Seminario di Logica Fuzzy

(G. Ulivi)

Insiemi Fuzzy

Operatori logici

Implicazioni

http://www.dia.uniroma3.it/autom/FuzzyContr/

Pensierini

- Uno, due sassi non sono un mucchio…
  100.000 lo sono. Esiste un valore limite?
- Il barbiere è persona che si fa la barba da sola o che va dal barbiere?
- La logica tradizionale considera l'impiego di simboli precisi, quindi non è adatta alla vita terrestre ma solo ad un immaginaria esistenza celeste (B. Russel, 1923)
- Finché le leggi della matematica si riferiscono alla realtà non sono certe, quando sono certe non si riferiscono alla realtà
  (A. Einstein)
- Il segno di uguale non è per gli ingegneri
  (G. Ulivi, oops)

Cenni storici

??

- L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Inf. & Contr, 1965
- L. A. Zadeh, Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes, IEEE Trans, on Syst., Men and Cybern., 1973
- Mamdami, controllo di un motore a vapore, 1976
  Ostergaard, controllo di un cementificio industriale, 1982

Anni ’80

Dubois, Pradè, numeri fuzzy, teoria della possibilità

Diversi tipi di ragionamento fuzzy; Equazioni fuzzy

Sugeno, un nuovo paradigma per il controllo; controllo di un elicottero

Anni ’90

Modellistica fuzzy, tentativi di definire la stabilità dei sistemi, rapporti con le ANN; esplosione delle applicazioni industriali (lavatrici, cambi di velocità, telecamere, condizionatori,…)

Insiemi usuali (crisp)

- Un elemento x dell’insieme universale U può appartenere o meno ad un insieme A
- Un insieme A è definito dalla sua fcn. caratteristica:

$$\mu_A : U \to \{0, 1\}$$ (solo due valori)

$$\mu_A(x) = A(x) = \begin{cases} 1 & iff \quad x \in A \\ 0 & iff \quad x \notin A \end{cases}$$

(due possibili notazioni)

Estensione immediata

- Un insieme fuzzy è un'estensione per la quale la funzione caratteristica è continua

$$\mu_A : U \to [0,1]$$ (tutti i valori tra 0 e 1)

- Il significato è quello di graduare, sfumare l'appartenenza
- Quanto vale per gli insiemi, vale per le proposizioni, quindi si può sfumare anche
  il grado di verità (credito) di un'affermazione.

U discreto

- Se U è discreto, si può enumerare il fset

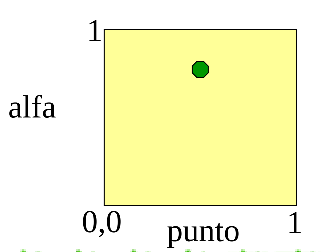
$$A(x) = \mu_1/x_1 + \mu_2/x_2 + \cdots + \mu_N/x_N$$

- Ad es.:

$$\text{veloce}(x) = 1/\text{ferrari} + 0.8/\text{alfa} + 0.5/\text{punto} + \cdots + 0/\text{"500"}$$

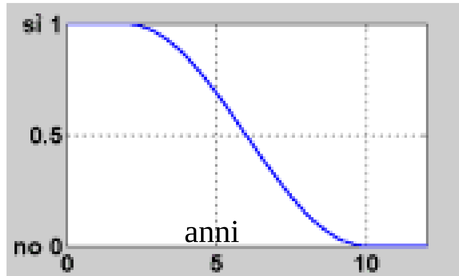
- Visualizzazione utile per confrontare (non per usi pratici), si applica a fset con 2 elementi; Kosko

subset di "veloce"



Esempi

- Questa automobile appartiene all'insieme delle automobili nuove
- "Questa automobile è nuova" == vero

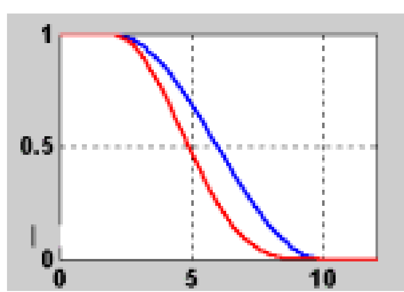


Problema:

Qual è l'andamento "giusto" della funzione?

Primi sviluppi

- Scelta della funzione caratteristica
  ← →
  soggettività, arbitrarietà
- Tentativi di esprimere concetti "quotidiani", "ragionamento umano", ecc.
- Analisi dei modificatori linguistici
  - Molto nuovo = $(\text{nuovo})^2$
- Un ramo secco?



