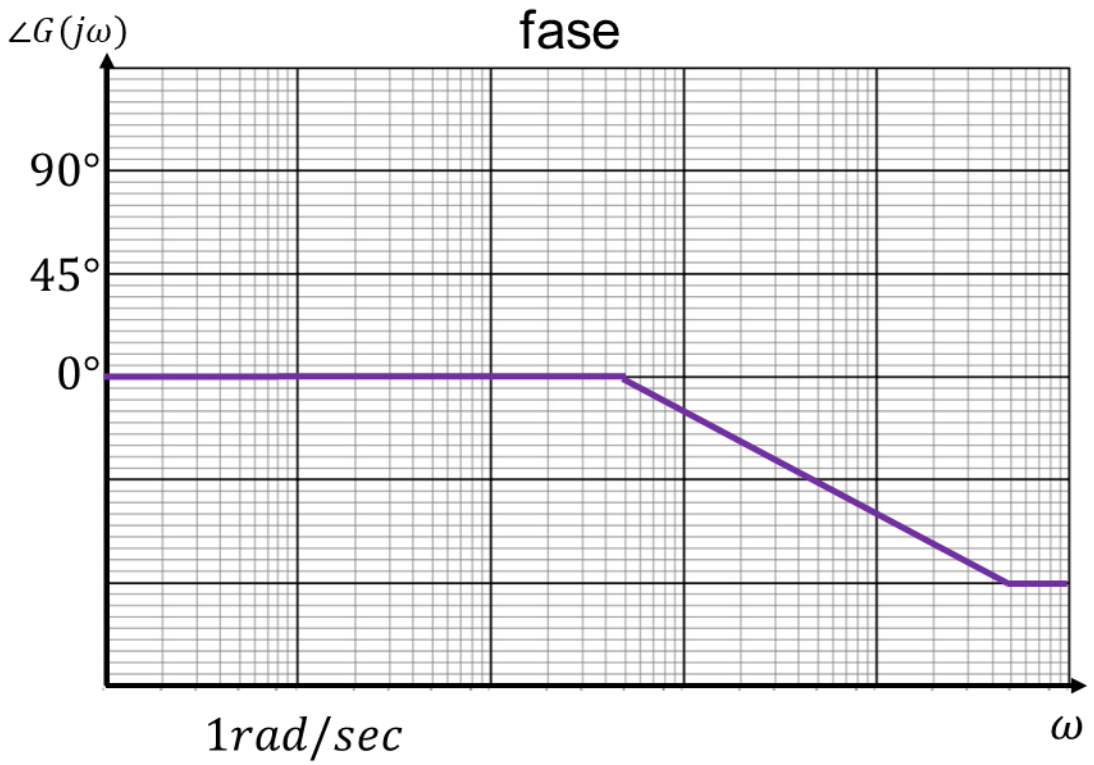


Svolgimento (8)

6 Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

e $G_{2D} \rightarrow$ polo reale $\dfrac{s}{500} + 1$ Modulo $\rightarrow \begin{cases} 0\ dB \text{ per } \omega < 500 \\ -20\ dB/dec \text{ per } \omega \geq 500 \end{cases}$ Fase $\rightarrow \begin{cases} 0° \text{ per } \omega < 50 \\ -45°/dec \text{ per } 50 \leq \omega \leq 5000 \\ -90° \text{ per } \omega > 5000 \end{cases}$





Svolgimento (9)

