Il Criterio di Nyquist

(vedi Marro Par. 4.5 a 4.7 e 4.9

vedi Vitelli-Petternella Par. VIII.1, VIII.4

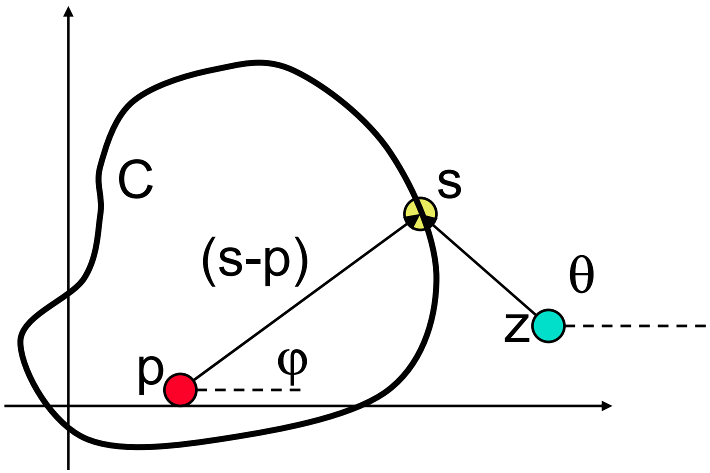
Num_Den9_n.vi realizzato con Labview)

- Come determinare la stabilità a ciclo chiuso dalle caratteristiche a ciclo aperto
- Si applica anche a Sistemi con FdT non razionale
- Consente di definire la “robustezza” di un sistema di controllo

Ip: $F(s)$: analitica, C: curva chiusa, s compie un giro su C, all'interno di C ci sono n poli e m zeri.

Th: $F(s)$ compie m-n giri nello stesso verso intorno all'origine .

Marro par. C4.3 dimostrazione completa



$$F(s) = K' \frac{s-z}{s-p} = K' \frac{r}{\rho} e^{j(\theta-\varphi)}$$

r e ρ non ci interessano

φ compie un giro,

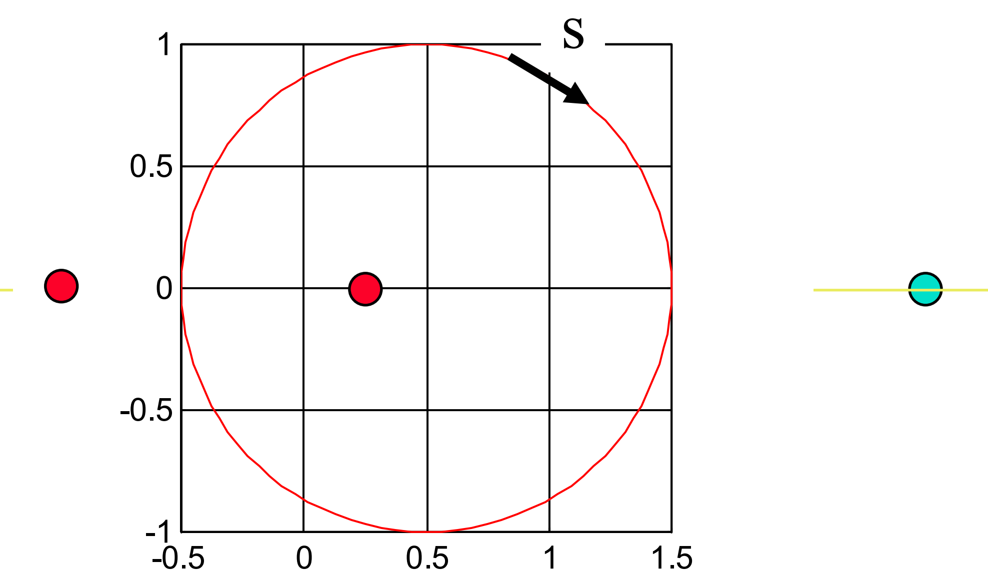
θ oscilla ma complessivamente non cambia

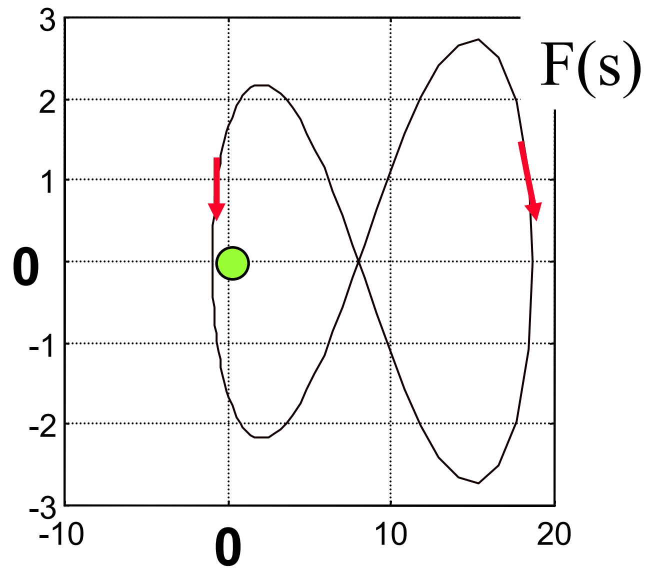
$$s - z = re^{j\theta}$$

$$s - p = \rho e^{j\varphi}$$

$$F(s) = 2\frac{s-3}{(s-0.25)(s+1)}$$

```
th=0:pi/50:2*pi;
j=sqrt(-1);
C=exp(j*th)+0.5;
figure(1)
plot(C,'r'); axis('square'), grid
figure(2)
plot(2*(C-3)./((C-0.25).*(C+1)),'b')
axis('square'), grid
```



