Regime Permanente

(vedi Vitelli-Petternella par. VI.1,VI.1.1,VI.2)

Comportamento a regime permanente

Classificazione in tipi

Condizioni a Ciclo Chiuso

Condizioni a Ciclo Aperto

Risposta a Regime per Disturbi Costanti

Disturbo sulla misura

Risposta a regime per Ingressi Sinusoidali

Reiezione disturbi aleatori

Risposta di un sistema Lineare =Risposta Transitoria + Risposta Permanente

Nel tempo

$$\sum_{i=o}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{j=o}^{m} b_j \frac{d^j u}{dt^j}$$

condizioni iniziali : $y(0), \dot{y}(0), \ldots\ldots \quad u(0), \dot{u}(0), \ldots\ldots$

Errore $e(t) = y_d(t) - y(t) = k_d u(t) - y(t)$

Nel dominio di s :

$$Y(s) = \underbrace{\frac{\sum b_j a^j}{\sum a_i s^i} U(s) + \frac{\text{termini in } u^k(0)}{\sum a_i s^i}}_{\text{Risposta Forzata}} + \underbrace{\frac{\text{termini in } y^k(0)}{\sum a_i s^i}}_{\text{Risposta Libera}}$$

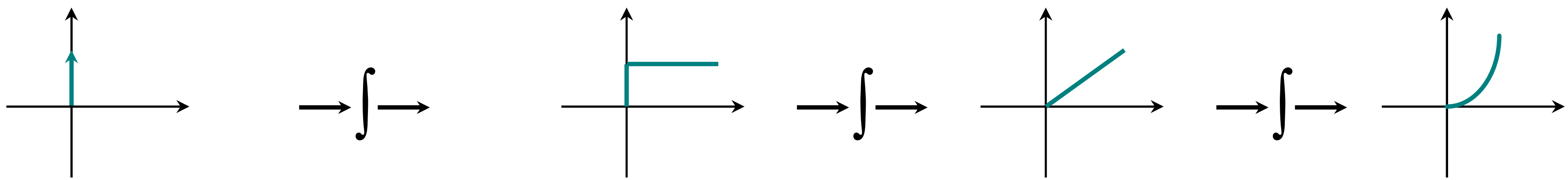
Se il sistema è asintoticamente stabile, cioè se:

poli di G(s) sono a parte reale negativa $\longleftrightarrow$ $\lim_{t \to \infty} g(t) = 0$ (risposta impulsiva)

Allora la risposta permanente non dipende dalle condizioni iniziali di y e di u.

Comportamento a Regime Permanente (vedi Marro par. 4.4)

