- **La stabilità alla Lyapunov dei sistemi**
  - Semplice
  - Asintotica
  - Esponenziale
  - Locale
  - Globale

- **La stabilità dei sistemi linearizzati**

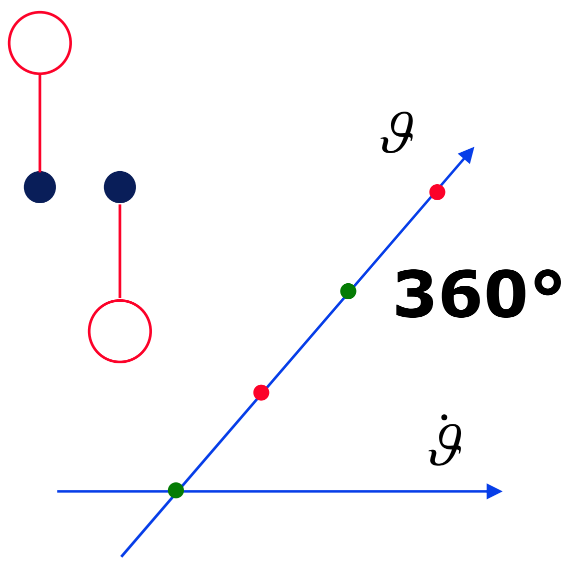
- **Stabilità input-output (BIBO)**
  - Risposta impulsiva
    - **(vedi Marro par. 2.3, vedi Vitelli-Petternella par. III.1, vedi es. in LabView)**
  - Poli sull'asse immaginario

- Per un Sistema NL non si parla di stabilità del "Sistema" (non è un concetto globale).

- Il pendolo ha due punti di equilibrio (PDEq)

- Per i satelliti esistono solo alcune orbite geostazionarie (traiettorie stabili e non punti)

- La stabilità può dipendere (i.e., in generale dipende) dall'ingresso.



$$\dot{x} = x \cdot u$$

$u = 0$ **=> Infiniti punti di equilibrio**

$u < 0,\ x = 0$ **è PDEq stabile**

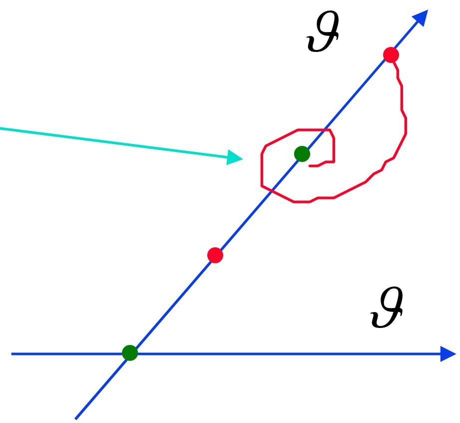
$u > 0,\ x = 0$ **è PDEq instabile**

- **Sistema Autonomo: Ingresso := nullo** $\dot{x} = f(x)$

e.g.: sin(t)

- **Funzione di transizione dello stato:** $\varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) \Rightarrow x(t)$

- **Traiettoria: Insieme dei valori** $\{x(t)\}$**, (il tempo non appare)**



- **Moto: tempo & traiettoria** $\{t, x(t)\}$

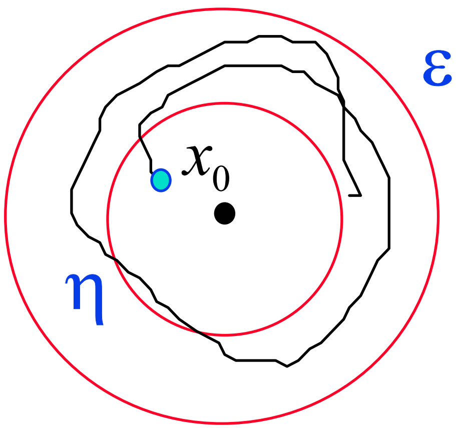
- **Moto periodico:** $x(t+nT)=x(t)$ **T=periodo del moto**

- **Punto di Equilibrio (PDEq),** $x_e : \varphi(t, t_0, x_e, u(\cdot)) = x_e \quad t>t_0$

- **Sistema autonomo** $\dot{x} = f(x)\,, \qquad x(0) = x_0$

x_e **stabile :=** $\forall \varepsilon, \exists \eta$: $\quad \|x_0 - x_e\| < \eta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon \;\; \forall t > 0$

comunque (piccolo) si scelga ε, esiste η



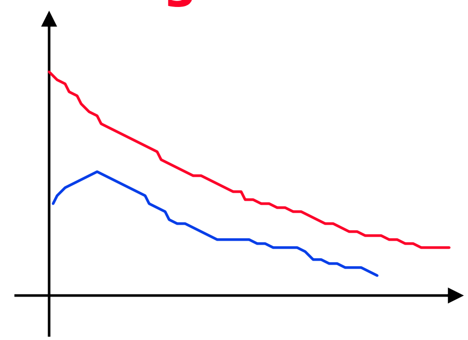
- **Se inoltre:** $\lim_{t \to \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$

stabilità asintotica di x_e.