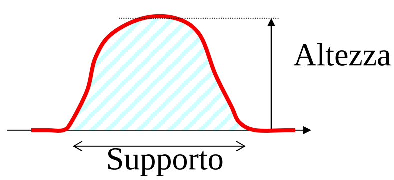
Differenze significative

- Dato un numero tra 0 e 1, quali sono le possibili interpretazioni? Facciamo un'esperimento concettuale.
- Domanda: c'è un panino col salame in frigo?
  Risposta: 0.5

- Se la interpretiamo come probabilità, significa "forse", ripetendo la domanda all'infinito, troveremo il panino la metà delle volte.
- Se la interpretiamo come misura, significa che c'è mezzo panino.
- Se la interpretiamo come fuzzy, significa che c'è qualcosa, magari pane e salame separati o un panino al prosciutto.

Concetti di base

- Supporto di $A(x)$: $x : A(x) > 0$
- Altezza di $A(x)$: $max(A(x))$
  - Spesso si normalizza a 1



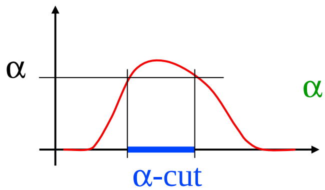
- Cardinalità di $A(x)$ (per U discreto):

  $$\mathrm{card}(A(x)) = \Sigma A(x_i)$$

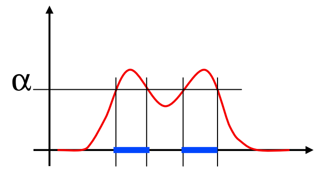
α-cuts

- Un concetto utile per descrivere i fuzzy sets e per comprendere alcune proprietà
- E' un insieme crisp. Dato $A(x)$,

$$A_\alpha = \{x \in X:\ A(x) > \alpha\}$$



α è variabile



- Insiemi convessi hanno α-cuts (per diversi valori di α) nidificati

Operatori logici

- i.e. “Set theoretical operators”:
  NOT, AND, OR
- Esistono molte possibilità di implementarli
  - Necessità di attribuire a ciascuna una “semantica”
    - Confusione
    - Guerre ideologiche tra scuole di pensiero
  - MA anche
  - Ricchezza di scelte, adattabilità
- Per introdurli usiamo un approccio assiomatico: sono fcns che soddisfano assiomi “desiderabili”

Complemento c(x)

- *c: [0, 1] → [0, 1]*
- Assiomi:
  - C1: condizioni al contorno $c(0)=1,\ c(1)=0$
  - C2: monotona noncrescente

    $a < b \ \rightarrow c(a) \geq c(b)$
  - C3: fcn continua
  - C4: fcn involutiva: $c(c(x)) = x$

(C3 e C4 non sono strettamente indispensabili)

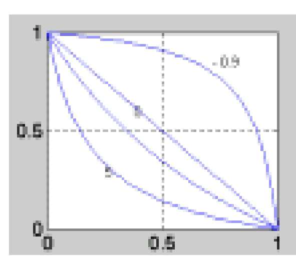
Esempi di complemento

- Soddisfa solo C1 e C2:

$$c(x) = \begin{cases} 1 & if \quad x \leq t \\ 0 & if \quad x > t \end{cases}$$

- Una famiglia parametrizzata (Sugeno)

$$c(x) = \frac{1-x}{1+\lambda x}, \quad \lambda \in (-1, \infty)$$



- Da cui il più usato, per λ=0 :

$$c(x) = 1 - x$$

Assiomi per l'Unione

- $u : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$
- U1: $u(0,0) = 0;\ u(0,1) = u(1,0) = u(1,1) = 1$
- U2: $u(a,b) = u(b,a)$
- U3: se $a < a'$ e $b < b'$, allora $u(a,b) < u(a',b')$
- U4: $u(u(a,b), c) = u(a, u(b,c))$
- Non indispensabili:
  - U5: u è una funzione continua
  - U6: $u(a,a)=a$
- Altra notazione $\vee$

sono in genere delle s-norme o t-conorme (Menger, 1942)

Assiomi per l'Intersezione

- $i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$
- I1: $u(1,1) = 1;\ u(0,1) = u(1,0) = u(0,0) = 0$
- I2: $i(a,b) = i(b,a)$
- I3: se $a < a'$ e $b < b'$, allora $i(a,b) < i(a',b')$
- I4: $i(i(a,b), c) = i(a, i(b,c))$
- Non indispensabili:
  - I5: i è una funzione continua
  - I6: $i(a,a)=a$
- Altra notazione $\wedge$

E' una "t-norma" (norma triangolare)

Esempi di unioni e intersezioni

I più impiegati

$\max(a,b)$ $\min(a,b)$ "MaxMin"

$$\frac{a+b-(2-\lambda)ab}{1-(1-\lambda)ab} \qquad \frac{ab}{\lambda+(1-\lambda)(a+b-ab)} \qquad \lambda \in (0,\infty)$$

$a+b-ab$ ab "PRod" $\lambda = 1$

$$\min\left\{1, \left(a^w+b^w\right)^{1/w}\right\} \qquad 1-\min\left\{1, \left((1-a)^w+(1-b)^w\right)^{1/w}\right\} \qquad w \in (0,\infty)$$

