Esercizi del corso di Elementi di Automatica

Giovanni Ulivi

Facoltà di Ingegneria
Dipartimento di Informatica e Sistemistica

In questa dispensa sono raccolti e svolti alcuni esercizi dati in diverse sedute di esame del corso di Regolazione e Servocomandi, prima, e in quello di Elementi di Automatica, poi. La loro natura di "domanda scritta" ne caratterizza il taglio: le domande in generale richiedono un'utilizzazione intelligente dei contenuti del corso piuttosto che cura e precisione nei calcoli o nel tracciamento di grafici.

Onestamente questa natura ha anche influenzato in maniera negativa la qualità di alcuni testi, in cui errori di battitura, descrizioni sommarie o mancanza di simboli ingenerano difficoltà di comprensione. Durante l'esame queste difficoltà sono state risolte con chiarimenti dati in linea, senza quindi danni (anzi . . .) per gli esaminandi.

Ho preferito comunque evitare di correggere i testi per lasciar loro tutte le caratteristiche originali e per evitare la circolazione di versioni diverse dei testi stessi. A questo proposito, si noti che per esigenze di standardizzazione la maggior parte dei testi, scritti con Microsoft Word 4 per MacIntosh, sono stati rielaborati in LaTeX, introducendo così altre possibilità di errore. In particolare, l'attuale word processor ha solo algoritmi per la sillabazione in inglese e produce spesso mostruosità grammaticali, difficilmente eliminabili.

Lo svolgimento presentato per i primi esercizi non và preso come modello esatto per un compito, in quanto è stato arrichito di commenti e suggerimenti la cui stesura è stata decisamente più lunga della soluzione stessa. Un ultimo compito è invece stato 'in formato esame.

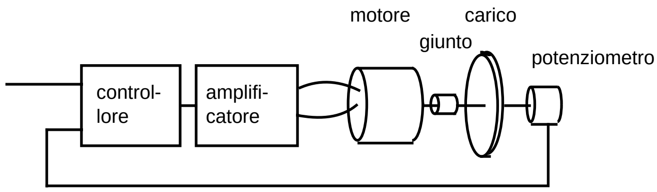
La mia speranza è che la raccolta di tutti i compiti (già disponibile) con l'ausilio degli esercizi commentati possano essere d'aiuto ad una miglior comprensione dello spirito del corso e quindi ad una più facile e fruttuosa preparazione degli studenti.

In bocca al lupo

Giovanni Ulivi

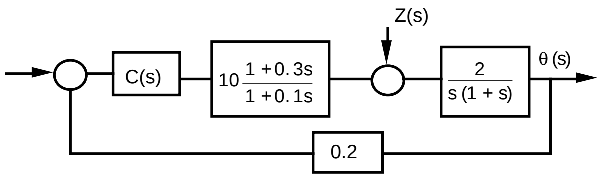
R&S 4.89

1) Dato il sistema di posizionamento illustrato ricavarne lo schema a blocchi e determinare: (a) se il sistema a ciclo chiuso può divenire instabile se il regolatore è proporzionale, (b) il tipo del sistema, (c) la semplificazione ottenibile nel modello assumendo $Kg \to \infty$

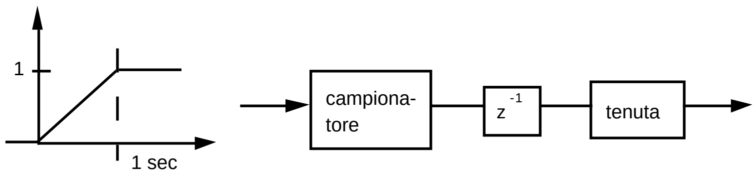


Meccanicamente si schematizzi il giunto elestico con la sua elasticità K_g e un coeff. di attrito viscoso F_g, il motore e il carico con le rispettive inerzie J_m e J_c Si consideri il motore alimentato in tensione sull'armatura. (Si consiglia di determinare le equazioni del carico per via analitica).