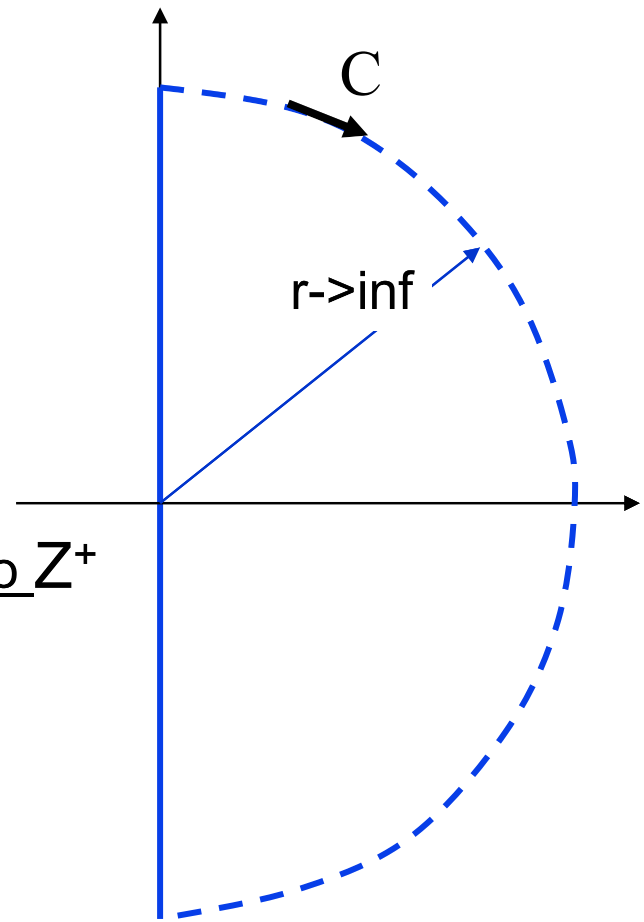


R: rotazioni orarie di F(s) attorno all'origine = -1

Quanti poli a parte reale positiva (p.r.p.)
ha la FdT a ciclo chiuso W(s)?

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + F(s)}; \quad F(s) = G(s)H(s)$$

Sono quanti gli zeri a p.r.p. del denominatore,
cioè di 1+F(s).



C: una curva chiusa che abbraccia tutto Z^+

Il criterio, dette R le rotazioni orarie di 1+F, dice

R = # zeri(1+F) - # poli(1+F) p.r.p.

Ma i poli di 1+F sono quelli di F (FdT ciclo aperto).

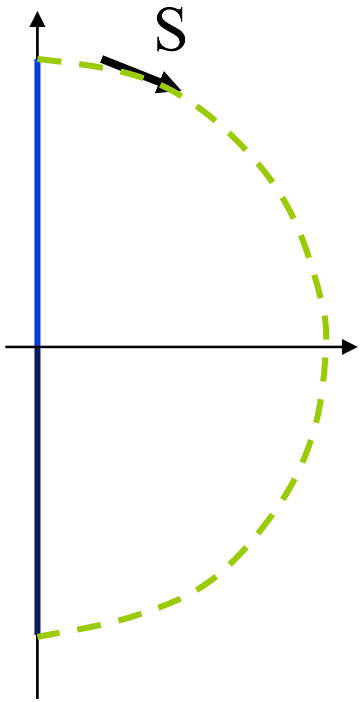
#poli(W) = #zeri(1+F) = #poli(1+F) + R = #poli(F) + R

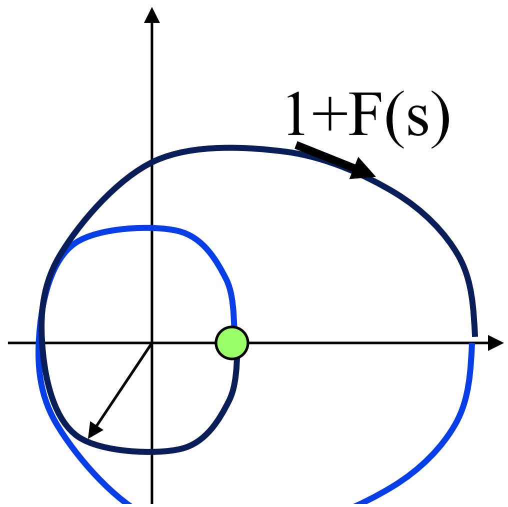
$\boxed{\#poli(W) = R + \#poli(F)}$

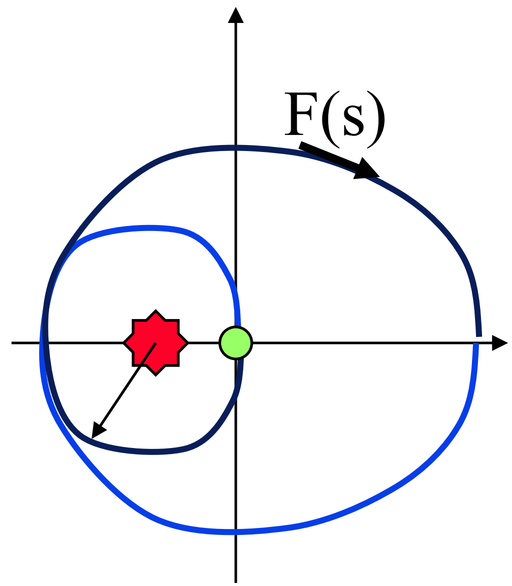
Stabilità di $W(s)$ ==> $\#poli(W)=0$ p.r.p.