- **Se poi vale** $\forall x_0 \in X$ **allora si parla di stabilità asintotica globale**
- **Infine, se**

$\exists \lambda$: $\quad \|x_0 - x_e\| < \eta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon e^{-\lambda t} \qquad \forall t > 0$

si ha stabilità esponenziale di x_e



2° METODO DI LYAPUNOV - DEFINIZIONI

Funz. definita positiva $f(x,t)$: $\forall t \geq 0,\ f(0,t) = 0,\ f(x,t) > 0$

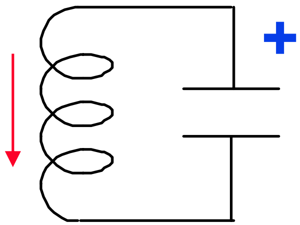
Funz. semidefinita positiva $\cdots f(x,t) \geq 0$

Esempi $\frac{1}{2}Mv^2;\ \frac{1}{2}Li^2;\quad x^T Q x = \sum_i \sum_j q_{ij} x_i x_j$

Funzione uniforme wrt $\lim_{\|x\| \to 0} f(x,t) = 0$, uniformemente $\forall t$

Funz. radialmente illimitata $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x,t) = \infty\ \forall t$

COME VARIA L'ENERGIA NEL TEMPO?



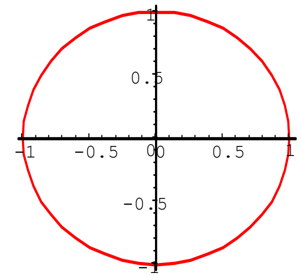
$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt} = v(t) \\ C\dfrac{dv}{dt} = -i(t) \end{cases}$$

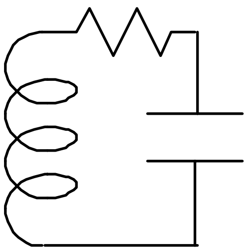
$$E = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cv^2$$

$$\frac{dE}{dt} = \sum \frac{\partial E}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial E}{\partial t} =$$

$$= Li \cdot \frac{v}{L} - Cv\frac{i}{C} = 0$$

v,i

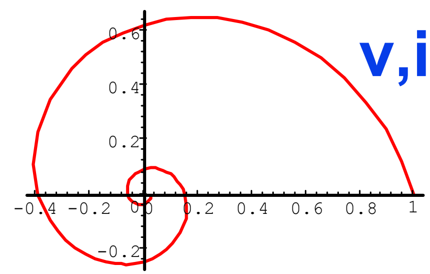




$$\frac{dE}{dt} = Li \cdot \left(\frac{v}{L} - \frac{Ri}{L}\right) - Cv\frac{i}{C} = -Ri^2 < 0$$

$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt} = v(t) - Ri(t) \\ C\dfrac{dv}{dt} = -i(t) \end{cases}$$

v,i



B(ε):= sfera $\|x(t) - x_e\| < \varepsilon$ **Se** $\exists\, V(x,t)$, continua, V è d.p. e *in* $B(\varepsilon)$

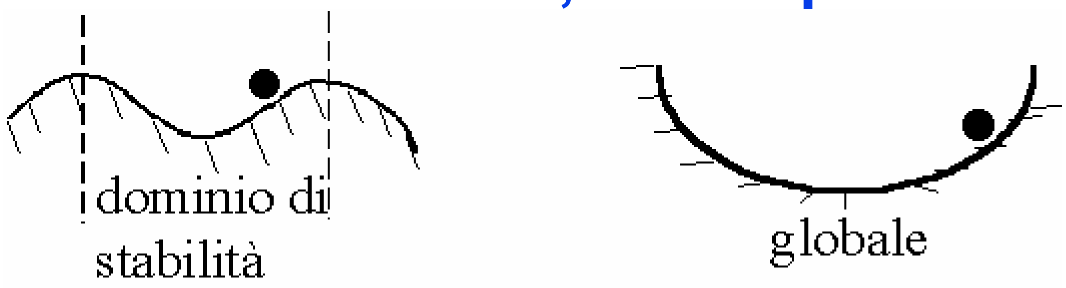
$\dot{V}$ è s.d.n **il punto x_e è (almeno) localmente stabile**