2) In figura è dato lo schema a blocchi di un asservimento di posizione angolare, soggetto ad un disturbo $Z(s)$. Si richiede di sintetizzare $C(s)$ in modo che: (a) per una velocità di uscita di 2 rad/sec l'errore sia $\leq 0.04 rad$, (b) per $z(t) = \delta_{-1}(t)$ l'errore sia ≤ 0.02, (c) il margine di fase sia $\geq 50°$.



3) Per il sistema tempo discreto illustrato (Tc=0.5 sec), tracciare l'andamento della $y(t)$ per l'ingresso indicato nella figura stessa, supponendo il sistema a riposo per $t = 0$.



Soluzione

Primo esercizio

Si indichino con ϑ_m e ϑ_c le posizioni del rotore del motore e del carico. Per i due corpi rotanti valgono allora le espressioni seguenti, ottenute bilanciando le diverse coppie agenti:

$$J_m\ddot{\vartheta}_m = c_\mathrm{m} + K_\mathrm{g}(\vartheta_\mathrm{c} - \vartheta_\mathrm{m}) + F_\mathrm{g}(\dot{\vartheta}_\mathrm{c} - \dot{\vartheta}_\mathrm{m})$$

$$J_c\ddot{\vartheta}_c = -K_\mathrm{g}(\vartheta_\mathrm{c} - \vartheta_\mathrm{m}) - F_\mathrm{g}(\dot{\vartheta}_\mathrm{c} - \dot{\vartheta}_\mathrm{m})$$

Si noti che ai due lati del giunto le coppie sia elastiche che di attrito hanno segni opposti, producendo così polinomi caratteristici stabili per entrambe le equazioni.

Trasformando secondo Laplace e eliminando:

$$\Theta_m = \Theta_\mathrm{c}\frac{s^2J_\mathrm{c} + sF_g + K_\mathrm{g}}{\mathrm{sF_g} + K_\mathrm{g}}$$

si ha:

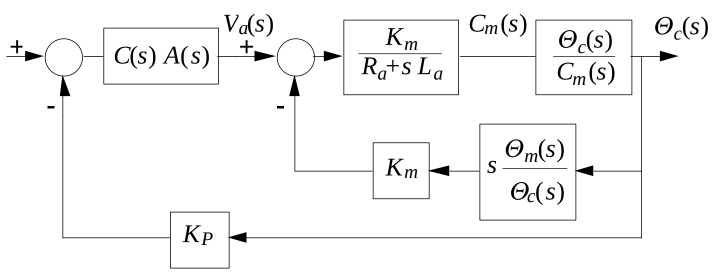
$$C_m = \Theta_\mathrm{c}\left\{\frac{\left(s^2J_\mathrm{m} + sF_g + K_\mathrm{g}\right)\left(\mathrm{s}^2J_\mathrm{c} + sF_g + K_\mathrm{g}\right)}{\mathrm{sF_g} + K_\mathrm{g}} - (sF_g + K_\mathrm{g})\right\}$$

da cui semplificando (mantenendo raggruppato il termine a denominatore):

$$\frac{\Theta_c}{C_m} = \left\{\frac{sF_g + K_\mathrm{g}}{\mathrm{s}^2\left[s^2J_\mathrm{m}\mathrm{J_c} + (J_\mathrm{m} + J_\mathrm{c})(sF_g + K_\mathrm{g})\right]}\right\}$$

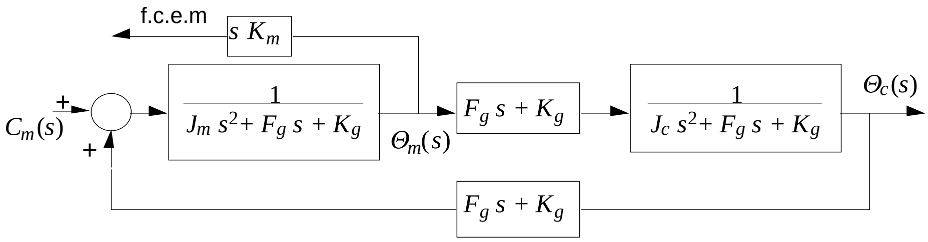
Notare la presenza di due poli nell'origine, ovvia perchè anche per una struttura complessa, ma con soli attriti interni, *a regime* si ha proporzionalità tra coppia e accelerazione di qualunque parte.