$\boxed{R = -\#poli(F) \text{ p.r.p.}}$

R: rotazioni orarie di **1+F(s)** attorno alla **origine**
=rotazioni orarie di **F** attorno a **–1+j0**







F(s):
- *strettam. causale*
- *senza poli: Re[p]=0*

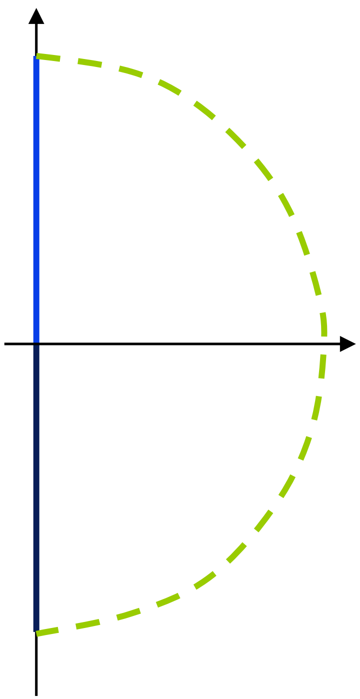
: [-1, j0]

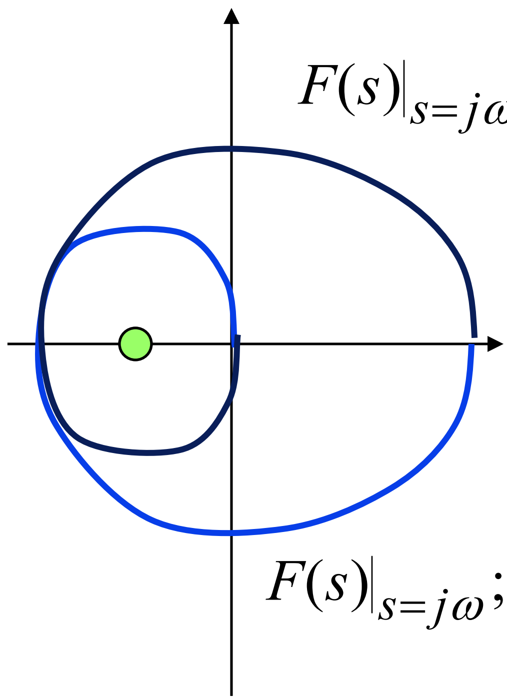
Ovviamente
se F(s) stabile
R=0
(criterio ridotto)

Di quale funzione facciamo il grafico?

F(s):

•*senza poli Re[p]=0*





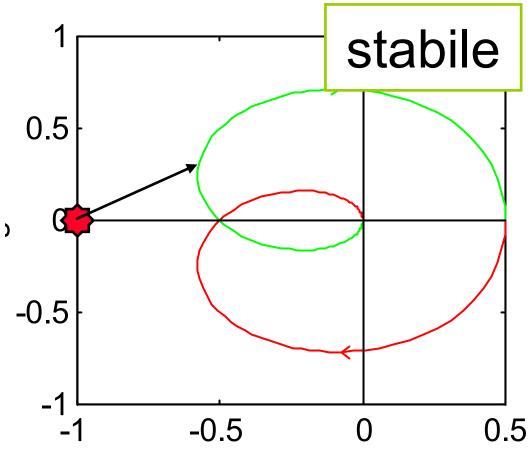
$$F(s)\big|_{s=j\omega};\omega=-\infty\cdots0$$

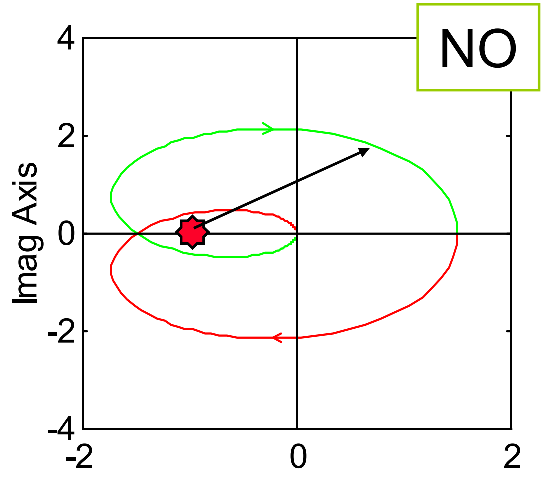
$$F(s)\big|_{s=j\omega};\omega=0\cdots+\infty$$

Se F(s) è stabile,
risp. armonica
a ciclo aperto
da -inf a +inf

per ω →∞, 2 casi: $\dfrac{b_m s^m}{a_n s^n},\begin{cases} m<n, |F(s)|=0 \\ m=n, |F(s)|=K, \Delta\varphi=0 \end{cases}$

(colori Matlab, diversi da precedenti)

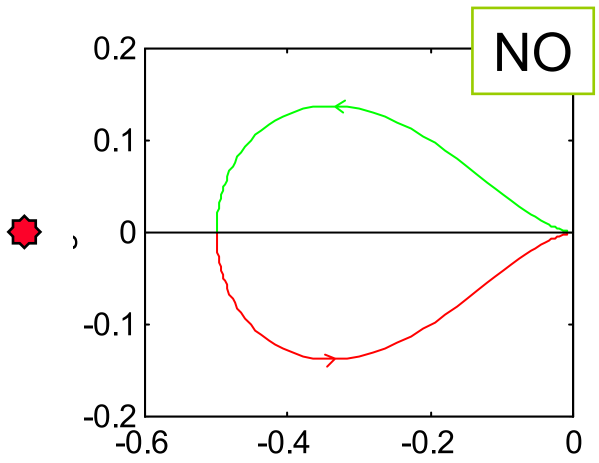


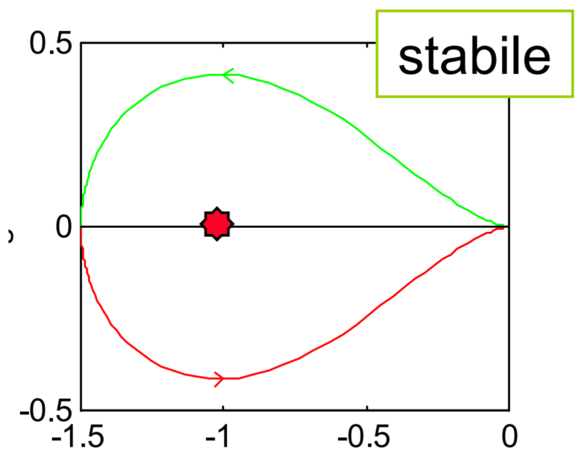



```
» n=[-1,1];
» d=[1, 1, 1];
» nyquist(n,d)
» nyquist(0.5*n,d)
» nyquist(1.5*n,d)
```

$$\frac{1-s}{s^2+s+1}$$

R = - #poli(F) p.r.p. = 0






```
» d=[1 1 -1];
» n=0.5;
» nyquist(n,d)
» n=1.5;
» nyquist(n,d)
```