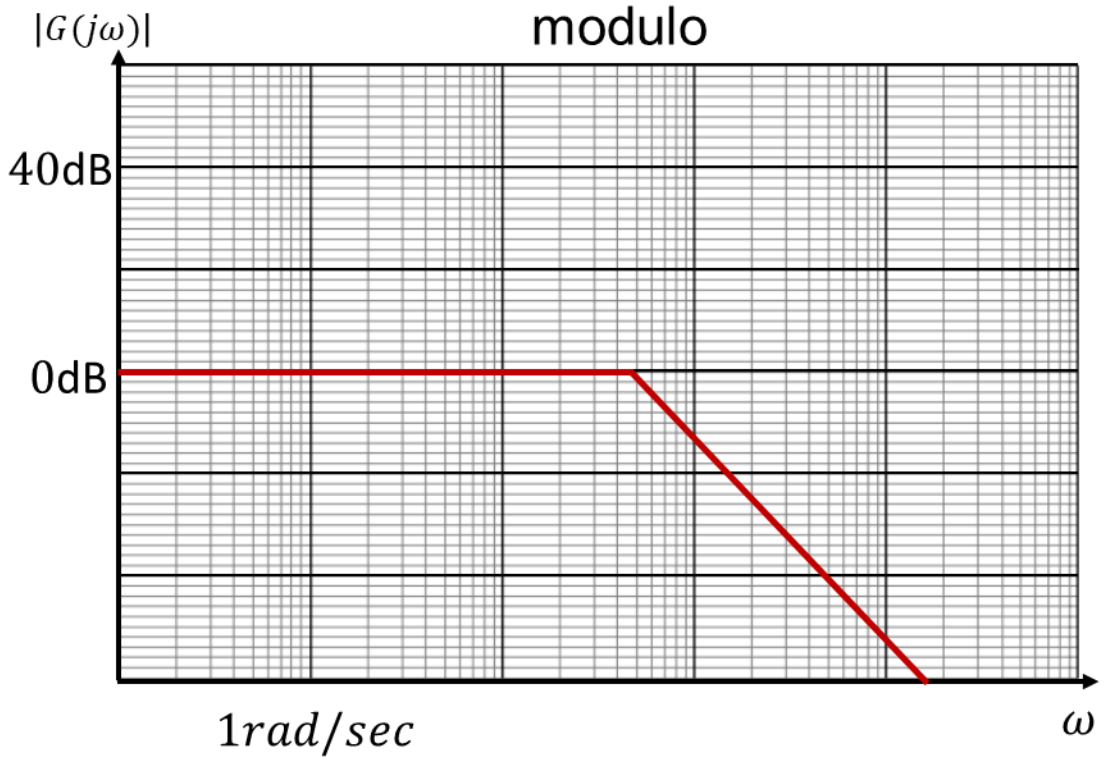
6 Per ogni termine individuato si definiscono i punti di rottura e si traccia il contributo

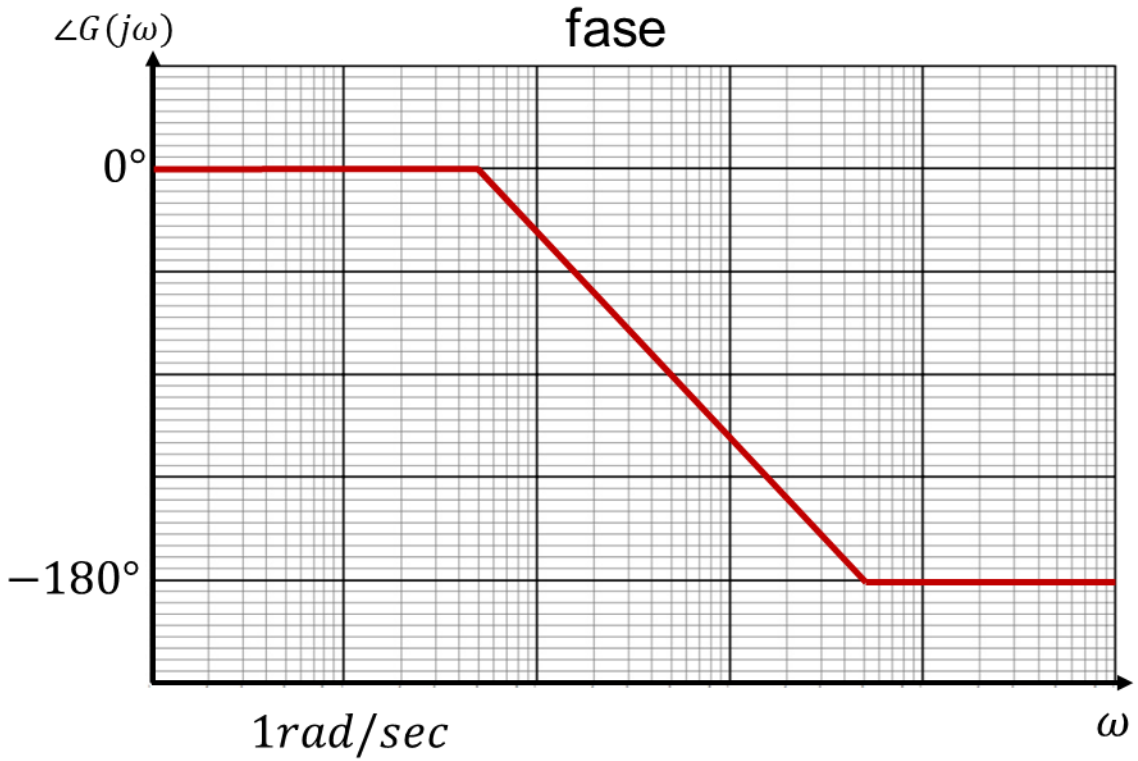
f G_{3D} → poli complessi

$$\frac{1}{\frac{s^2}{50^2}+\frac{0{,}6s}{50}+1}$$

Modulo → $\begin{cases} 0\ dB \text{ per } \omega < 50 \\ -40\ \ dB/dec \text{ per } \omega \geq 50 \end{cases}$