$\dot{V}$ è d.n **il punto x_e è localmente asintoticamente stabile**

$\lim_{\|x\| \to \infty} V(x) = \infty$ **il punto x_e è globalmente stabile per il sistema**

(radialmente illimitata)

Se non si riesce a trovare V, non si può dedurre nulla



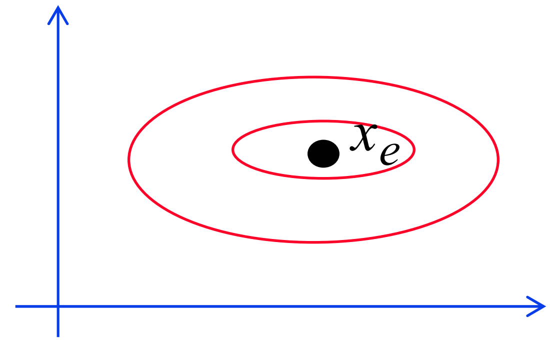
DIMOSTRAZIONE

w.l.o.g, N=2

Linee di livello di V(x): $L_k = \{x: V(x)=k\}$

sono chiuse (almeno vicino a x_e) perchè V(x) continua e $V(x_e)= 0$

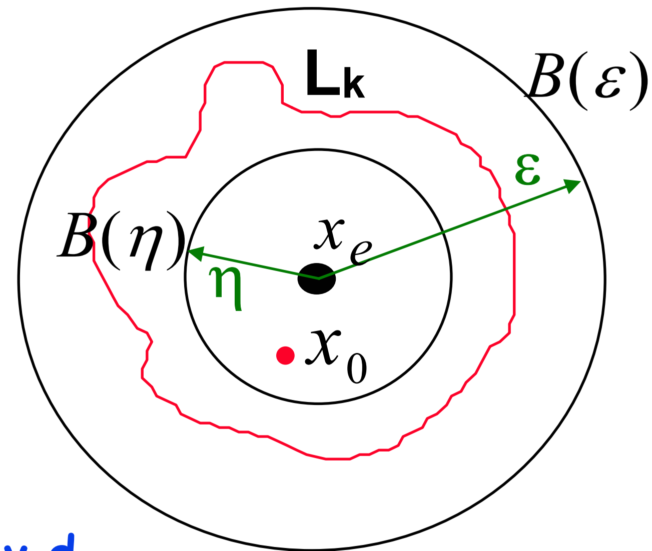
sono "annidate"



seguendo la definizione:

$$\forall \varepsilon \quad \text{esiste} \quad k: L_k \subset B(\varepsilon)$$

$$\forall L_k \quad \text{esiste} \quad \eta: B(\eta) \subset L_k$$



$$\dot{V}(x) \le 0 \Rightarrow V(x(t)) \text{ è non crescente}$$

= lo stato non esce dalla L_k

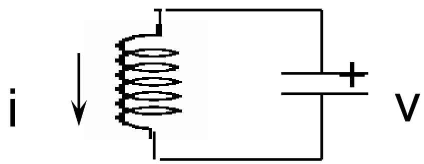
$$\Rightarrow x(t) \in B(\varepsilon) \quad \forall t > 0$$

quindi: $\|x_0 - x_e\| < \eta \quad \Rightarrow \quad \|x(t) - x_e\| < \varepsilon \quad \forall t > 0$

c.v.d.

Stabilità di un punto di equilibrio

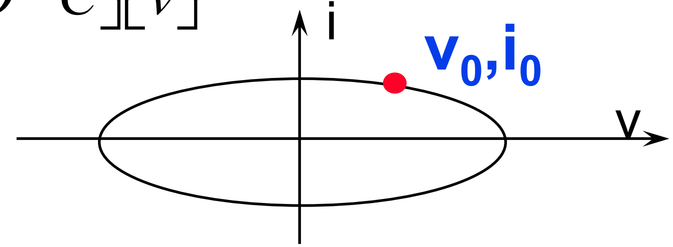
Esempio



$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt} = v \\ C\dfrac{dv}{dt} = -i \end{cases}$$

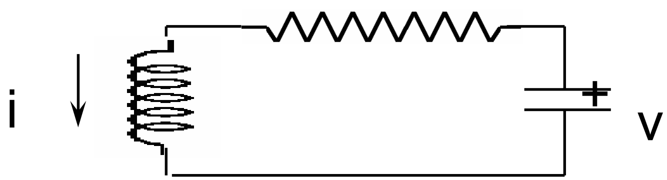
$$E = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cv^2 = \\ = \frac{1}{2}[i, v]\begin{bmatrix} L & O \\ O & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix}$$

Come varia nel tempo?