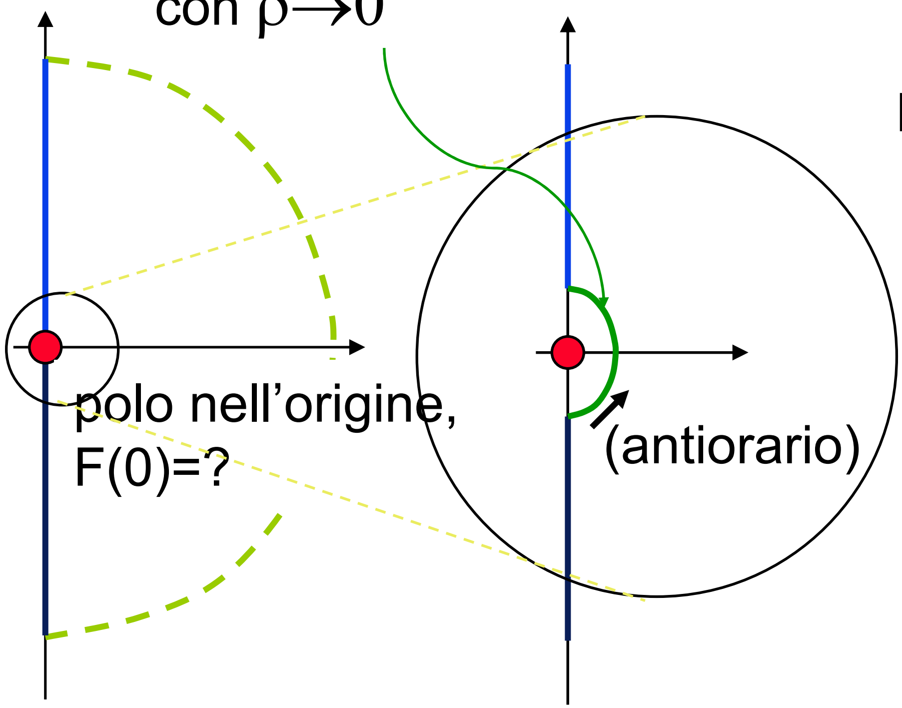
$$\frac{1}{s^2+s-1}$$

R = - #poli(F) p.r.p. = 1

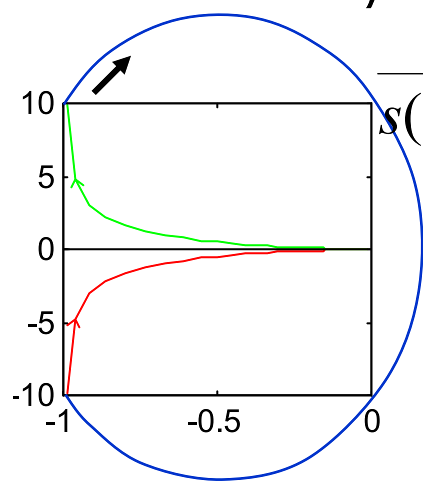
$$F(s) = \frac{2(s+1)}{s^{\upsilon}(s+4)}$$

“percorso uncinato” con $\rho \to 0$

per $s \approx 0$ $\qquad F(s) \approx \frac{0.5}{\rho^{\upsilon}} e^{-j\upsilon\varphi}$

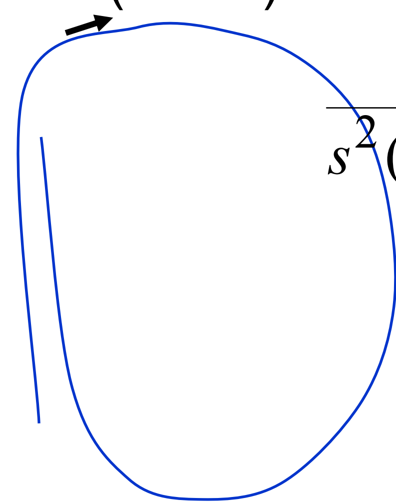


$$\frac{1}{s(s+1)}$$

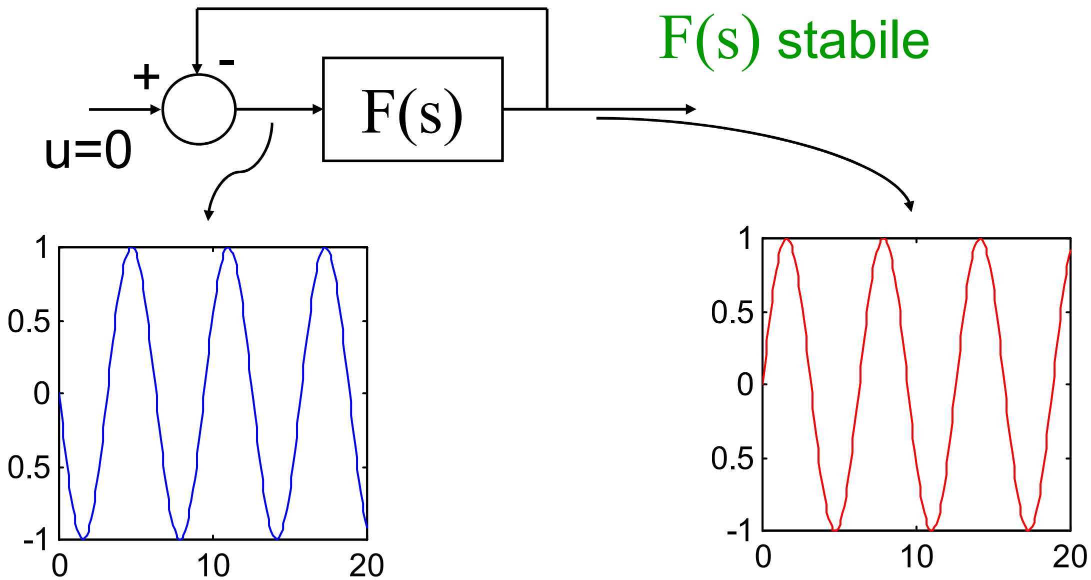


(orario)