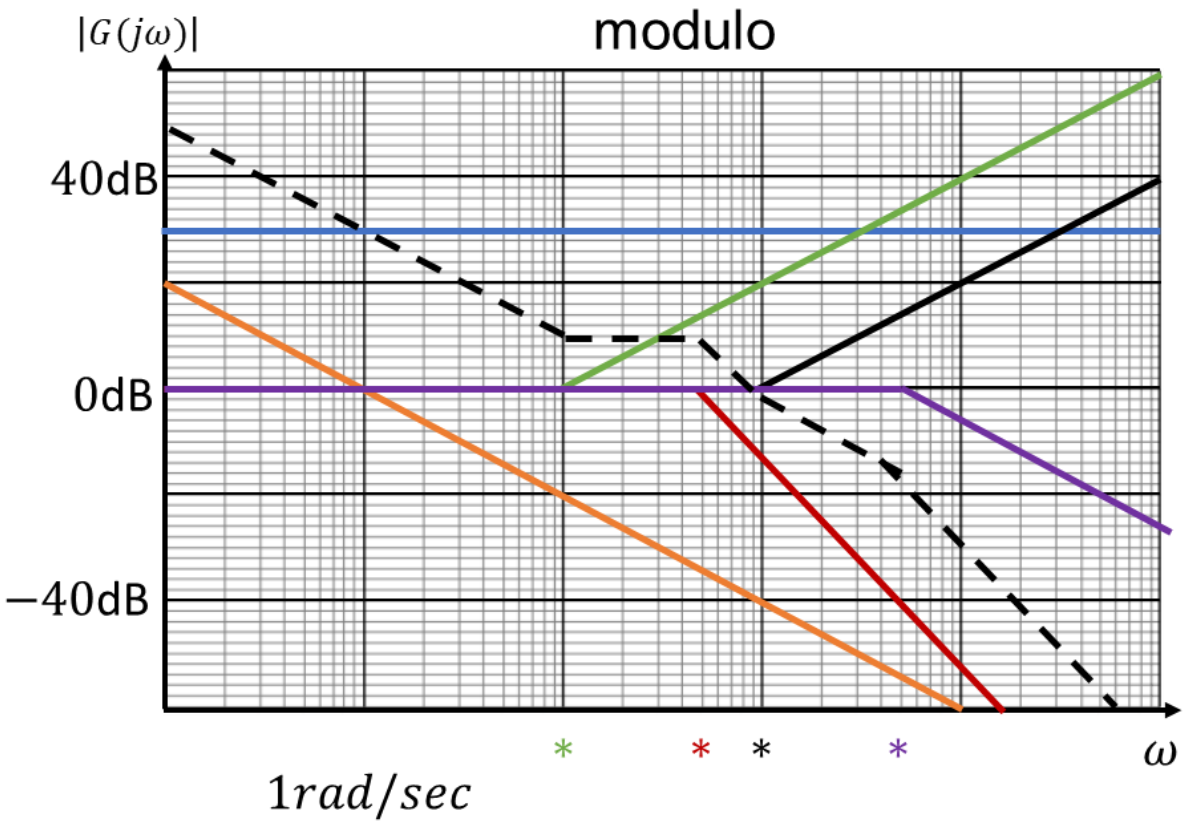
Fase → $\begin{cases} 0° \text{ per } \omega < 5 \\ -90°/dec \text{ per } 5 \leq \omega \leq 500 \\ -180° \text{ per } \omega > 500 \end{cases}$