Lo schema a blocchi del sistema in esame risulta quindi essere:



Lo schema ottenuto non è elegante ed esplicativo. Questo accade spesso con sistemi di questo genere, quando si tende a nascondere lo scambio delle azioni tra i diversi componenti (come si è fatto eliminando Θ_m), ma poi si ha bisogno del valore di grandezze interne al sistema (in questo caso la velocità di rotazione del motore).

Lo schema a blocchi disegnato invece a partire dalle prime due equazioni risulta più semplice. Viceversa lo sforzo di ricondurlo in forma canonica è senz'altro maggiore e così la possibilità di commettere errori.



Il sistema è di tipo uno.

Ciò può essere dimostrato scrivendo la funzione di trasferimento del ramo diretto del loop interno come $\frac{1}{s^2}A(s)$ e la f.d.t. in controreazione come $sB(s)$, con $A(s)$ e $B(s)$ che si riducono a fattori costanti per $s \to 0$.

Il sistema ha una struttura di poli e zeri abbastanza complessa con cinque poli in catena diretta. Ad una prima analisi si può quindi affermare che, salvo per particolari combinazioni di valori, il sistema può essere instabile se $C(s)$ rappresenta un semplice guadagno.

Si possono fare poi ulteriori considerazioni osservando che una f.d.t. a ciclo chiuso $W(s)$ può essere espressa in termini dei numeratori e dei denominatori delle f.d.t. in catena diretta $F(s)$ e in controreazione $H(s)$ come:

$$\frac{N_W}{D_W} = \frac{N_{\mathrm{F}}\mathrm{D_H}}{\mathrm{D_H}\mathrm{D_F} + N_{\mathrm{H}}\mathrm{N_F}}$$

e quindi per l'anello in oggetto l'eccesso poli su zeri risulta pari a 4 corrispondente ad uno sfasamento della risposta armonica per $\omega \to \infty$ pari a 360°. Quindi al crescere del guadagno dell'organo di controllo si raggiungerà sicuramente l'instabilità.

E' fisicamento intuitivo osservare che irrigidendo il giunto il carico si comporta come un usuale volano, collegato rigidamente al motore. Ciò è espresso in termini analitici dal valore limite per $K_g \to \infty$ assunto dalle funzioni:

$$\frac{A(s)}{s^2} = \frac{K_m}{R_a + sL_a}\frac{1}{s^2\,(J_{\mathrm{m}} + J_{\mathrm{c}})}$$

$$\frac{A(s)}{s^2} = \frac{K_m}{R_a + sL_a}\frac{1}{s^2\,(J_{\mathrm{m}} + J_{\mathrm{c}})}$$

Si osservi che essendo presenti termini come ad es. s^2J i limiti suddetti sono validi per s limitato. Ciò significa che l'approssimazione fatta dipende dalle frequenze in gioco. In effetti qualunque trasmissione presenta fenomeni dinamici (ad es. risonanze) se le coppie applicate hanno componenti rilevanti a frequenze elevate.

Secondo esercizio

In primo luogo si osservi che il sistema ha un polo nell'origine a valle dell'ingresso del disturbo, quindi si analizzino le specifiche a regime.

La prima non deve trarre in inganno, il sistema è un'asservimento di posizione, parlare di una velocità dell'uscita equivale a parlare di una rampa di posizione, come è usuale in sistemi di tipo uno. Inoltre non è richiesto di rendere il sistema astatico rispetto al disturbo, quindi non è necessario aggiungere altri poli nell'origine nel controllore.

