Criterio di Routh

(vedi Marro par. 4.2 e 4.10 , vedi Vitelli-Petternella par. III.5)

Teorema di Kharitonov

- Abbiamo visto che la stabilità dipende dalla parte reale dei poli della FdT:
  - Re[poli]<0 => stabilità asintotica
  - Re[poli]=0, poli semplici => stabilità semplice

- Potremmo calcolare i poli: $D(s)=0$
  - calcoli complessi e con possibili errori numerici
  - nessuna informazione su come agire su un Σ instabile

Prima osservazione: i coefficienti di D(s) devono essere tutti positivi, altrimenti il S non è stabile (potrebbe essere al limite di stabilità se qualcuno è nullo).

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

Tabella di Routh

$a_{\mathbf{n}}$	$a_{\mathbf{n-2}}$	$a_{\mathbf{n-4}}$	$\cdots$
$a_{\mathbf{n-1}}$	$a_{\mathbf{n-3}}$	$\cdots$	
$b_{\mathbf{1}}$	$b_{\mathbf{2}}$	$\cdots$	
c_1	c_2	$\cdots$	

$$b_1 = \frac{a_n a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-2}}{-a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_n a_{n-5} - a_{n-1} a_{n-4}}{-a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_2 a_{n-1} - b_1 a_{n-3}}{-b_1}$$

Questi elementi devono avere tutti lo stesso segno, altrimenti si ha una radice a parte reale positiva per ogni variazione di segno

Le righe si possono scalare proporzionalmente. Quindi si può trascurare denominatore

- Teorema:
  - se l’equazione polinomiale non ha soluzioni a parte reale nulla, ne esisterà una a parte reale positiva per ogni variazione di segno.

- Criterio di Routh:
  - c.n.s. per avere stabilità asintotica è che non si abbiano variazioni di segno

- E se ci sono radici a parte reale nulla?
  - in zero ➔ caso banale, si eliminano prima
  - coniugate ➔ zeri nella tabella: bisogna estendere il teorema

ESEMPIO NUMERICO

$$(s+3)(3s^2+4s+6)=0 \qquad s_1=-3,\ s_{23}=-2\pm j\sqrt{2}$$

$$s^3+7s^2+18s+18=0$$

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 18 \\
2 & 7 & 18 \\
1 & \dfrac{18-7*18}{-7} & \\
0 & 18 &
\end{array}$$

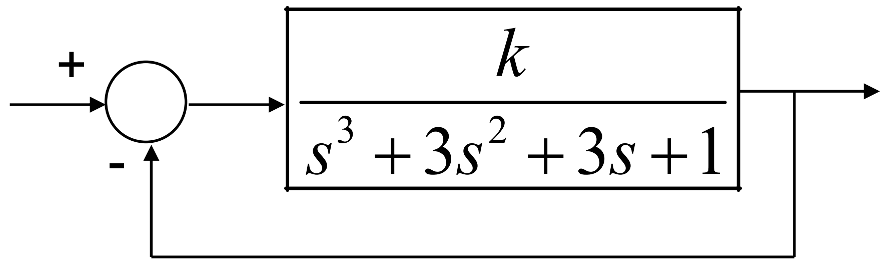
Nessuna variazione di segno, infatti le radici hanno parte reale negativa !

è uno zero!

$$as^2 + bs + c = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c|cc} 2 & a & c \\ 1 & b & \\ 0 & c & \end{array}}$$

Per un eq. di 2° grado la condizione sui singoli coefficienti è anche sufficiente !



$$W(s) = \frac{k}{s^3 + 3s^2 + 3s + (1+k)}$$

$$\boxed{\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1+k \\ 1 & \dfrac{8-k}{3} & \\ 0 & 1+k & \end{array}}$$

-1 < k < 8

$$s^3 + 7s^2 + 16s + 12 = 0$$

$$s \to s - 1 \quad \text{(cambiamento di variabile)}$$

$$(s-1)^3 + 7(s-1)^2 + 16(s-1) + 12 = 0$$

$$s^3 + 4s^2 + 5s + 2 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & \frac{9}{2} & \\ 0 & 2 & \end{array}$$

Nessuna variazione di segno, quindi le radici hanno parte reale minore di –1 !!!

Questo implica che il sistema si stabilizza esponenzialmente a zero con un andamento più rapido di e^{-t}

Elemento nullo nella prima colonna $s^4 + s^3 + s^2 + s + 1 = 0$

$$
\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 1 & 1 & \\
2 & \emptyset \to \varepsilon & 1 & \\
1 & \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} & & \\
0 & 1 & &
\end{array}
$$

- Sostituiamo lo 0 con ε
- È equivalente a dare una piccola perturbazione ai coefficienti del polinomio ovvero alle radici dell'equazione polinomiale

$\varepsilon \to 0^+$ 2 variazioni

$\varepsilon \to 0^-$ 2 variazioni

- Comunque, abbiamo 2 variazioni
- Ne consegue la presenza di due radici a parte reale positiva

CASI PARTICOLARI

Una riga è tutta nulla

$$s^4 + s^3 - 3s^2 - s + 2 = 0$$

$$\begin{array}{r|c|ccc}
n= & 4 & 1 & -3 & 2 \\
 & 3 & 1 & -1 & \\
q= & 2 & -2 & 2 & \\
 & 1 & \cancel{0} & \cancel{0} & \\
 & 1' & -4 & 0 & \\
 & 0 & 2 & &
\end{array}
\qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{ds}\left(-2s^2 + 2\right)$$

- In questo caso il polinomio di partenza è scomponibile nel prodotto di due polinomi:

  $$P(s)=P_1(s)\ P_2(s)$$

- La posizione delle (n-q) radici di $P_1(s)$ è data dalle variazioni delle prime (n-q+1) righe
- La riga q fornisce $P_2(s)$ (equazione ausiliaria) che è sempre di grado pari e, risolta, fornisce le ultime radici

- Alternativamente, si sostituisce la riga nulla con la derivata dell'equazione ausiliaria
- Le variazioni delle ultime q+1 righe corrispondono alle radici a parte reale positiva della eq. ausiliaria (per simmetria anche a quelle a parte reale negativa). Le rimanenti sono immaginarie.
- In questo caso 1 var. (1 rad. Re[ ]>0) + 1 var. (1 rad. Re[ ]>0 e 1 rad. Re[ ]<0)

Teorema di Kharitonov

Spesso i coefficienti sono noti come campi di variazione: $l_i < a_i < u_i$

La stabilità per qualsiasi valore dei parametri all'interno degli intervalli è implicata dalla stabilità di solo quattro polinomi

$$u_n s^n + u_{n-1} s^{n-1} + l_{n-2} s^{n-2} + l_{n-3} s^{n-3} + \cdots = 0$$

$$l_n s^n + l_{n-1} s^{n-1} + u_{n-2} s^{n-2} + u_{n-3} s^{n-3} + \cdots = 0$$

$$u_n s^n + l_{n-1} s^{n-1} + l_{n-2} s^{n-2} + u_{n-3} s^{n-3} + \cdots = 0$$

$$l_n s^n + u_{n-1} s^{n-1} + u_{n-2} s^{n-2} + l_{n-3} s^{n-3} + \cdots = 0$$