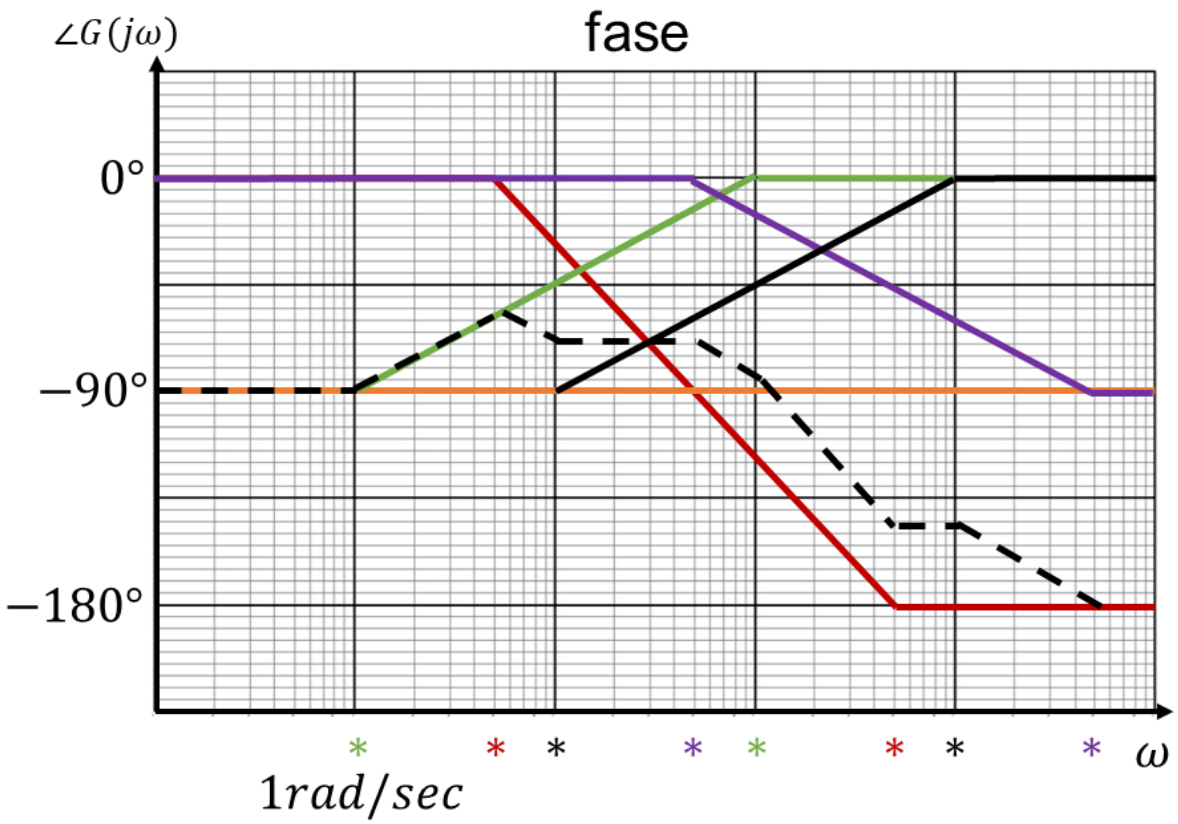




Svolgimento (10)

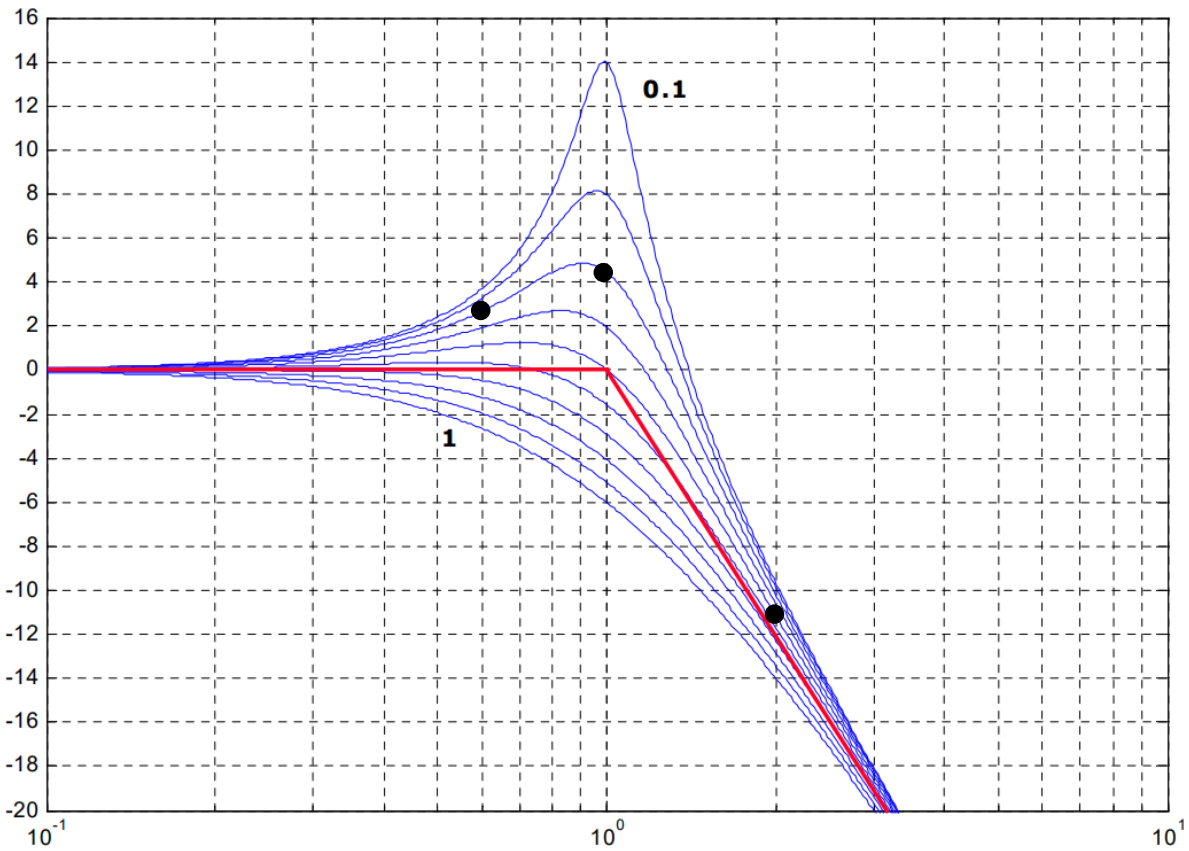
7 Si sommano i contributi di ogni termine per ottenere il tracciamento completo