Si può quindi procedere al calcolo di K_c, fattore di guadagno di $C(s)$. Dalla prima specifica si ha:

$$e(\infty) = \frac{Y_{\mathrm{d0}}}{K_{\mathrm{F}}}\frac{2}{K_{\mathrm{F}}} \leq 0.04 \Rightarrow K_{\mathrm{F}} = 4 \cdot K_{\mathrm{c}} \geq \frac{2}{0.04}$$

$$K_c \geq 12.5$$

e dalla seconda

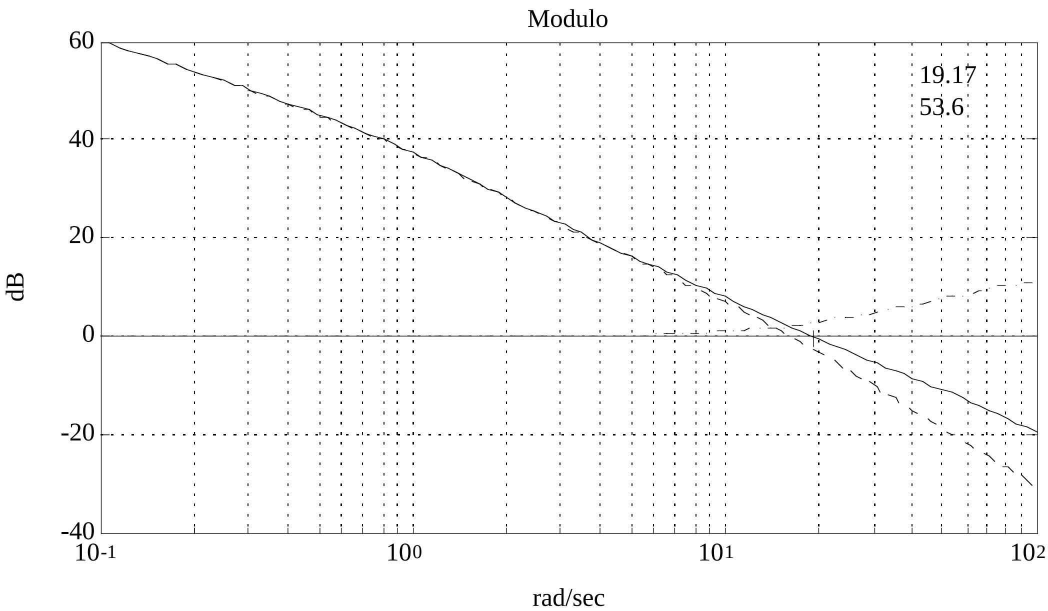
$$\frac{1}{K_{\mathrm{m}}} \leq 0.02$$

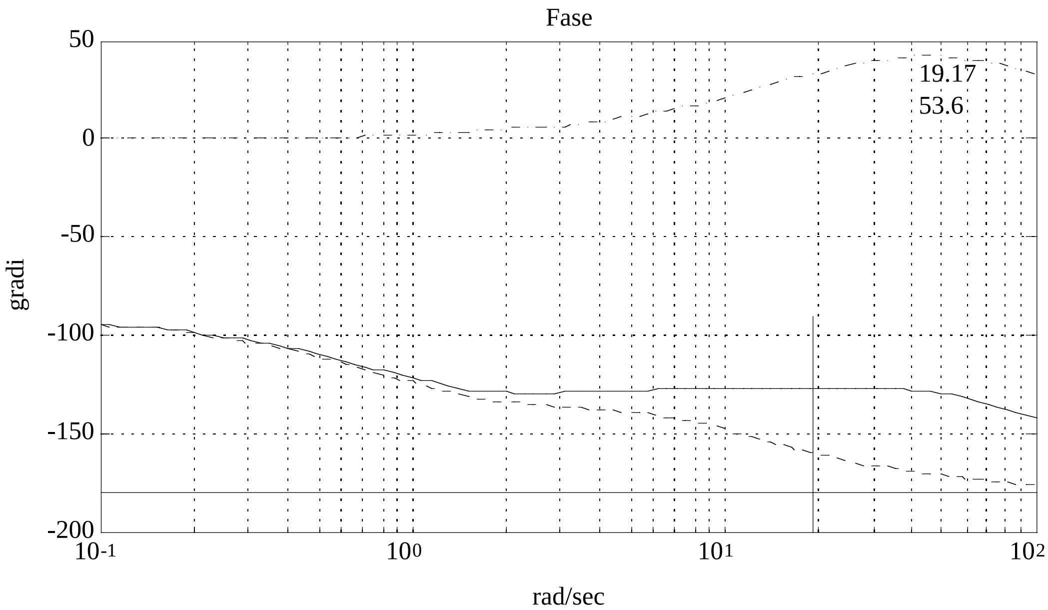
Si noti che l'applicazione di questa relazione, come detto nelle dispense, richiede di portare il sistema ad avere un feedback unitario. Ciò si traduce nell'inglobare anche il guadagno della controreazione in K_m. Quindi:

$$K_m = 0.2 \cdot 10 \cdot K_{\mathrm{c}} \geq 50 \Rightarrow K_{\mathrm{c}} \geq 25$$

che risulta essere la più stringente delle due.

A questo punto si può tracciare il diagramma di Bode della risposta armonica del processo moltiplicata per il fattore di guadagno determinato (curve tratteggiate nei diagrammi seguenti, dove il primo numero in alto a destra rappresenta la pulsazione di attraversamento e il secondo il margine di fase).