Per “saggiare” il sistema lineare, si usano ingressi particolari



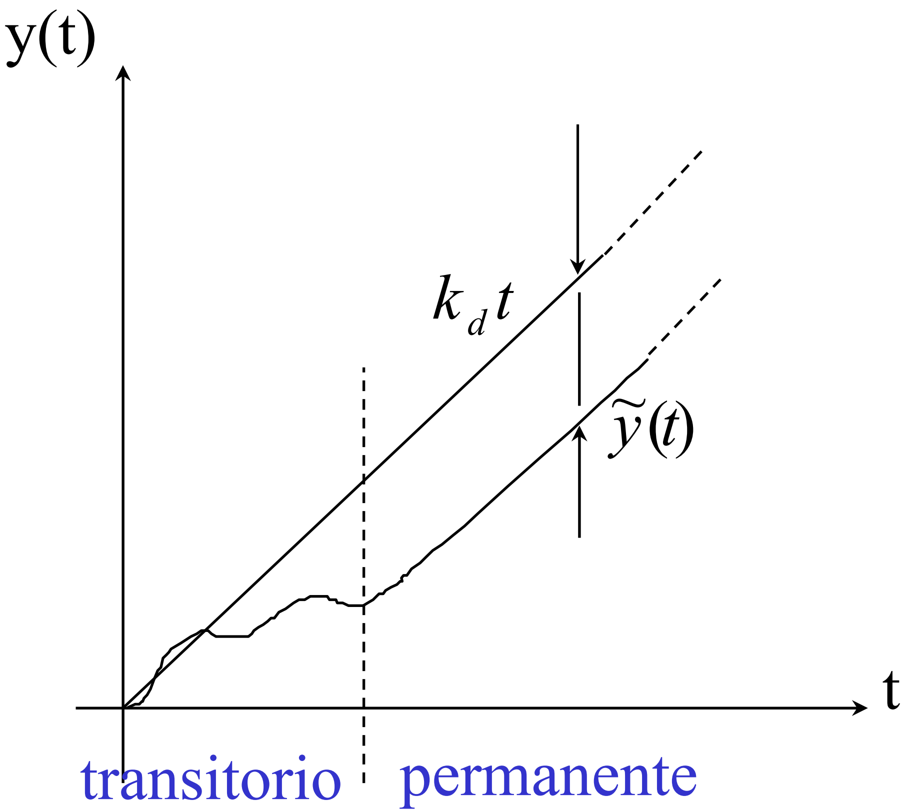
IMPULSO	GRADINO	RAMPA	PARABOLA
$u(t) = \delta_0(t)$	$u(t) = \delta_{-1}(t)$	$u(t) = t\delta_{-1}(t)$	$u(t) = \frac{t^2}{2}\delta_{-1}(t)$
$U(s) = 1$ (solo di principio)	$U(s) = \frac{1}{s}$	$U(s) = \frac{1}{s^2}$	$U(s) = \frac{1}{s^3}$

In generale polinomi di ordine k: $u(t) = \frac{t^k}{k!}$ ed anche ingressi sinusoidali: $u(t) = \sin \omega t$

Con un ingresso canonico u(t), un sistema lineare asintoticamente stabile ha una risposta permanente $\tilde{y}(t)$ e :

Errore a regime $\tilde{e}(t) = k_d u(t) - \tilde{y}(t)$

Errore transitorio $e_t(t) = e(t) - \tilde{e}(t)$ dipende dalle condizioni iniziali (oltre che dall’ingresso)



Sistema di controllo di TIPO K se la risposta permanente ad un ingresso canonico di ordine K:

$$u(t) = \frac{t^k}{k!}$$

differisce per una quantità costante e non nulla da:

$$y_d(t) = k_d \frac{t^k}{k!}$$

fig: Errore costante , non nullo

⇒ **SISTEMA di TIPO 1**

Corollario: Per un sistema di tipo k,

- l'errore è nullo per ingressi canonici d'ordine inferiore
- l'errore è illimitato per ingressi canonici d'ordine superiore

Condizione sulla funzione di trasferimento W(s) a ciclo chiuso

$$W(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \;\ldots\ldots\; b_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \;\ldots\ldots\; a_{n-1} s^{n-1} + s^n}$$

L'errore a regime permanente :

$$y_d(t) - \tilde{y}(t) = k_d u(t) - \tilde{y}(t) = \lim_{t\to\infty} k_d \frac{t^k}{k!} - y(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \left[k_d - W(s)\right] \frac{1}{s^{k+1}} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^k} \underbrace{\frac{(k_d a_0 - b_0) + (k_d a_1 - b_1)s + \ldots\ldots + (k_d a_{n-1} - b_{n-1})s^{n-1} + k_d s^n}{a_0 + a_1 s + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}}_{\text{Funzione di Trasferimento dell'errore}}$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s^k} \frac{(k_d a_0 - b_0) + (k_d a_1 - b_1)s + \ldots\ldots + (k_d a_{n-1} - b_{n-1})s^{n-1} + k_d s^n}{a_0 + a_1 s + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n}$$

Affinché abbia valore FINITO e NON NULLO occorre ed è sufficiente che:

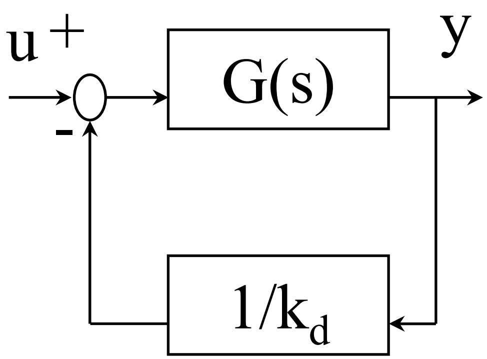
$$\frac{b_0}{a_0} = \frac{b_1}{a_1} = \ldots\ldots = \frac{b_{k-1}}{a_{k-1}} = k_d$$

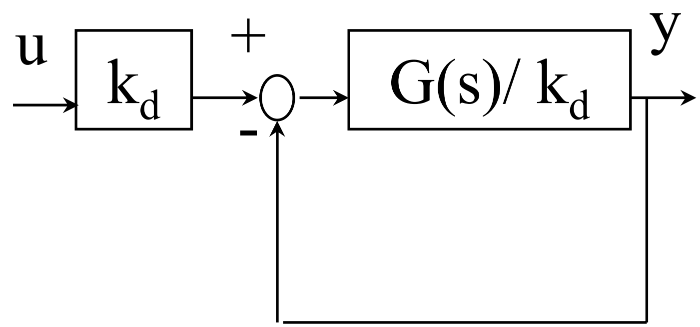
$W_e(s)$ ha uno zero in s=0 di molteplicità K

$$\frac{b_k}{a_k} \neq k_d$$

Il valore dell'errore di regime è: $e_k = \dfrac{k_d a_k - b_k}{a_0}$

Come si riconosce un sistema di controllo di tipo K dalla funzione di trasferimento del processo G(s) ad anello aperto?





$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + \frac{G(s)}{k_d}}$$

Funzione di trasferimento
di ERRORE We(s): $y_d(s) - y(s) = [k_d - W(s)]u(s)$

$$k_d - W(s) = \frac{k_d^2}{k_d + G(s)}$$

Zeri di k_d-W(s) ≡ Poli di G(s)

Il sistema di controllo è di tipo k se e solo se: **G(s) ha un polo di molteplicità k in s = 0**

ovvero ⇒

$$G(s) = \frac{k_G}{s^k} \frac{\prod_j (s\tau_j^z + 1)}{\prod_i (s\tau_i^p + 1)}$$

ovvero ⇒

$$\frac{k_d^2}{k_d + G(s)} = \frac{s^k \prod_i (s\tau_i^p + 1) k_d^2}{s^k \prod_i (s\tau_i^p + 1) k_d + k_G \prod_j (s\tau_j^z + 1)}$$

La catena diretta ha k integratori in cascata !

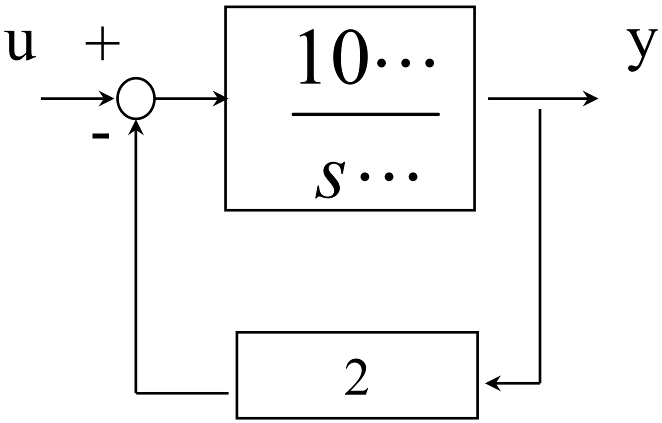
L'ERRORE VALE:

TIPO 0	**TIPO K**
$e_0 = \dfrac{k_d^2}{k_d + k_G}$	$e_k = \dfrac{k_d^2}{k_G}$
$K_G =$ guadagno di $G(s) = \left[s^K G(s)\right]_{s=0}$	

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{s^{i+1}} W_e(s) = \lim_{s\to 0} \frac{k_d^2 s^{k-i}}{k^d s^k + k_G} \qquad \begin{cases} k: & \text{numero poli origine} \\ i: & \text{ordine ingresso} \end{cases}$$