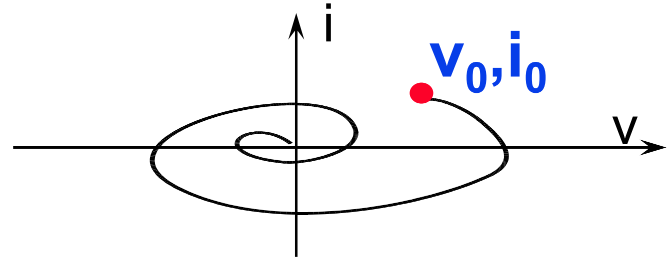


$$\dot{E} = \frac{dE}{dt} = \sum \frac{\partial E}{\partial X_i} \frac{dX_i}{dt} = Li \cdot \frac{v}{L} - Cv\frac{i}{C} = 0$$

s.d.n. $\Rightarrow$ stabilità semplice



$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt} = v - Ri \\ C\dfrac{dv}{dt} = -i \end{cases}$$



$$\dot{E} = Li \cdot \left(\frac{v}{L} - \frac{Ri}{L}\right) - Cv\frac{i}{C} = -Ri^2 < 0 \quad i \neq 0$$

è s.d.n. in quanto vale zero anche con $v \neq 0,\ i = 0 \Rightarrow$ stabilità semplice

Hp: $V(x)\, d.p.$

$\dot{V}(x) \leq 0$

$\exists h: \quad \dot{V}(x) \leq -hV(x) \quad \forall x \in B(\varepsilon)$

dimostrazione

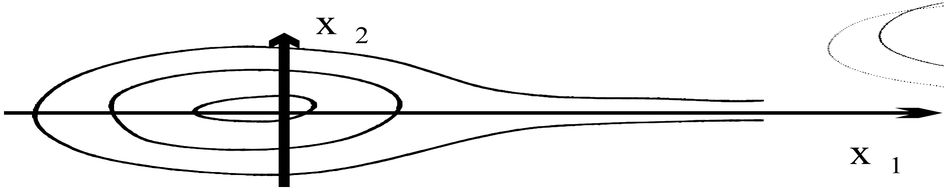
$$V[x(t)] \leq e^{-h(t-t_0)} \quad V[x(t_0)] \leq k_0{}^{-h(t-t_0)}$$

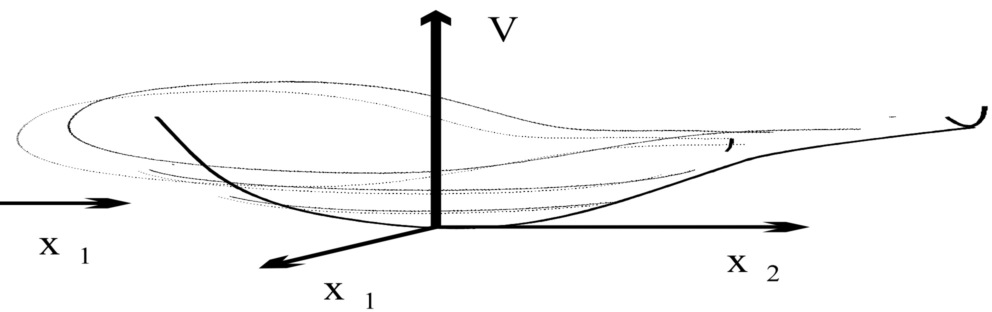
$$\lim_{t\to\infty} V[x(t)] = 0 \quad \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

