Linearizzazione

- Linearizzazione di un sistema intorno ad un punto di lavoro
- Esempi di sistemi nonlineari:
    - svuotamento di un serbatoio
    - il pendolo

Si opera attorno ad un punto di equilibrio.

Per modelli nello stato:

$$\dot{x} = f(x,u)$$

Equilibrio: calcolare $x_0, u_0 \colon\; f(x_0, u_0) = 0$

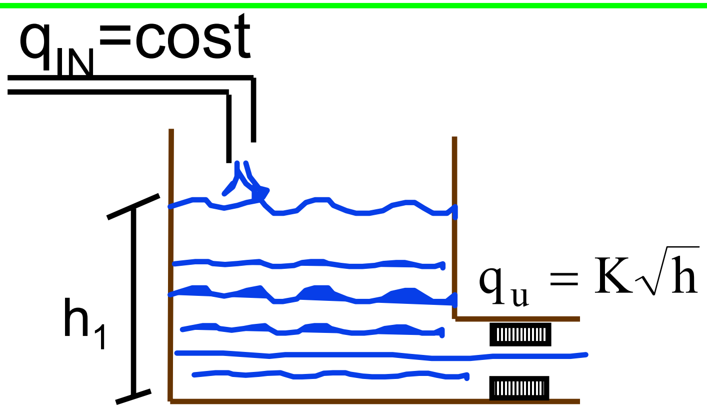
variazioni $\quad x = x_0 + \Delta x,\;\; u = u_0 + \Delta u$

espansione in serie di Taylor → equazioni linearizzate

$$f(x,u) = \cancel{f(x_0,u_0)} + f_x(x_0,u_0)\Delta x + f_u(x_0,u_0)\Delta u$$

Se #(var. di stato) o #(ingressi) >1, f_x e f_u sono jacobiani

$$f_x = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{Bmatrix} \quad f_u = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial u_1} & & \dfrac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{Bmatrix}$$



Conservazione della massa

Adh	=	q_{IN} dt	-	$q_u$dt
accumulo		ingresso		uscita

da cui: $$A\dot{h} = q_{IN} - K\sqrt{h}$$

Equazione non lineare

Condizione di equilibrio

$$\dot{h} = 0 \Rightarrow q_{IN} = K\sqrt{h_{eq}}, \quad h_{eq} = (q_{IN}/K)^2$$

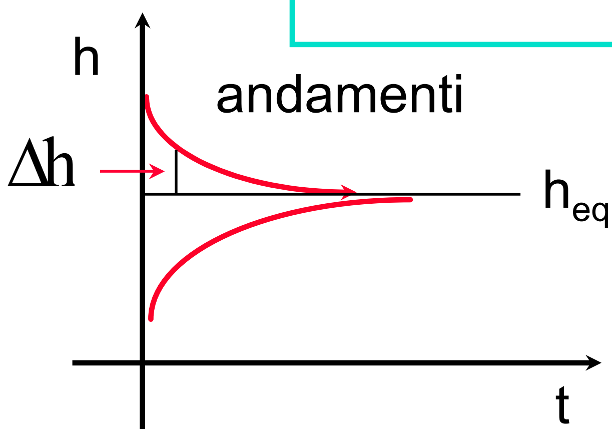
$$\Delta h = h - h_{eq}$$ piccolo !

$$A\Delta\dot{h} = \cancel{q_{in}} - \cancel{K\sqrt{h_{eq}}} - \frac{K}{2\sqrt{h_{eq}}}\Delta h$$

Equazione linearizzata per h ≅ h_{eq}

$$A\Delta\dot{h} = -\frac{K}{2\sqrt{h_{eq}}}\Delta h$$

$$\Delta\dot{h} = -K'\,\Delta h$$

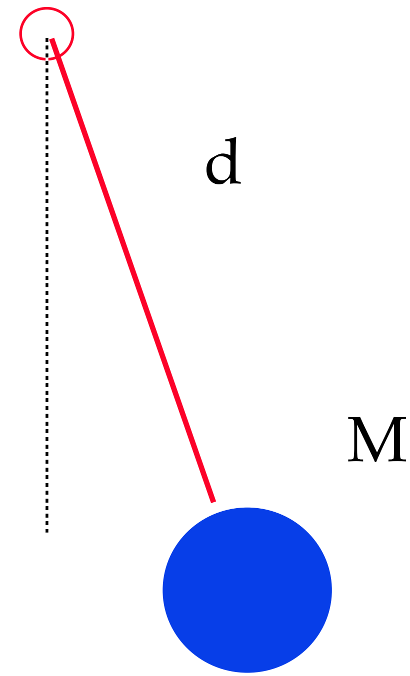


Le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = u_i$$

$$L = T - U$$

T **: en. cinetica**
U **: en. potenziale**



q_i: coord. Lagrangiane (posizioni)