Poichè nelle specifiche non è precisata la pulsazione di attraversamento sarebbe corretto pensare di utilizzare una rete attenuatrice per ridurre il dimensionamento degli attuatori. Dato l'andamento 'poco pendente' della fase, questo richiederebbe una rete con $m \approx 100$ e produrrebbe una notevole riduzione della ω_T rendendo inoltre più difficile lo svolgimento dell'esercizio stesso. E' quindi accettabile l'impiego di una anticipatrice che, sempre a causa dell'andamento della curva delle fasi, provoca un incremento della pulsazione di attraversamento di poco superiore a quello prodotto dal guadagno del regolatore.

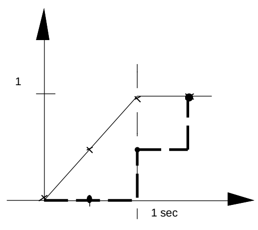
Scegliendo quindi una rete con $m = 10$ e avente lo zero circa coincidente con la ω_T:

$$R^{'}(s) = \frac{\left(\frac{s}{20} + 1\right)}{\left(\frac{s}{100} + 1\right)}$$

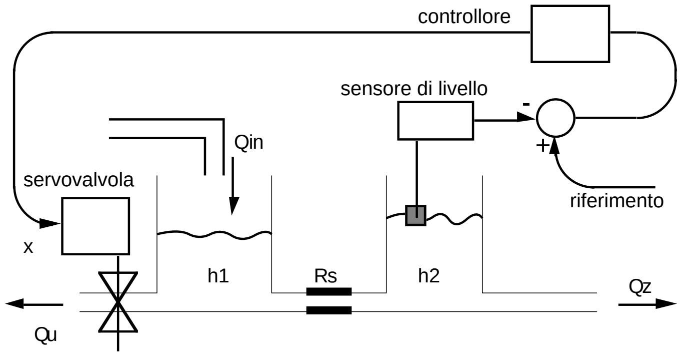
si ottiene il grafico a tratto pieno, rappresentante la funzione compensata che soddisfa le specifiche sul margine di fase e quello a tratto e punto che rappresenta la rete compensatrice.