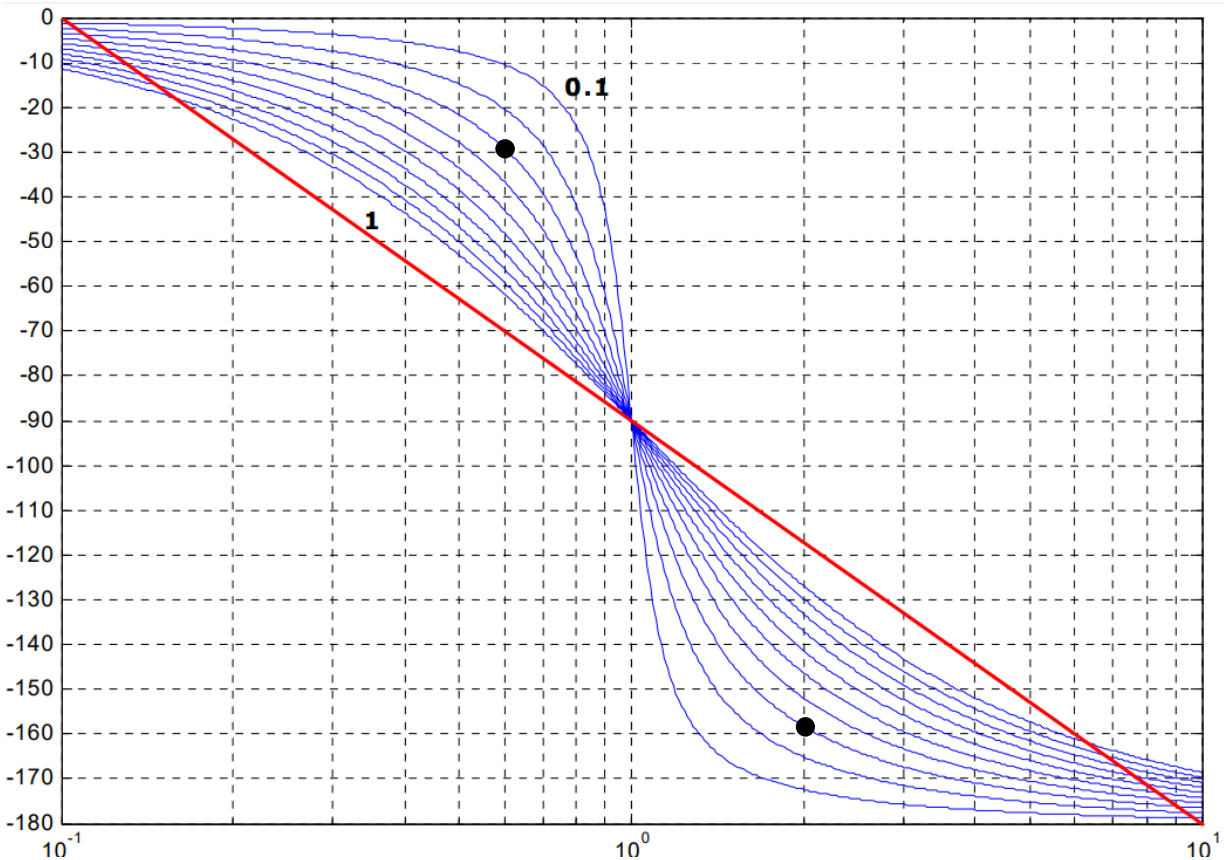




Svolgimento (11)