<u>Stabilita' esponenziale globale</u>

Hp: $V(x)$ Radialmente illimitata

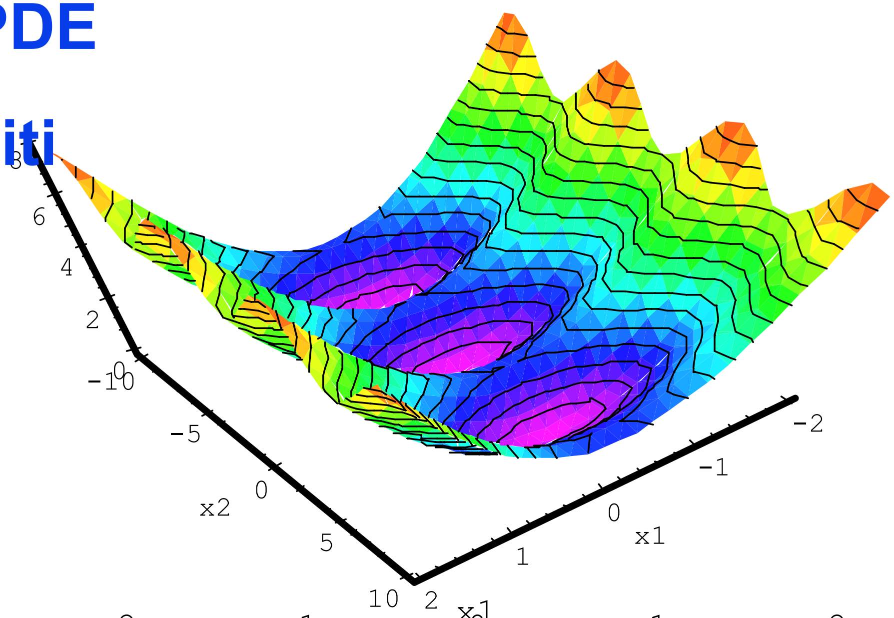
(Garantisce che le curve di livello siar





Un sistema NL ha in generale più PDE

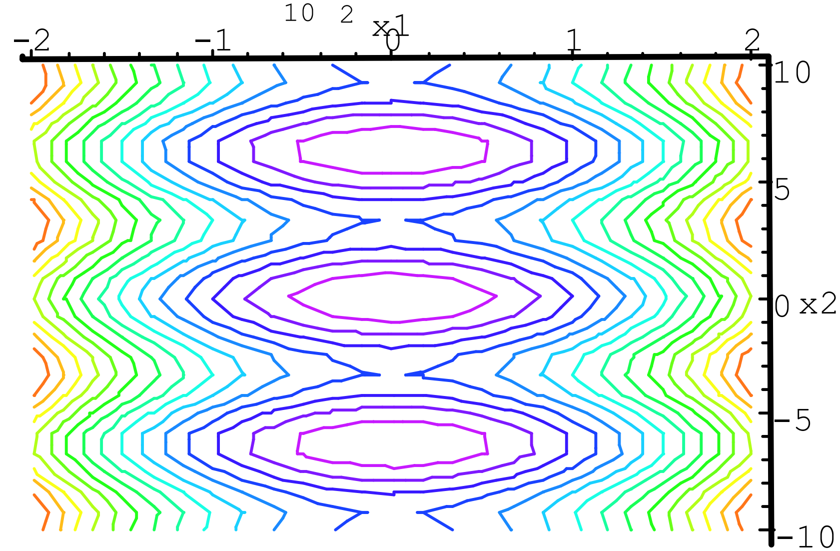
In particolare il pendolo ne ha infiniti



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{MgL}{ML^2} \cdot \sin x_1 = -\dfrac{g}{L} \sin x_1 \end{cases} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} \vartheta \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$V(x) = T + U = 0.5 \cdot ML^2 x_2^2 + \\ + MgL(1 - \cos x_1)$$

T+U



$$\dot{V}(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} ML^2 x_2 \dot{x}_2 + (MgL) x_2 \sin x_1 =$$

$$= ML^2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 - \left(ML^2 \dot{x}_2\right) \dot{x}_1 = 0$$

s.d.n. !

(Stabilita' non asintotica)

- **La stabilità asintotica dell'origine del sistema linearizzato (tutti gli autovalori dello Jacobiano sono a parte reale negativa) implica la stabilità asintotica locale dello stato x_e del sistema originario.**

- **Se il sistema linearizzato è instabile (almeno un autovalore dello Jacobiano ha parte reale positiva) allora, nel sistema originario, lo stato x_e è instabile**