$\min(1,\, a+b)$ $1-\min(1,\, 2-a-b)$ "BS" $w = 1$

Legge di De Morgan

Dato complemento e unione,
determinare l'intersezione che soddisfa

$$c[\, i(a,b)\,] = u[\, c(a), c(b)\,]$$

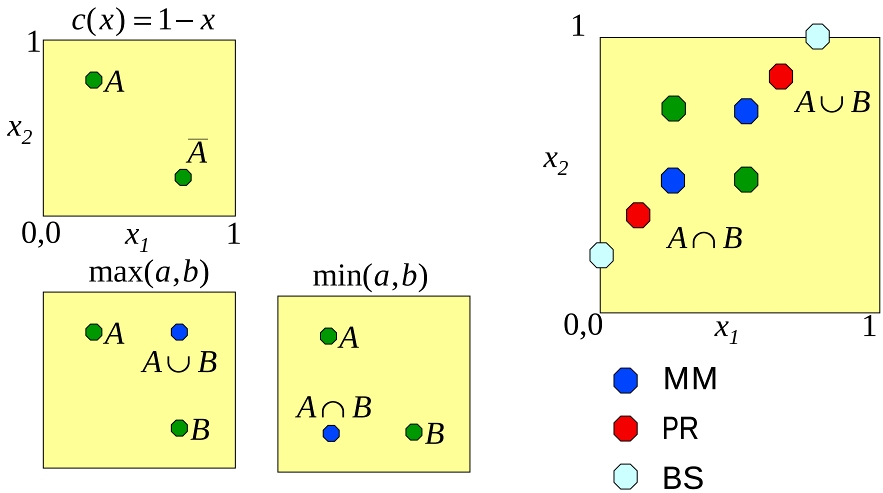
In genere va risolta un'equazione funzionale,
rispetto al cpl. standard
La soddisfano gli operatori della stessa classe.

$c(x) = 1-x$

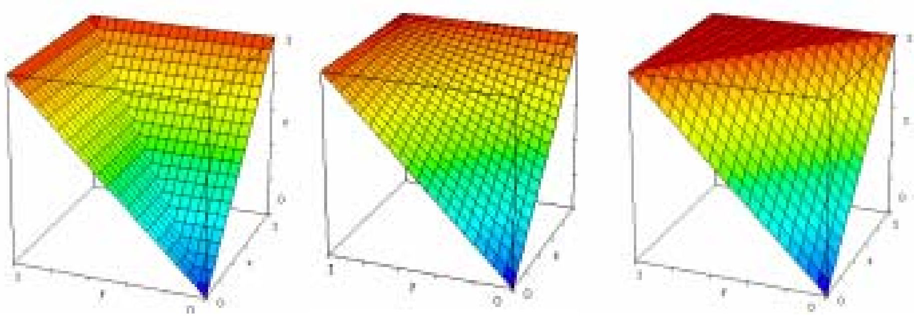
$\max(a,b)$ $\min(a,b)$

$a+b-ab$ ab

Operatori sull'ipercubo

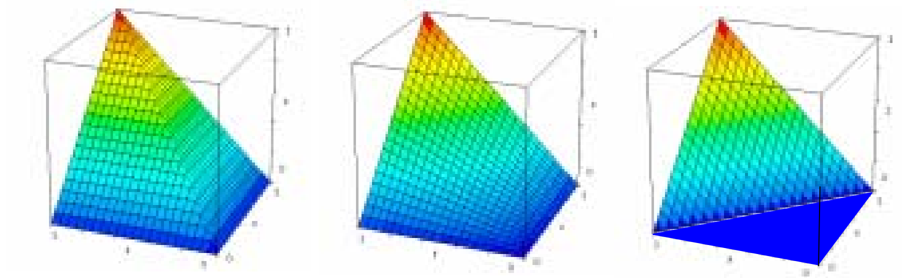


Unioni - OR



max(x,y) ⊂ x+y-xy ⊂ min(1, a+b)

Intersezioni - AND



min(x,y) ⊃ xy ⊃ 1-min(1, 2-a-b)

Semantica

Esempio: scelta di un’automobile usata

	Costo	Età	Accett costo (a)	Accett età (b)	Min(a,b)	a*b	1-min(1, 2-a-b)
A	13ML	3	0.9	0.7	0.7	0.63	0.6
B	13ML	8	0.9	0.1	0.1	0.09	0.0
C	20ML	5	0.5	0.4	0.4	0.2	0.0
D	25ML	1	0.4	0.9	0.4	0.36	0.3
E	25ML	5	0.4	0.4	0.4	0.16	0.0

- Tutti individuano la più conveniente,
- Solo a*b contiene tutte le sfumature,
- min è non-interagente
- 1-min(…) rifiuta tutto al di sotto di un limite