Tipo del sistema \ Ingresso	0 : Gradino	1 : Rampa	2 : Parabola
0	$\frac{k_d^2}{k_d + k_G}$	∞	∞
1	0	$\frac{k_d^2}{k_G}$	∞
2	0	0	$\frac{k_d^2}{k_G}$

N.B. Da moltiplicare per U, ampiezza dell'ingresso

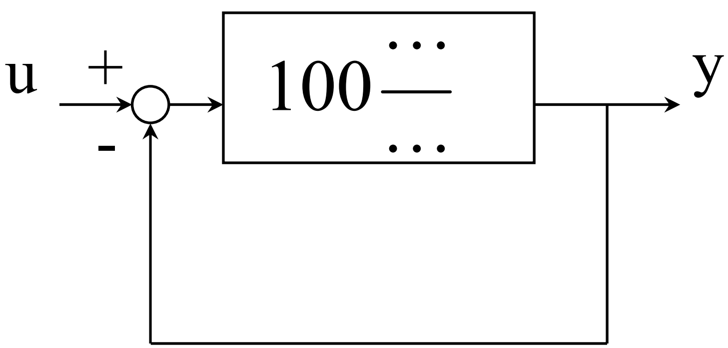


TIPO 1 $k_G = 10 \quad k_d = 0.5$

Errore al gradino :0

Errore a rampa unitaria $u(t)=t$

$$e(\infty) = \frac{0.25}{10} = 0.025$$

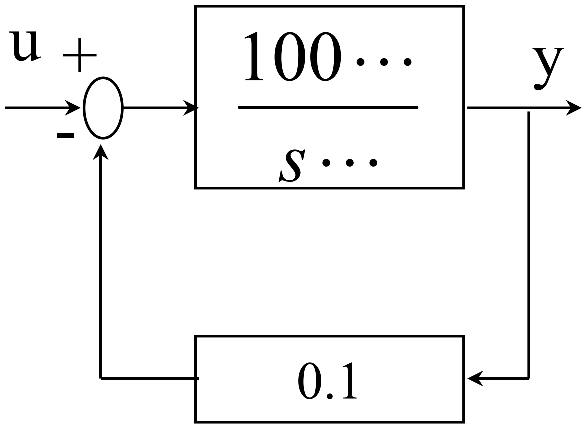


TIPO 0 $k_G = 100 \quad k_d = 1$

Errore al gradino $\mathrm{u(t)} = 2\delta_{-1}(\mathrm{t})$

$$\mathrm{e}(\infty) = \frac{2}{101} \cong 0.02$$

TIPO 1 $\quad k_G = 100 \qquad k_d = 10$



L' uscita desiderata è a rampa : $Y_d(t) = 5t$
qual è l'errore ?

$$u(t) = \frac{Y_d(t)}{k_d} = 0.5t$$

$$e(\infty) = 0.5\frac{100}{100} = 0.5$$

In genere si usano le formule inverse:
qual è deve essere il guadagno k_G affinché : errore < valore dato

$$k_G \geq \frac{k_d^2 U}{e} - k_d \qquad \text{Tipo 0}$$

$$k_G \geq \frac{k_d^2 U}{e} \qquad \text{Altri}$$

•Polo nell'origine in catena diretta $\left(\frac{1}{s}\right)$ **Equivale** Guadagno infinito per frequenza zero

$$\left(\left|\frac{1}{j\omega}\right| \to \infty \quad \text{se} \quad \omega \to 0\right)$$

Fedeltà elevata per segnali a bassa frequenza, infinita a frequenza zero !