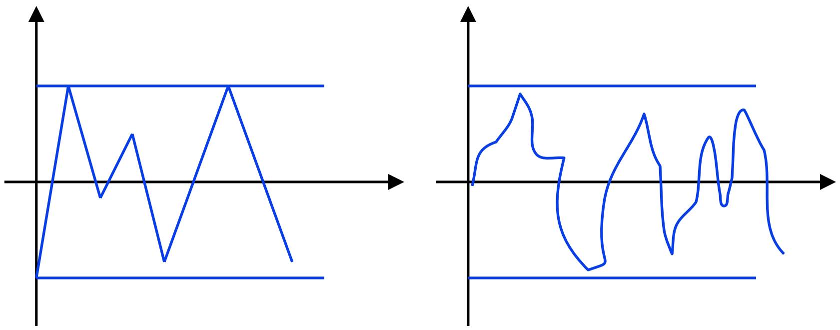
- **Se lo Jacobiano non ha autovalori con parte reale positiva ma ha qualche autovalore con parte reale nulla (il sistema linearizzato può essere stabile ma non asintoticamente), allora nulla si può dire sulla stabilità dello stato x_e del sistema originario (caso critico)**

BIBO: "Bounded Input Bounded Output" detta anche
ILUL: " Ingresso Limitato Uscita Limitata"

dato un sistema a riposo per il quale valga y(t)=0 per u(t)=0,

Si ha stabilità BIBO se applicando un ingresso limitato $|u(t)| < M_u$,

l'uscita y(t) rimane limitata $|y(t)| < M_y$



CNES: $\int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau \leq M < \infty$

Cioè la Risp. Impulsiva è sommabile

Dim: $$|y(t)| = \left| \int_0^t u(\tau) g(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |u(\tau)| |g(t-\tau)| d\tau \leq M_u \int_0^{\infty} |g(t-\tau)| d\tau$$

Dalla definizione

$$\left|G(s)\right| = \left|\int_0^{\infty} g(t)e^{-st}dt\right| \le \int_0^{\infty} \left|g(t)\right|\left|e^{-st}\right|dt$$

Consideriamo s nel semipiano destro:
Re[s]≥0 in modo che sia

$$\left|e^{-st}\right| = \left|e^{-\sigma t}\right| \le 1$$

allora

$$\left|G(s)\right| \le \int_0^{\infty} \left|g(t)\right|dt$$

(quando Re[s]>0)

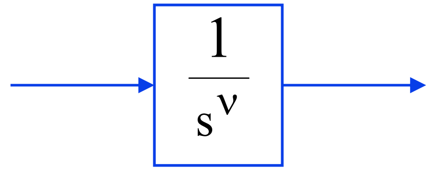
Quindi g(t) non può essere sommabile se G(s) ha poli nel semipiano destro (sarebbe possibile porre s=polo perche' |G(s)| $\rightarrow \infty$

$\Rightarrow$ La stabilità richiede che G(s) abbia solo poli p.r.n.

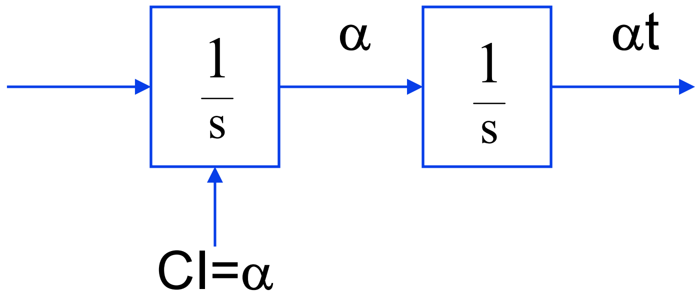
(vedi Marro pag.231 per la sufficienza)

E se ci sono poli : Re[p]=0 ?

Consideriamo un caso semplicissimo



Osserviamo:

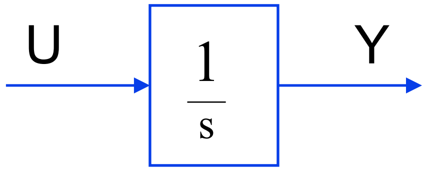


Transitorio divergente

Σ instabile

ν =1

“integratore”

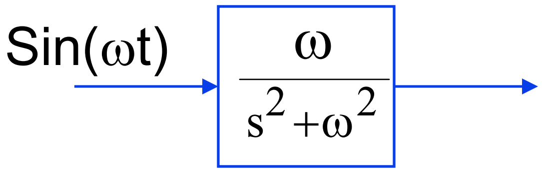


U: limitato e a valor medio nullo $\rightarrow$ Y limitato

U contiene $\frac{\alpha}{s} \rightarrow \overline{U} = \alpha \rightarrow$ Y contiene αt

Quindi esiste un solo ingresso (il gradino) per cui l’uscita diverge
= Σ al limite di stabilita’

<u>Osservazione</u>:



Risonanza !!!!