Idempotenza: A op A = A

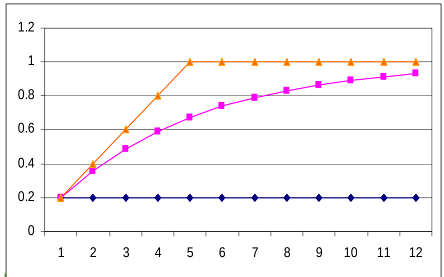
"max e min sono le uniche operazioni continue e idempotenti"

Idempotenza: l'utilità dipende dal tipo di informazione

Vogliamo unire 10 affermazioni (OR):

- 10 persone asseriscono che piove – dannosa

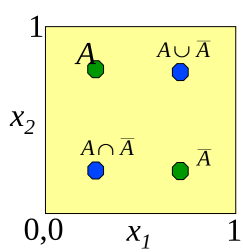
- la stessa persona dice 10 volte che piove - utile



Terzium non datur

non contraddizione $i(a, c(a)) = 0$

medio escluso $u(a, c(a)) = 1$



Si hanno solo con operatori che non sono

né idempotenti

né distributivi

La loro perdita è generalmente vista come un arricchimento rispetto alla logica Booleana

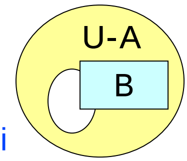
Infatti una proposizione può essere allo stesso tempo un po' VERA e un po' FALSA

Inclusione (implicazione)

Inclusione: essere sottoinsieme di… $\bar{A} \cup B$

Prima definizione (risultato booleano):

$B \rightarrow A \qquad A \supset B \ \text{ iff } \ A(x) \geq B(x)$



Utilizzando formulazioni della logica a più valori si hanno (espressioni più frequenti):

$$\begin{cases} 1 & \text{if } B(x) \leq A(x) \\ A(x) & \text{else} \end{cases}$$

Goedel

$$\begin{cases} 1 & \text{if } B(x) = 0 \\ \min\{1, A(x)/B(x)\} & \text{else} \end{cases}$$

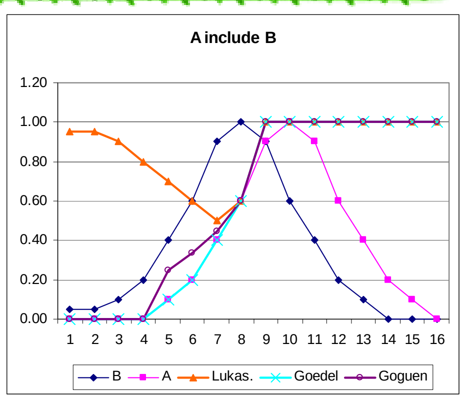
Goguen

$$\min\{1, 1 + A(x) - B(x)\}$$

Lukasiewicz

Diverse implicazioni

B	A	Lukas.	Goedel	Goguen
0.05	0.00	0.95	0.00	0.00
0.05	0.00	0.95	0.00	0.00
0.10	0.00	0.90	0.00	0.00
0.20	0.00	0.80	0.00	0.00
0.40	0.10	0.70	0.10	0.25
0.60	0.20	0.60	0.20	0.33
0.90	0.40	0.50	0.40	0.44
1.00	0.60	0.60	0.60	0.60
0.90	0.90	1.00	1.00	1.00
0.60	1.00	1.00	1.00	1.00
0.40	0.90	1.00	1.00	1.00
0.20	0.60	1.00	1.00	1.00
0.10	0.40	1.00	1.00	1.00
0.00	0.20	1.00	1.00	1.00
0.00	0.10	1.00	1.00	1.00
0.00	0.00	1.00	1.00	1.00



Quando A>B, sono tutte uguali;
le differenze si vedono quando A<B

Relazioni

prodotto cartesiano
relazioni
composizione
inferenze

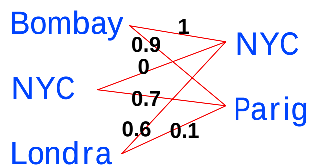
Prodotto Cartesiano, Relazioni

Dati due insiemi (crisp) A e B: $Q = A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$

Relazione R: un sottoinsieme di Q $\quad R(a,b) = \begin{cases} 1 & a,b \in R \\ 0 & else \end{cases}$

Ovvia l'estensione fuzzy. Esempio:

	NYC	Parigi
Bombay	1.00	0.90
NYC	0.00	0.70
Londra	0.60	0.10



R = lontano da...; relazione binaria

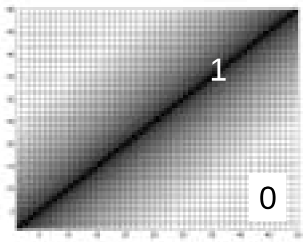
diagr. sagittale

U continuo

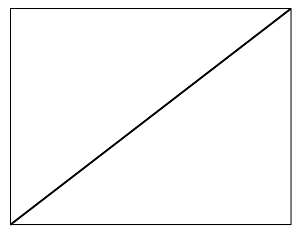
Per rappresentare relazioni tra insiemi aventi
la potenza del continuo,
si ricorre a espressioni analitiche o a superfici

relazione di uguaglianza $a=b$

Fuzzy



Crisp

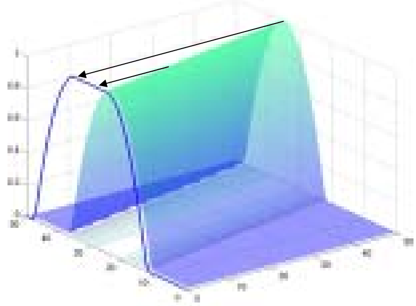


Proiezione e Estensione

(operazioni tipiche per Fset multidimensionali)

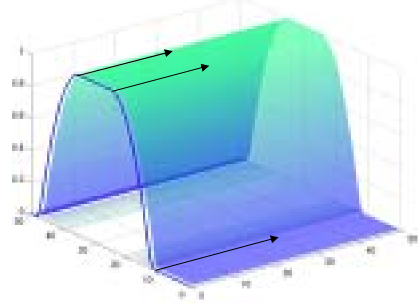
Proiezione:

$P(x) = \text{proj}(R\downarrow X)$
$= \sup_b R(x,y)$ (spesso)



Estensione cilindrica:

$R(x,y) = \text{cyl}(R\downarrow X\text{x}Y)$
$= F(x)\ \forall\ y$



Estens. Proiez. per U discreto

Estensione cilindrica

1.00	→	1.00	1.00	1.00
0.70	→	0.70	0.70	0.70
0.60	→	0.60	0.60	0.60

Proiezione

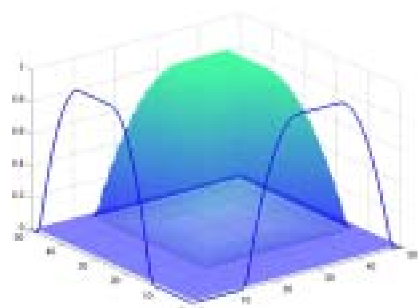
	NYC	Parigi		
Bombay	1.00	0.90	→	1.00
NYC	0.00	0.70	→	0.70
Londra	0.60	0.10	→	0.60
	↓	↓		
	1.00	0.90		

Ovviamente, alle relazioni (insiemi fuzzy multidimensi
è possibile applicare anche AND OR Negazione ecc.

Chiusura cilindrica

E' la massima relazione compatibile con due proiezioni.

Può essere ricostruita dalle sue proiezioni



Si ottiene come $\wedge$(proj's)
Qui è calcolata con min

Composizione di relazioni

Date due relazioni P e Q, definite su X x Y e Y x Z
trovarne una terza T su X x Z, con assiomi:

$$T = P \circ Q$$

$$p1) \quad \{P \circ Q\}^T = Q^T \circ P^T$$

$$p2) \quad \{P \circ Q\} \circ R = P \circ \{Q \circ R\}$$

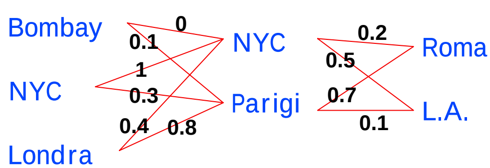
non richiesto $\quad P \circ Q = Q \circ P$

implementazione $\quad T(x,z) = \operatorname{proj}_{y \in Y}[\{R(x,y) \wedge Q(y,z)\}]$

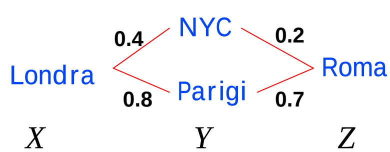
Composizione MaxMin R•R

Se l'intersezione $\wedge \rightarrow \min$ e $\operatorname{proj} \rightarrow \max$,

$$T(x,z) = \max_{y \in Y}[\min\{P(x,y), Q(y,z)\}]$$



Si procede per riga/col
come nel prodotto matr
Anche la regola per le c
di P e Q è la stessa



$$\min(0.4, 0.2) = 0.2$$

$$\min(0.8, 0.7) = 0.7$$

$$\max(0.2, 0.7) = \boxed{0.7}$$

Composizione Fset•R

Analogamente al prodotto Matrice x *Vettore,*
fornisce un vettore, cioè un Fset.
Passi:

1. *estensione cilindrica del Fset* $FF = \text{cyl}(F(x)\downarrow X\text{x}Y)$
2. *composizione*

$$T(x,z) = \operatorname*{proj}_{y\in Y}\left[\{R(x,y) \wedge FF(y,z)\}\right]$$

3. *proiezione di T* $\text{proj}(T\downarrow Z)$

Sono alla base della costruzione di motori inferenziali

Si semplifica in:

$$T(z) = \max_{x\in Y}\left[\min\{F(x), R(x,z)\}\right] \qquad \text{MaxMin}$$

$$T(z) = \max_{x\in Y}\left[F(x)\cdot R(x,z)\right] \qquad \text{MaxProd}$$

Esempio di Composizione

Spesso si usa
la forma trasposta

conoscenza

fatto

deduzione

					Dario è un po' più alto di Pino				
		185	0.00	0.10	0.4	0.7	1	0.7	0.4
		182.5	0.10	0.4	0.7	1	0.7	0.4	0.1
		180	0.4	0.7	1	0.7	0.4	0.1	0
	Y	177.5	0.7	1	0.7	0.4	0.1	0	0
		175	1	0.7	0.4	0.1	0	0	0
		172.5	0.7	0.4	0.1	0	0	0	0
		170	0.4	0.1	0	0	0	0	0
			170	172.5	175	177.5	180	182.5	185
						X			
			0	0.1	0.4	0.7	1	0.8	0.7
						Pino è alto			
Dario è …				min-->					
1			0	0.1	0.4	0.7	1	0.7	0.4
0.7		=max	0	0.1	0.4	0.7	0.7	0.4	0.1
0.7			0	0.1	0.4	0.7	0.4	0.1	0
0.4			0	0.1	0.4	0.4	0.1	0	0
0.4			0	0.1	0.4	0.1	0	0	0
0.1			0	0.1	0.1	0	0	0	0
0.1			0	0.1	0	0	0	0	0

Singleton

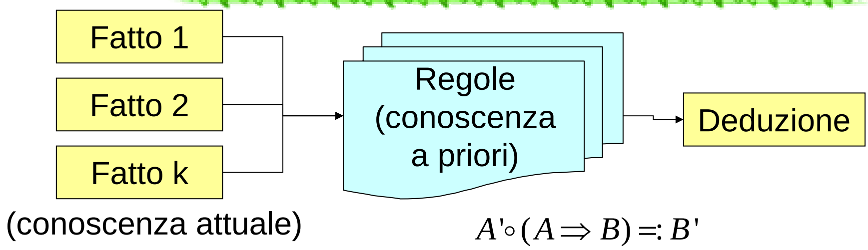
Un Fset con un solo elemento diverso da zero, pari a 1:
= Conoscenza certa
➔ Forti semplificazioni nella composizione

									0.4
									0.1
									0
									0
									0
		172.5	0.7	0.4	0.1	0	0	0	0
		170	0.4	0.1	0	0	0	0	0
			170	172.5	175	177.5	180	182.5	185
						x			
			0	0	0	1	0	0	0
Dario è ...				min-->					
0.7			0	0	0	0.7	0	0	0
1			0	0	0	1	0	0	0
0.7	=max		0	0	0	0.7	0	0	0
0.4			0	0	0	0.4	0	0	0
0.1			0	0	0	0.1	0	0	0
0			0	0	0	0	0	0	0
0			0	0	0	0	0	0	0

Ragionamento Fuzzy

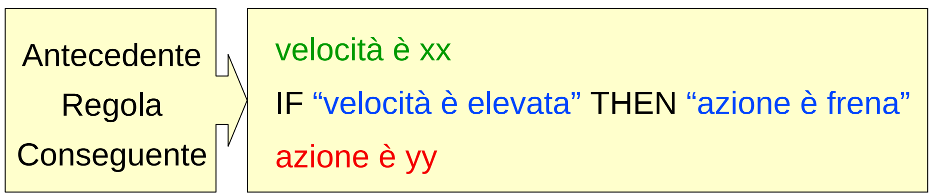
Regole
Inferenze
Approcci:
a) logico
b) Generalizzato
Impieghi nei controlli

Sistemi basati su regole



$$A' \circ (A \Rightarrow B) =: B'$$

(modus ponens)



Interpretazioni di A ➔ B

- Continuiamo l'esempio
  - Velocità alta ➔ frena
  - Velocità molto alta ➔ frena molto ? sì/no
  - Velocità non alta ➔ non frenare ? sì/no
- Basandoci sulla logica: NO,
  non sappiamo cosa fare, ci vogliono altre regole
- Il "modus ponens generalizzato" (GMP) ammette le estensioni di cui sopra ed è molto usato
  - Consente di ridurre il numero di regole
  - È (sembra) più aderente al ragionamento quotidiano
  - È molto meno ben posto matematicamente

Approccio logic-based

- $A \Rightarrow B$ equiv. *Not(A)* ∪ *B*
- Tre problemi:

1. costruire la relazione *R* dalla regola in modo che soddisfi il *modus ponens* [a' • (a⇒b) = b']
2. come gestire più regole
3. qual è il valore di *b'* se *a'* non è esattamente *a*