• Influenza dei poli in s = 0 di G(s) sulla stabilità ad anello chiuso:

- ogni polo nell'origine dà uno sfasamento di -90° e
- peggiora drasticamente i margini di stabilità

Nota bene:

$\frac{1}{s}$ è al limite di stabilità ad anello aperto

$\frac{1}{s^2}$ è instabile ad anello aperto

Caso dei Servomeccanismi

I poli nell'origine possono essere nel processo ovvero introdotti nel controllore

- Controllo di posizione

$$u \longrightarrow \boxed{G_p(s)} \longrightarrow y$$

$$\begin{cases} m\ddot{y} = u - d\dot{y} & \text{(y = posizione} \\ & \text{u = forza)} \\ G_p(s) = \dfrac{1}{s(d+ms)} & \text{Tipo 1} \end{cases}$$

- Controllo di velocità

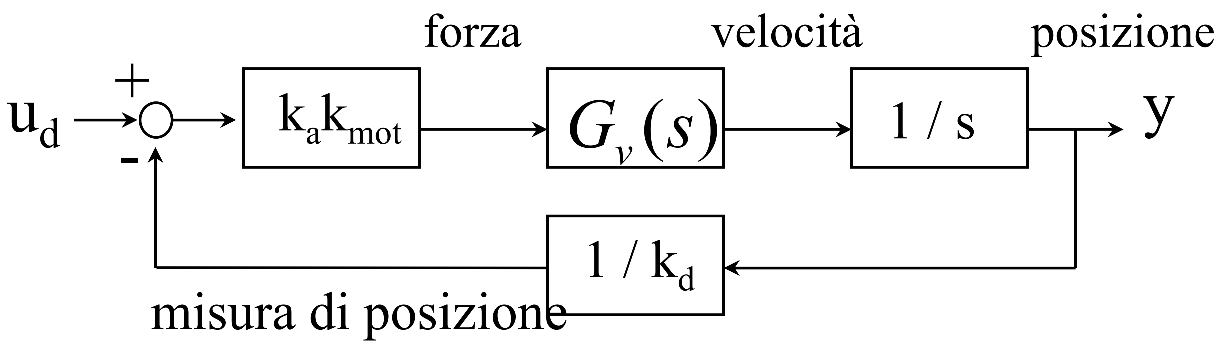
$$u \longrightarrow \boxed{G_v(s)} \longrightarrow y$$

$$\begin{cases} m\dot{y} = u - dy & \text{(y = velocità} \\ & \text{u = forza)} \\ G_v(s) = \dfrac{1}{d+ms} & \text{Tipo 0} \end{cases}$$

N.B. Se **d=0**, il tipo aumenta di **1**

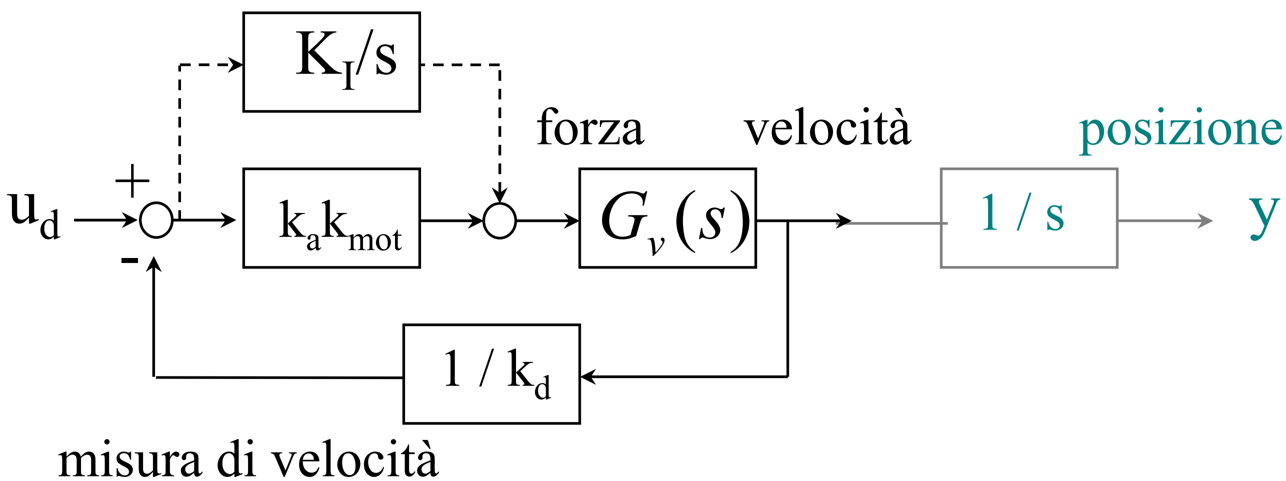
A regime, l'ingresso di un integratore deve essere zero

Asservimento di posizione a regime, u=gradino



L'ingresso al motore deve essere zero, altrimenti y varia.