8 Si definisce la correzione da apportare dovuta al termine trinomio





$\boldsymbol{\zeta = 0,3}$

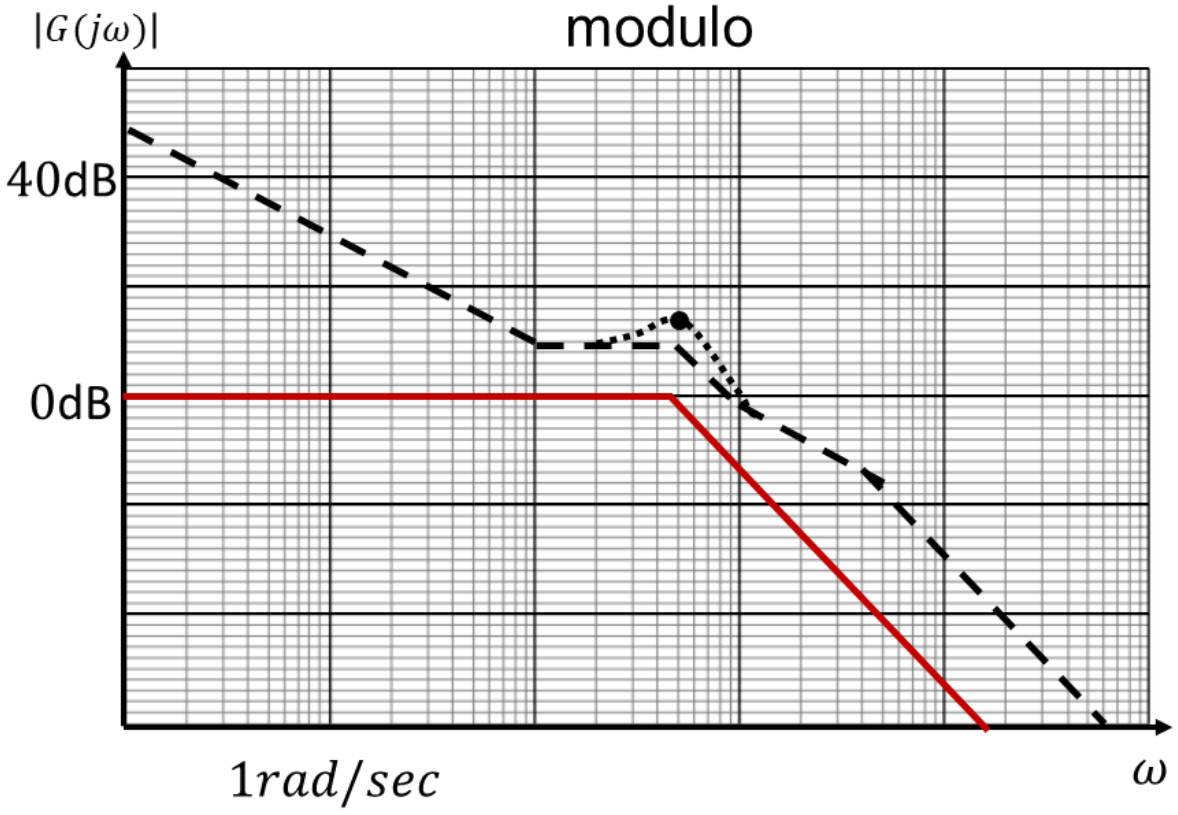
Calcolo delle posizioni su ascisse:

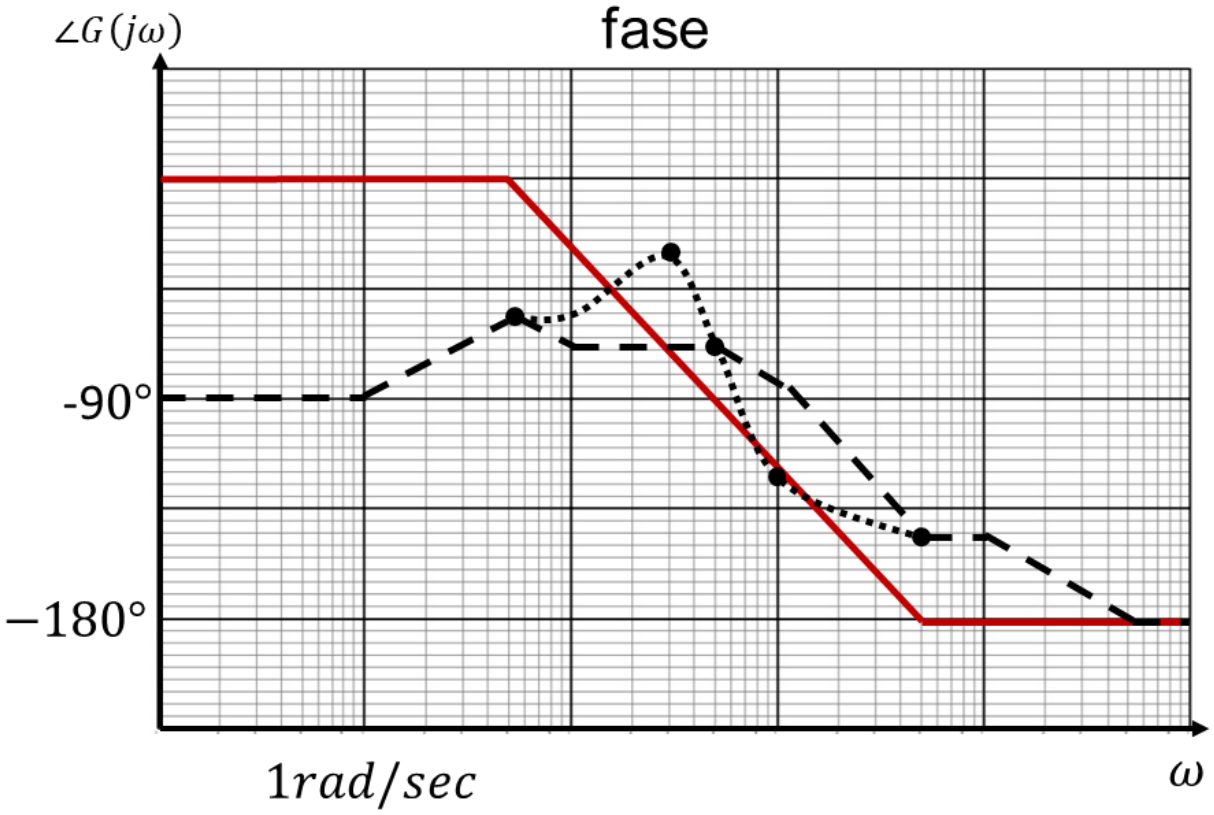
$$0.6 : 1 = x_1 : 50 \Rightarrow x_1 = 0.6 * 50 = 30$$

$$2 : 1 = x_2 : 50 \Rightarrow x_2 = 2 * 50 = 100$$

Svolgimento (12)

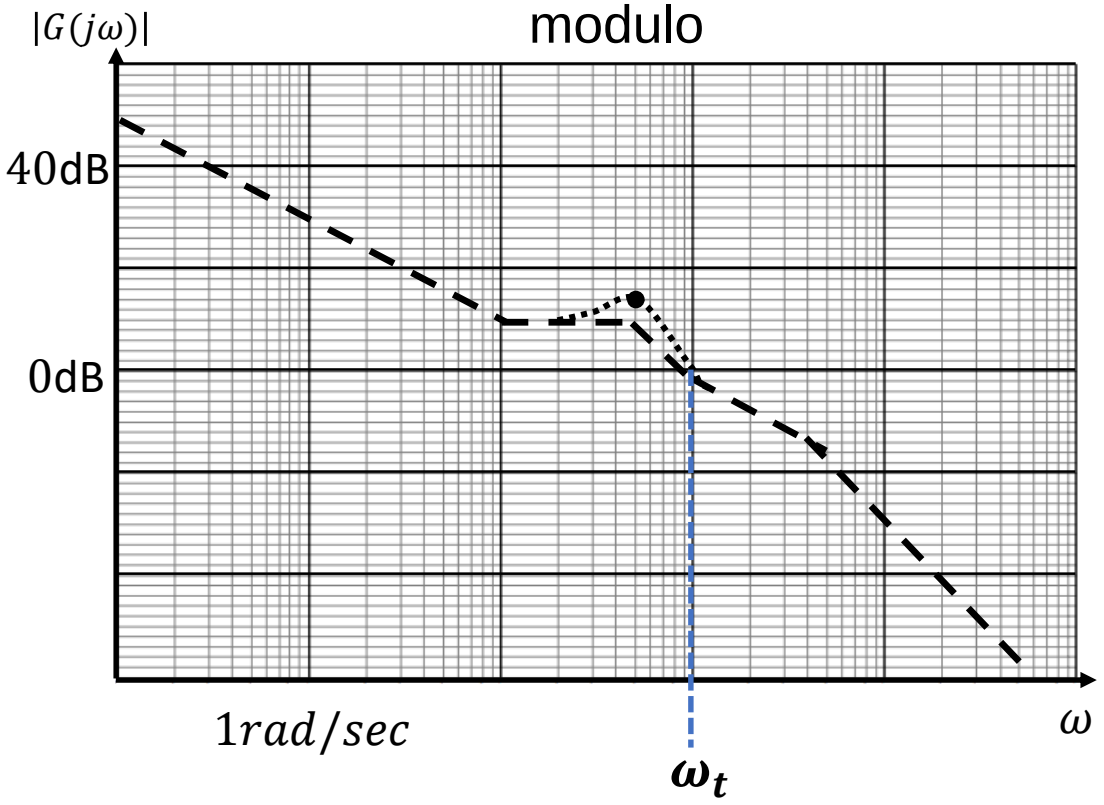
8 Si definisce la correzione da apportare dovuta al termine trinomio