- La soluzione viene dalla teoria delle equazioni fuzzy, imponendo *b'=b* quando *a'=a* e cercando la soluzione massima (include le altre)

Risultati

Se l'inferenza è: *R* (i.e. *A*⇒*B*) va costruita come:

MaxMin

$$T(z) = \max_{x \in X} \left[\min\left(A'(x), R(x,z) \right) \right]$$

Goedel

$$\begin{cases} 1 \ \text{ if } \ A(x) \le B(z) \\ \text{else} \quad B(z) \end{cases}$$

Max BS

$$T(z) = \max_{x \in X} \left[\max\left(0, A'(x) + R(x,z) - 1\right) \right]$$

Lukasiewicz

$$\min\left(1, 1 + B(z) - A(x)\right)$$

MaxProd

$$T(z) = \max_{x \in X} \left[A'(x) \cdot R(x,z) \right]$$

Goguen

$$\begin{cases} 1 \ \text{ if } \ A(x) = 0 \\ \text{else} \quad \min\left(1, B(z) / A(x)\right) \end{cases}$$

Proprietà della soluzione MaxMin

- 1 - Interessante notare che

$$\text{se } A(x) = 0\ \forall x,\ \text{allora } R(x,y) = 1\ \forall x, y$$

quindi ritornerà la massima indeterminatezza

- 2 - $\text{se } A'(x) \subset A(x)\ \forall x,\ \text{allora } b'(z) = b(z)$

se l'antecedente è più specifico, il conseguente mantiene il grado di incertezza iniziale

- 3 – in generale però $\text{se } A''(x) \subset A'(x)\ \forall x,\ \text{allora } b''(z) \subseteq b'(z)$ con il vincolo 2.

- 4 – Inoltre $\text{se } A'(x) \neq A(x),\ \text{allora } b'(z) \supset b(z)$
In generale se l'antecedente non coincide, l'uscita è più incerta

- 5 – La massima indeterminatezza è 1 costante

Composizione di più regole

- Abbiamo più regole $a' \bullet (a_k \Rightarrow b_k) = b'_k$ con gli stessi antecedenti
- Dobbiamo ricavare il fuzzy set b'
- Essendo la massima indeterminatezza = 1,
è ovvio che si dovrà porre

$$b'(z) = \min[b'_k(x)]$$

n.b. ci sono dimostrazioni vere
rem: valido per MaxMin

- Secondo alcuni autori, sarebbe possibile utilizzare l'intersezione delle regole

$$b'(z) = a' \circ \left[\cap_k \left(a_k \Rightarrow b_k \right) \right]$$

L'approccio GMP

- L'approccio è piuttosto euristico e si basa più sulla "soddisfazione dell'utente" che su basi matematiche
- Si cerca un legame "più forte" tra antecedenti e conseguente, quasi funzionale
- Diversi autori hanno analizzato possibili metodi per rappresentare le regole e le inferenze in relazione al tipo di generalizzazione effettuata
  (vedi Masaharu Mitsumoto, "Extended Fuzzy Reasoning" in Approx. Reasoning in Exp. Syst., ed. Gupta, Elsevier 85)

L'approccio tipico

- La composizione è quasi sempre MaxMin, a volte MaxProd
- I risultati intermedi b_k sono accorpati con l'operatore Max
- Esempi di costruzione di $R(x,z)$

$$R_m(x,z) = \min\big(a(x), b(z)\big)$$

Prima si fanno le estensioni cilindriche poi l'intersezione

$$R_g(x,z) = \begin{cases} 1 \text{ if } & B(z) \le A(x) \\ \text{else} & A(x) \end{cases}$$

$$R_{gg}(x,z) = \big(a \xrightarrow{g} b\big) \cap \big(\bar{a} \xrightarrow{g} \bar{b}\big)$$

È l'unica che estende il calcolo per $\text{not}(a)$ poco usata

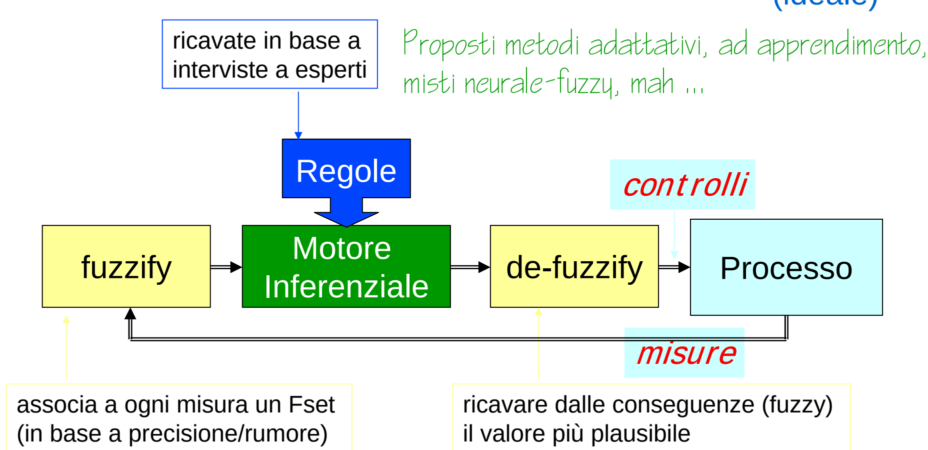
Le regole dovrebbero essere:

- Complete
  - l'insieme delle regole deve ricoprire "a sufficienza" le possibili situazioni
- Non contraddittorie
  - regole con antecedenti simili o adiacenti non dovrebbero dare uscite molto diverse tra di loro

- Esistono metodi formali per la verifica delle condizioni

Un sistema di controllo fuzzy

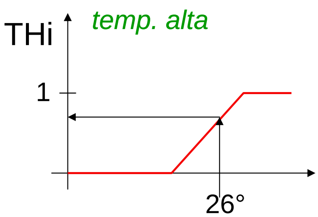
(ideale)

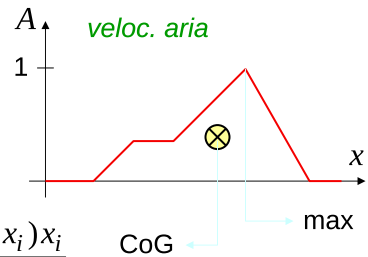


Osservazioni

Le misure si assumono esatte, quindi singletons
L'incertezza è solo nelle regole fornite dall'esperto
I metodi semplificati possono essere rappresentati graficamente

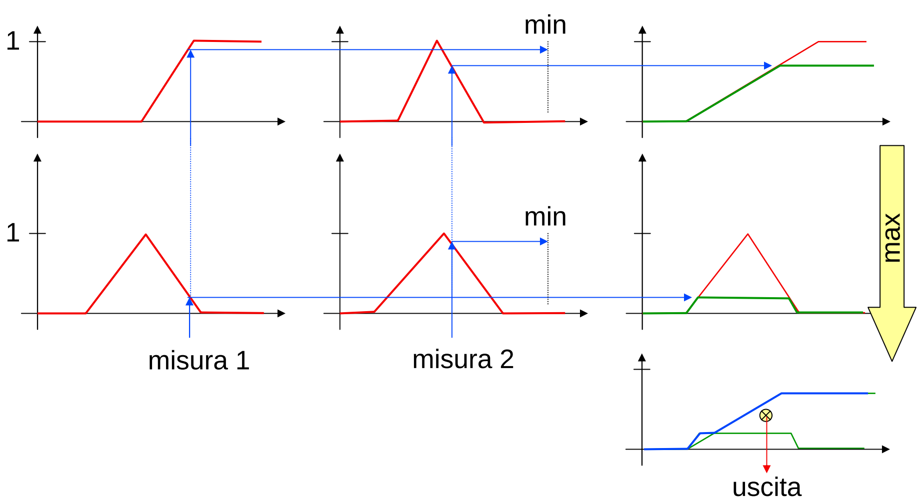
Fuzzificazione / **Defuzzificazione**





$$x_{CoG} = \frac{\sum A(x_i)x_i}{\sum A(x_i)}$$

Visualizzazione intuitiva



Un carrello automatico

regole semplificate

xx rispetto a traiettoria di riferim.	yy rispetto a velocità di riferim.	azione su sterzo	azione su acceleratore
poco a destra	elevata	un po' a sn.	rallenta
molto a destra	elevata	molto a sn.	frena
poco a destra	normale	un po' a sn.	continua
corretto	normale	nulla	continua
corretto	bassa	nulla	accelera

Applicazioni

- 1974 Motore a vapore
- 1977 Cementifici
- 1980 Depuratori
- 1984 Gru per container
- 1984 Parcheggio
- 1985 Treno di metropolitana
- 1988? Elicottero
- >1990 Lavatrici, Telecamere, Aspirapolvere, Condizionatori, Robotica mobile, Sistemi per auto, …
- *In genere, sistemi con modelli mal definiti o per cui non è facile definire le leggi di controllo, ma che si controllano manualmente. Mancano gli strumenti di progetto (stabilità, tipo di risposta, ecc.)*

Conclusioni?

- L'ibridazione sistemi differenziali – sistemi basati su regole rende difficile l'applicazione anche di criteri di stabilità
  - tentativi: Lyapunov, Criterio del cerchio, analisi sul piano delle fasi. Comunque non si hanno indicazioni per risolvere eventuali problemi.
- Il sistema di controllo risulta non lineare, problemi con le specifiche
- Viceversa, se il modello dinamico non è disponibile o è particolarmente complesso e incerto, si avrebbero le stesse difficoltà anche con gli approcci tradizionali
- Sono i casi in cui il controllo fuzzy è una possibile strada