In un asservimento di velocità



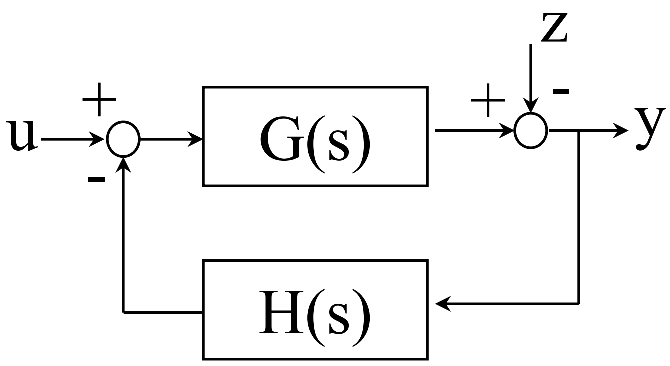
L'ingresso al motore deve essere non nullo, ma, se $K_I \neq 0$, l'errore deve comunque essere zero.

- Stesse tecniche viste per gli ingressi.
- Sistema di controllo Astatico se risposta a regime nulla a disturbo costante:

CNES Astatismo: $W_z(s)$ ha uno zero in s=0

Altrimenti l'errore indotto in uscita da un disturbo costante di ampiezza unitaria è : $e_z = \left[W_z(s)\right]_{s=0}$

- Risp. a regime per disturbi costanti. Disturbo in Uscita $W_z(s) = \dfrac{1}{1+G(s)H(s)}$



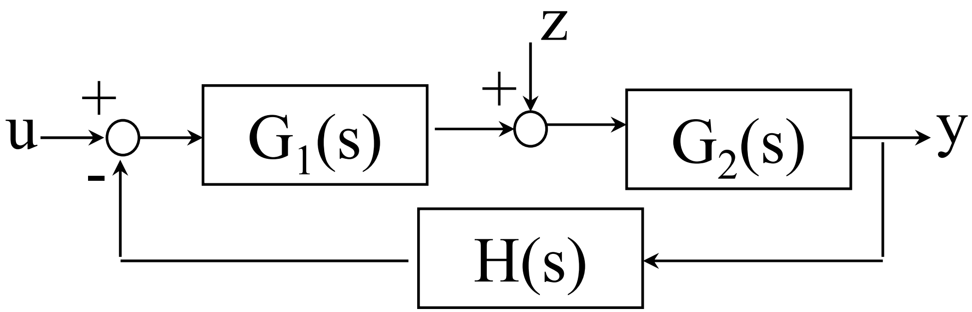
Astatismo: G(s) ha un polo in s=0

H(s) con un polo in s=0: non va bene se si assume un sistema di controllo proporzionale

Altrimenti $y_z = \dfrac{1}{1+K_G K_H}$ (Z unitario)

può essere ridotto aumentando il guadagno in catena diretta K_G

Disturbo in Catena Diretta



$$W_z(s) = \frac{G_2(S)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

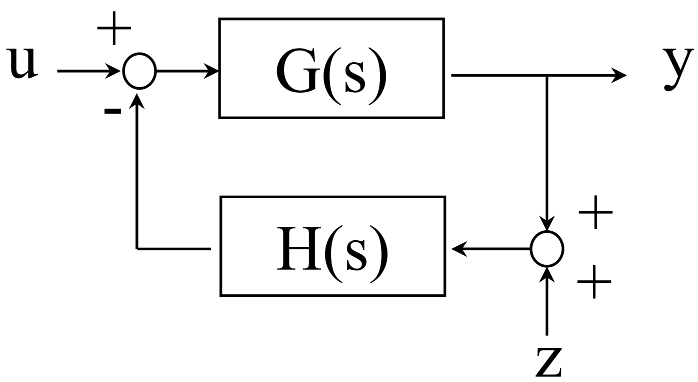
Astatismo : $G_1(s)$ ha un polo in s=0

($G_2(s)$ con uno zero in s=0 non è compatibile con il carattere proporzionale del controllore)