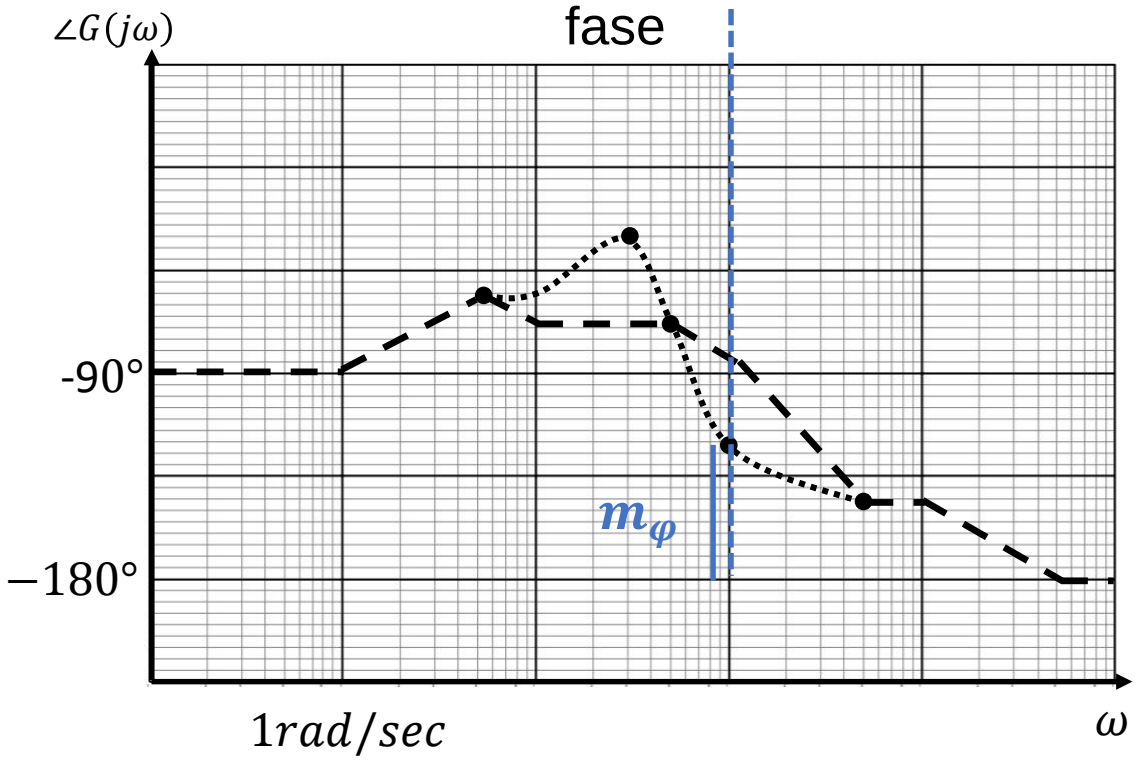




Svolgimento (12)

9 Si individuano: ω_t e il m_φ , $\omega_{-\pi}$ e il m_g





$\omega_t = 100\ rad/sec$ e $m_\varphi \approx 55°$

$\omega_{-\pi}$ non è calcolabile quindi $m_g = \infty$