$$\frac{1}{s^2(s+1)}$$



Lo stesso per coppie di poli immaginari

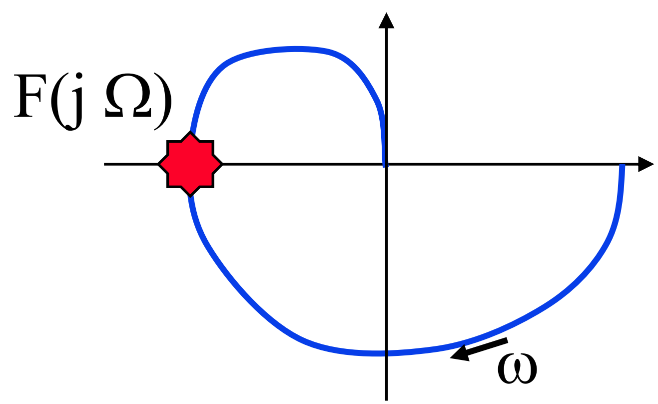


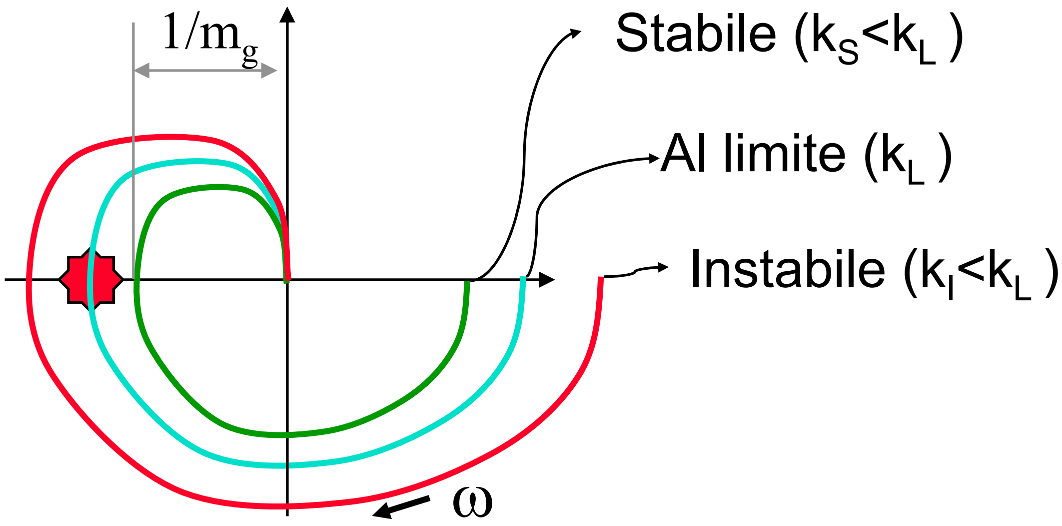
F(s) stabile

del criterio ridotto

- Sistema a controreazione sede di un'oscillazione stazionaria con pulsazione Ω.
- I segnali hanno le relazioni indicate, quindi $F(j\,\Omega) = -1$.
- L'oscillazione ha la pulsazione per cui $F(j\,\Omega) = -1$.

- Se il guadagno in catena diretta è maggiore, oscillazioni divergenti;
- se è minore, oscillazioni convergenti.

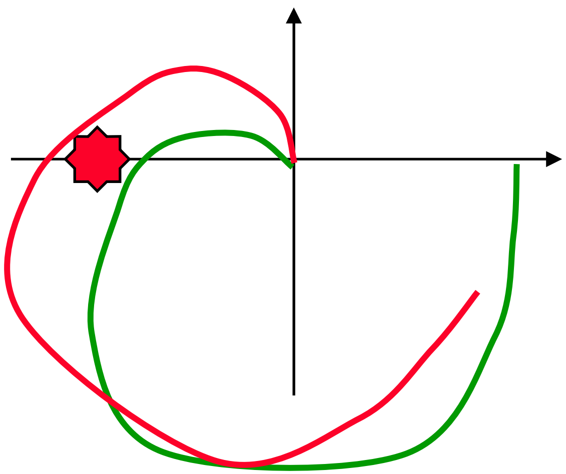




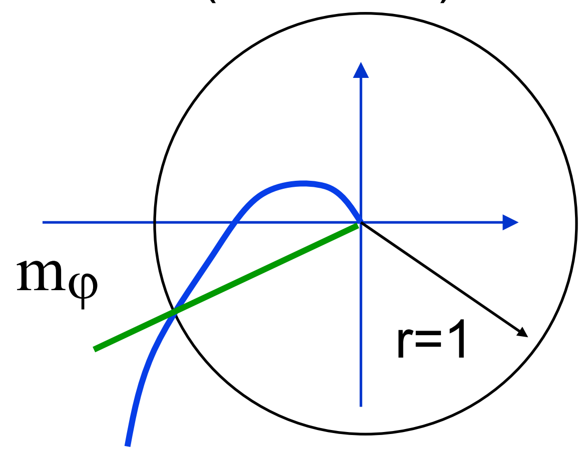
(solo criterio ridotto)