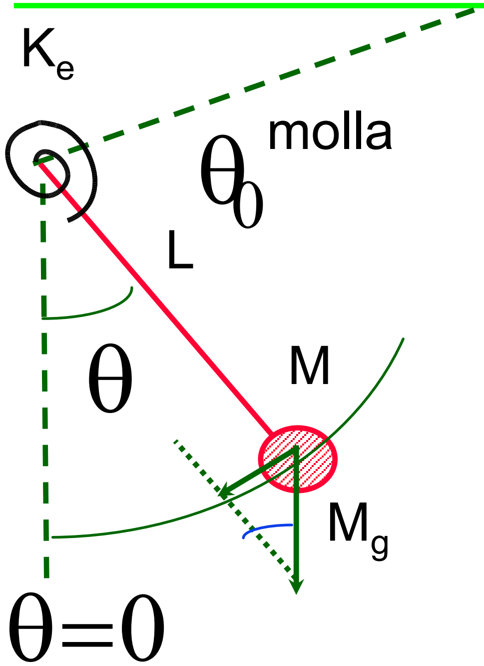
***q*:** angolo dalla verticale
u: coppia al fulcro

$$T = \frac{1}{2} I \dot{q}^2 \qquad U = U_0 - Mgd\cos(q)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}(I\dot{q}) = I\ddot{q}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q} = -Mgd\sin(q)$$

$$I\ddot{q} + Mgd\sin(q) = u(t)$$



Coppie
- molla $\tau_e = -K_e(\theta - \theta_0)$
- gravità $\tau_g = -M_g L \sin\theta$
- inerzia ML^2

bilanciamento delle coppie:

$$J\ddot{\theta} = -K_e(\theta - \theta_0) - MgL\sin\theta$$

equazione NON lineare

Condizione di equilibrio $\ddot{\theta} = 0, \quad \dot{\theta} = 0;$

si modifichi la posizione dell'estremità della molla per avere:

$$\theta_0:\ K_e(\theta_{eq} - \theta_0) + MgL\sin\theta_{eq} = 0$$

$$con\ \ \theta_{eq} = 30°$$

Linearizziamo $$J\ddot{\theta} = -K_e(\theta - \theta_0) - M_g L \sin\theta$$

$$\Delta\theta = \theta - \theta_{eq} \qquad \Delta\theta\text{: } piccolo$$

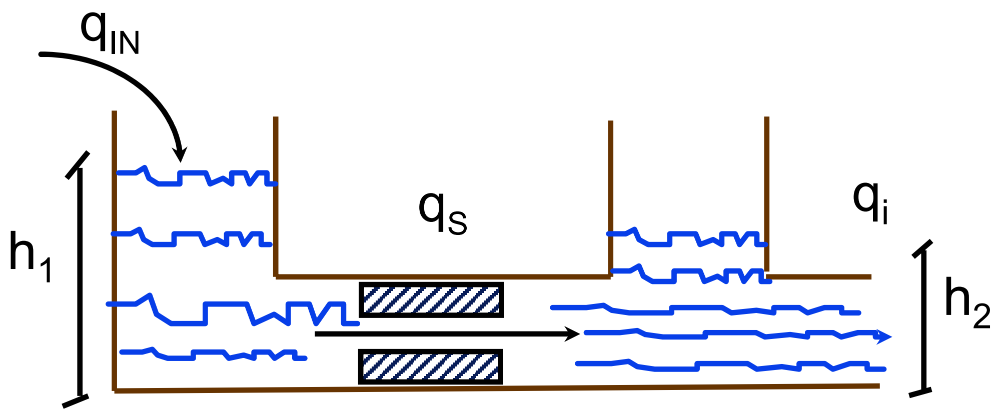
$$\Delta\ddot{\theta} = \ddot{\theta} = -\frac{1}{J}\left[K_e\left(\Delta\theta + \cancel{\theta_{eq}} - \cancel{\theta_0}\right) + MgL\left(\cancel{\sin\theta_{eq}} + \Delta\theta\cos\theta_{eq}\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{J}\left[K_e\Delta\theta + 0.866 MgL\Delta\theta\right]$$

Equazione linearizzata

$$\Delta\ddot{\theta} = -\frac{K_e + 0.866 M_g L}{J}\Delta\theta \quad con \quad \theta_{eq} = 30°$$

Trascuriamo (qui) le non linearità e l'inerzia del fluido



$$q_S = \frac{h_1 - h_2}{R}$$

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1 = \sum q_i = q_{IN} - \dfrac{h_1 - h_2}{R} \\ A \dot{h}_2 = \dfrac{h_1 - h_2}{R} - q_u \end{cases}$$