altrimenti in uscita si ha, per un disturbo unitario

$y_z = \dfrac{k_{G_2}}{1 + k_{G_1} k_{G_2} k_H}$ (se G_2 non ha poli in s = 0)	$y_z = \dfrac{1}{k_{G_1} k_H}$ (se G_2 ha poli in s = 0)

REM:
Riducibili incrementando k_{G1}



$$W_Z(s) = \frac{-G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}$$

MAI ASTATICO !

- *zero in s = 0 per G(s) : non va bene con il controllo proporzionale;*
- *zero in s = 0 per H(s) : annulla la controreazione per y costante.*

$y_z = \dfrac{-k_G k_H}{1+k_G k_H}$	$y_z = -1$
G senza poli in s = 0	G con polo in s = 0

- Ipotesi : Stabilità asintotica
- Risposta a regime ad un ingresso sinusoidale di frequenza data:

$$\tilde{u}(t) = \sin \tilde{\omega} t \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow \tilde{y}(t) = M(\tilde{\omega}) \sin(\tilde{\omega} t + \varphi(\tilde{\omega}))$$

•Ricavabile dalla risposta armonica I-U

$$W(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + \dfrac{G(j\omega)}{k_d}} \qquad \begin{cases} M(\tilde{\omega}) = \left| W(j\omega) \right|_{\omega = \tilde{\omega}} \\ \varphi(\tilde{\omega}) = \angle W(j\omega)_{\omega = \tilde{\omega}} \end{cases}$$

- Errore $\tilde{e}(t) = \tilde{y}_d(t) - \tilde{y}(t)$

- Risposta armonica dell'errore: $W_e(j\omega) = k_d - w(j\omega) = \dfrac{k^2{}_d}{k_d + G(j\omega)}$

$\Downarrow$

l'errore a regime permanente (sinusoidale) ha ampiezza limitata da

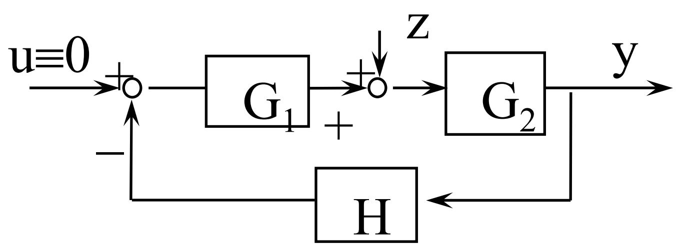
$$\left| \tilde{e}(t) \right| \le \left| \frac{k^2{}_d}{k_d + G(j\tilde{\omega})} \right| = \left| \frac{k_d}{1 + F(j\tilde{\omega})} \right|$$

(|$F(j\omega)$| si legge sui diagrammi di Bode)

Esempi: Ridurre l'effetto del vento su un'antenna, o quello delle onde su una nave, o quello di una raffica su un aereo

Problema: Il disturbo non è misurabile

Soluzione: L'effetto c'è e si può misurare



Specifica: Ridurre l'effetto di un fattore K

A CICLO APERTO

$$y_{z0} = G_2 \cdot z$$

A CICLO CHIUSO

$$y_{zc} = \frac{G_2}{1+G_1G_2H} \cdot z = \frac{G_2 \cdot z}{1+F}$$

Dalla specifica:

$$\left|\frac{y_{zc}}{y_{z0}}\right| < \frac{1}{k} \Rightarrow \left|\frac{y_{z0}}{y_{zc}}\right| = |1+F| > k$$, che si può approssimare con $|F| > k$ (agendo su G_1)