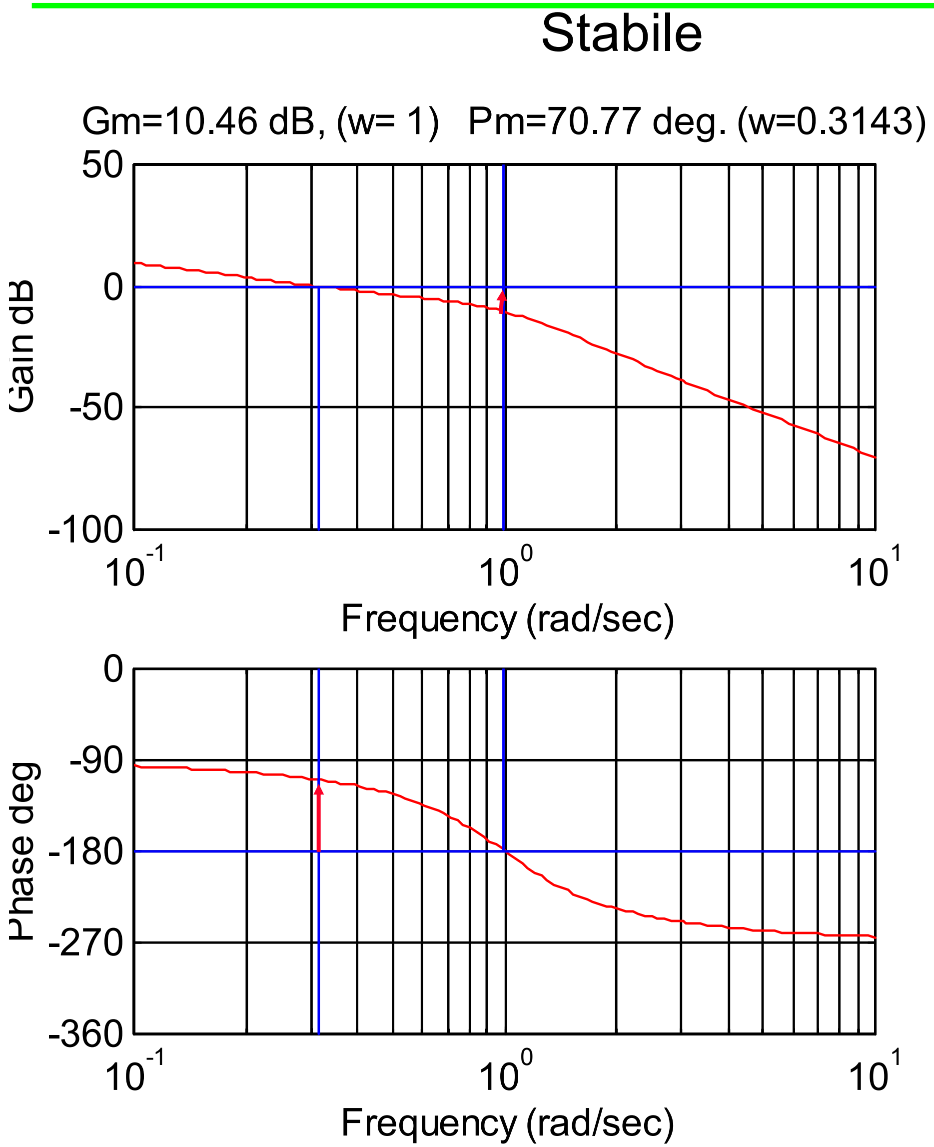
All'aumentare del guadagno un sistema generalmente diventa instabile.

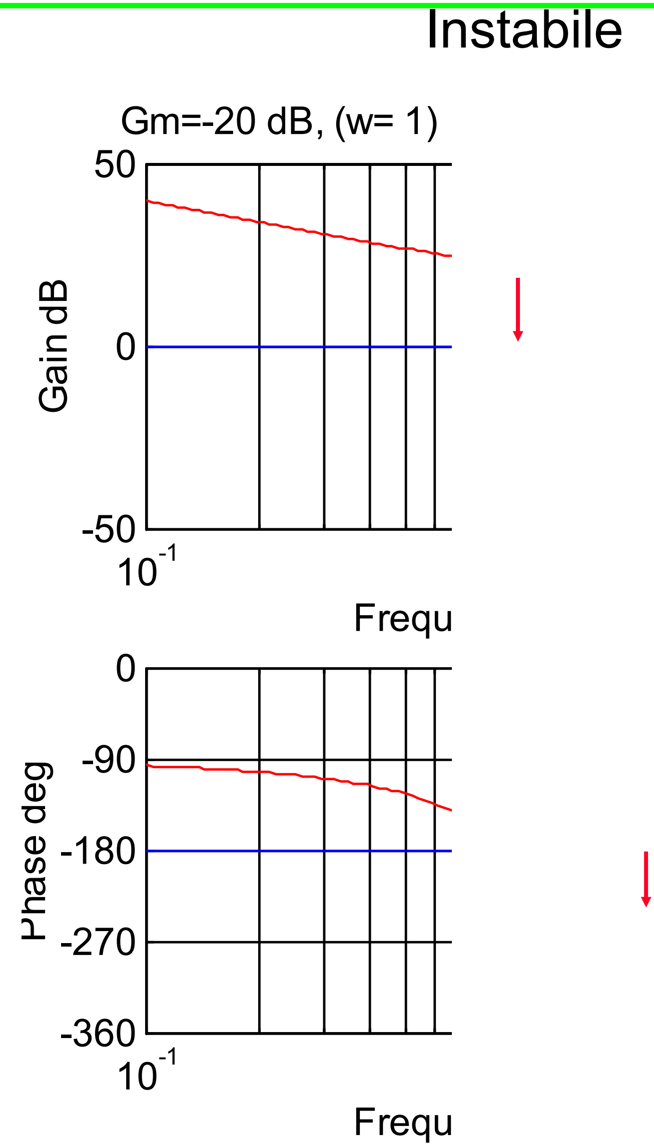
$$m_g = \frac{K_L}{K_S}$$



Anche uno sfasamento (rotazione) porta instabilità

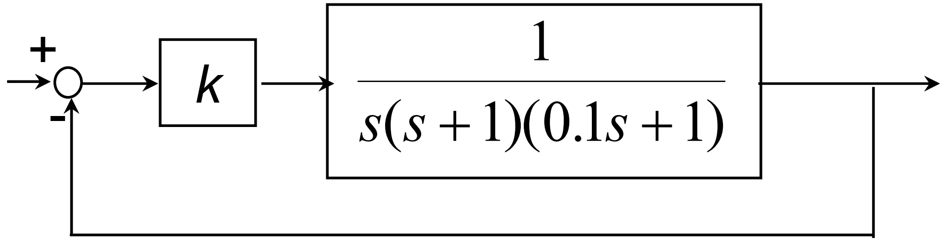






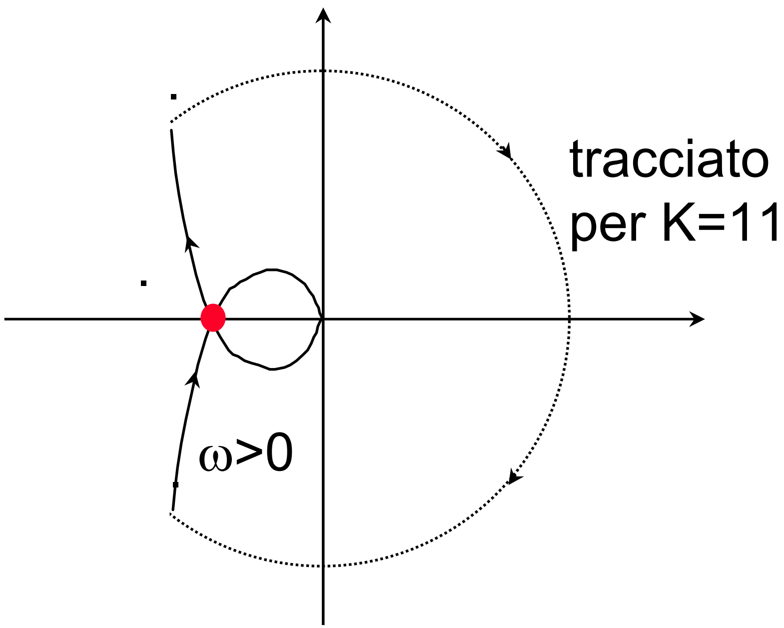
Istruzione Matlab: **`margin(num,den)`**

Esempio già fatto con Routh



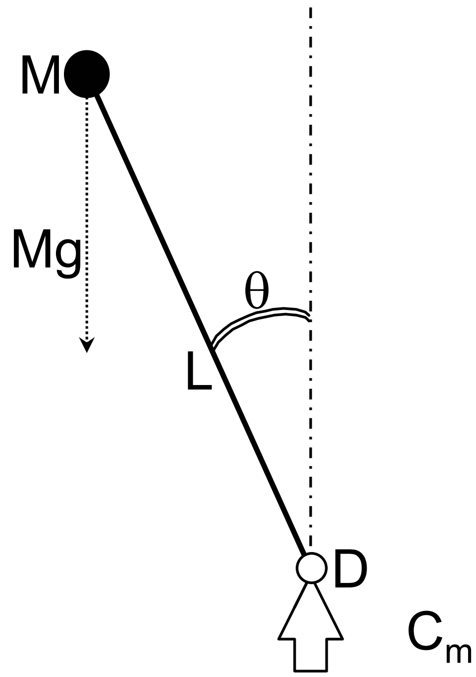
Risultava $0 < k < 11$

$$W = \frac{k}{0.1s^3 + 1.1s^2 + s + k}$$



0.1	1	
1.1	K	
$1-\frac{K}{11}$	0	K<11
K		K>0

$$ML^2\ddot{\theta} = C_m + MgL \cdot \overset{\cong\,\theta}{\sin\theta} - D\dot{\theta}$$



$\cong \theta$

$$\Theta(s)\cdot\left[ML^2 s^2 + Ds - MgL\right] = C_m(s)$$

$$F(s) = \frac{1}{ML^2 s^2 + Ds - MgL}$$ (anello aperto)

instabile

Introduciamo un controllo: $C_m = -k(\theta - \theta_d)$ $\quad \theta_d = 0$

$$\Theta(s)\cdot\left[ML^2 s^2 + Ds - MgL\right] = -k\Theta + k\Theta_1$$

$$W(s) = \frac{\Theta(s)}{\Theta_d(s)} = \frac{k}{ML^2 s^2 + Ds + (k - MgL)}$$ (anello chiuso)

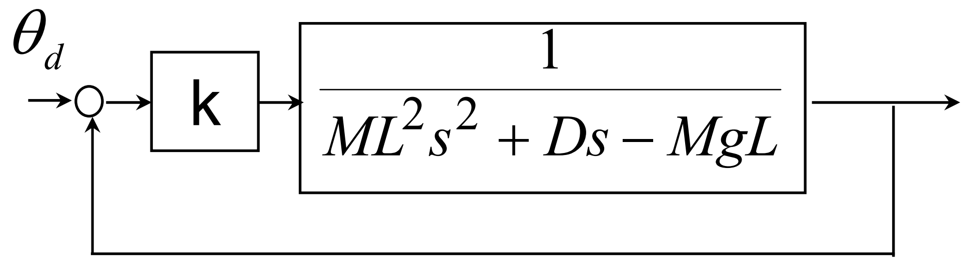
se K>MgL il sistema è stabile

Il Pendolo Rovesciato (continua)

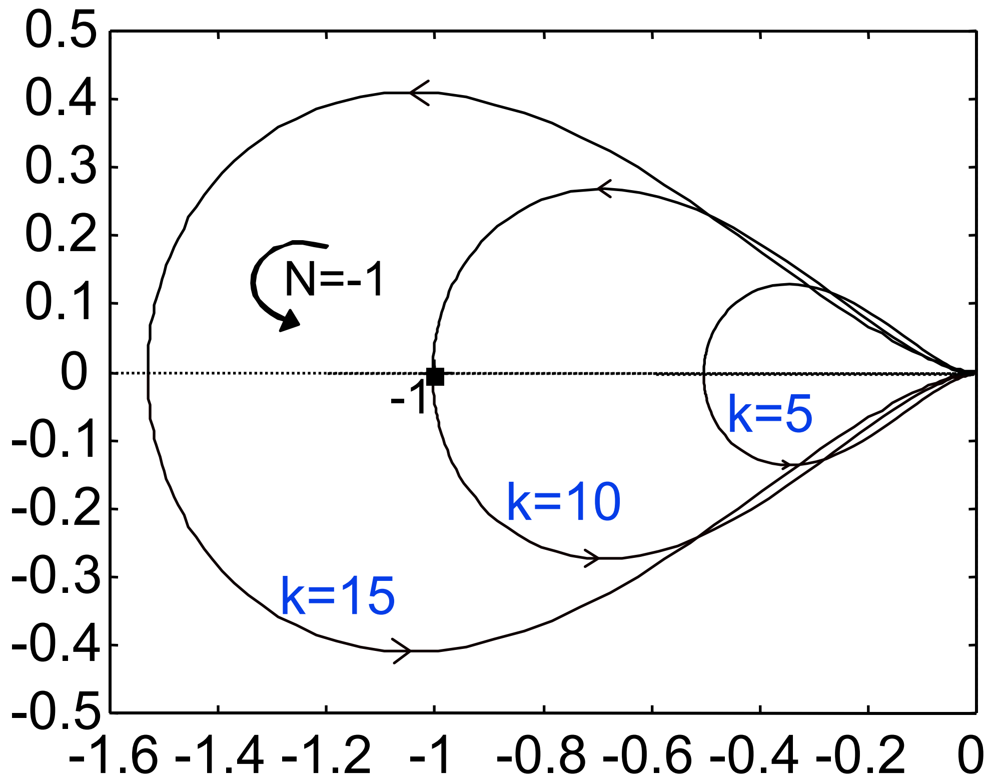
$M = L = 1$

$D = 3$

$k > 10$



$n_p=1$

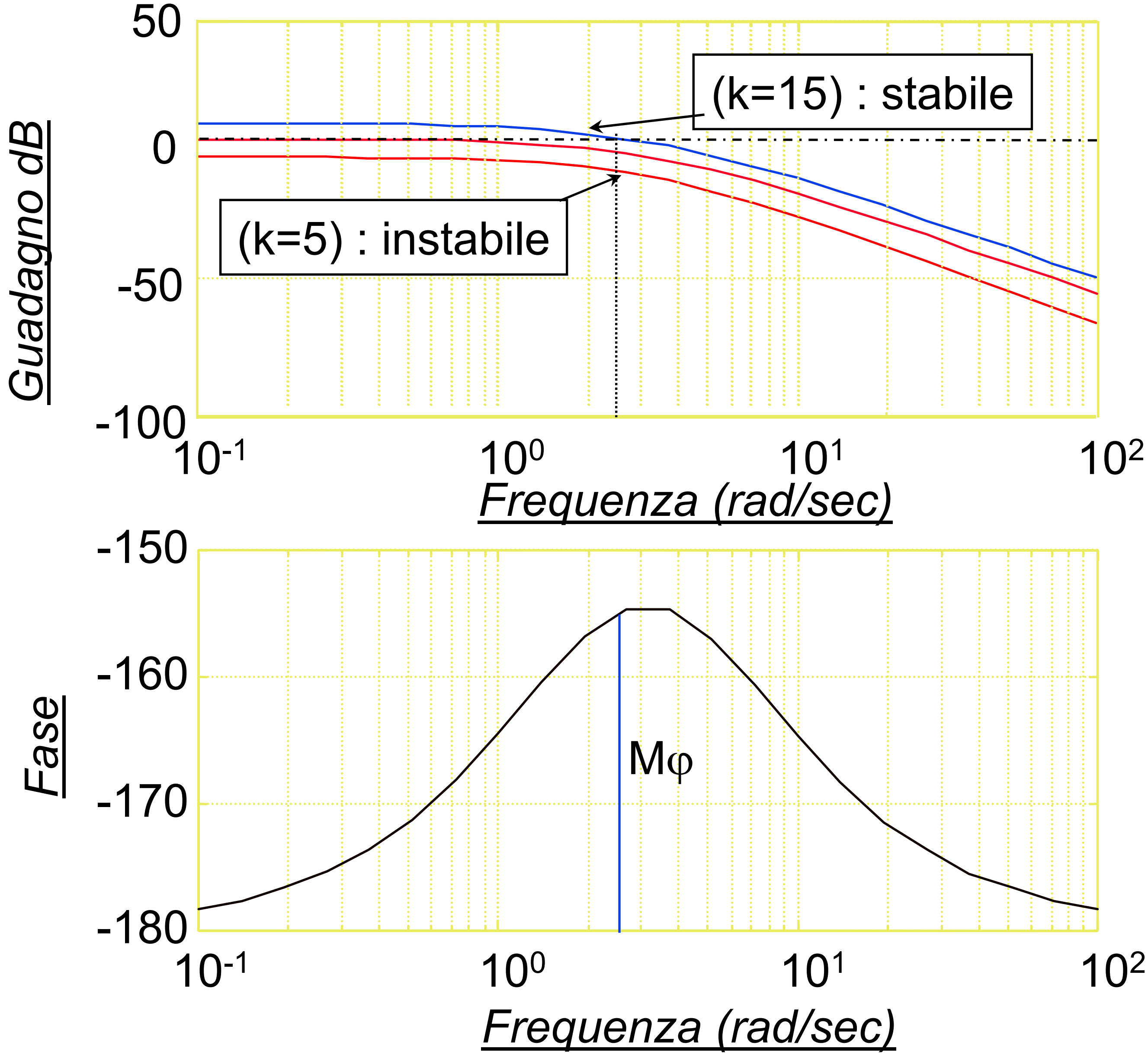


Deve risultare R (orarie) = - n_p

Stabilità "paradossale" :
solo per $k > k_0$ il contrario del solito.

Se $k > MgL$ il sistema è stabile

Diagrammi di Bode del Pendolo Rovesciato



(Anello Aperto)

Questo ci avverte:

$M\,\varphi = 25°$ $M_G = \infty$

Il criterio ridotto non va!!