Terzo esercizio

Conviene determinare la soluzione per via grafica. In figura i campioni dell'ingresso sono indicati con delle crocette, quelli dell'uscita con dei pallini ed il segnale di uscita è tratteggiato.

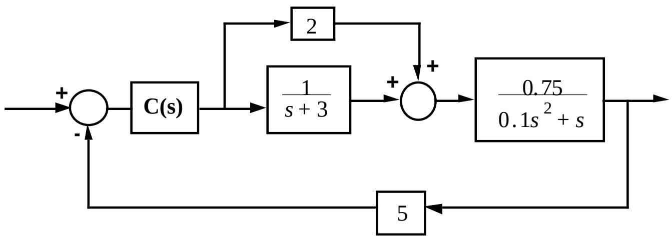


a) La figura illustra un sistema di serbatoi, in cui il livello del secondo è regolato mediante lo spillamento di fluido dal primo. Questo avviene tramite una servovalvola che, per semplicità, si assume imporre un legame lineare tra il segnale di controllo x e la portata uscente Q_u. Sul sistema agiscono anche disturbi di portata.



Determinare il segno del guadagno del controllore e quindi lo schema a blocchi del sistema. Calcolare la funzione di trasferimento tra riferimento e h_2, assumendo nulli i disturbi di portata.

b) Dato il sistema



determinare il controllore in modo che:

- L'errore a regime $(y_d - y)$ per un'ingresso a rampa unitaria sia minore di 0.003
- La pulsazione di attraversamento sia maggiore di $5\,rad/sec$
- Il margine di fase sia maggiore di 45°.

c) Determinare la trasformata Z derivante dalla discretizzazione di

$$\frac{10}{(s+1)(s+10)}$$

con $T_c = 0.05 sec$ e calcolare i primi campioni della risposta a gradino.

Soluzione

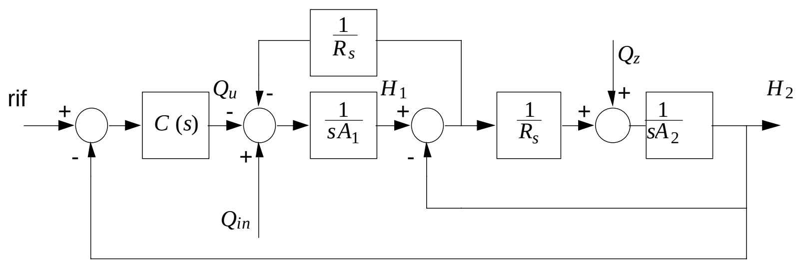
Primo esercizio

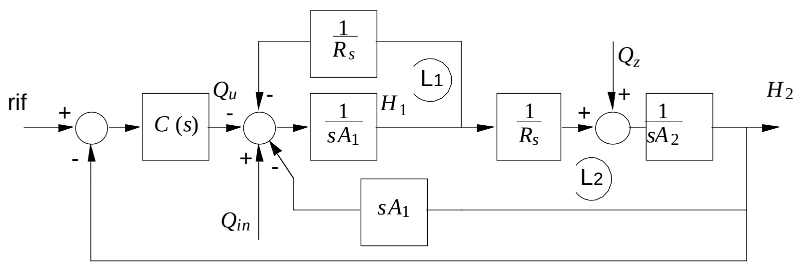
Se non diversamente specificato, in questi esercizi si assumono sempre lineari le resistenze, cioè che le portate cambino poco intorno a valori nominali e inoltre che le unità di misura inglobino tutte le caratteristiche del fluido, in modo che $\Delta p = q \cdot h$. Una approssimazione, talvolta importante, dei modelli utilizzati consiste nel trascurare l'energia cinetica dei fluidi e quindi gli effetti inerziali legati al loro movimento. Le equazioni relative ai due serbatoi si scrivono uguagliando le derivate delle variazioni di volume alle portate nette, prese col segno opportuno. Notare come le equazioni si accoppino tramite la portata di scambio attraverso R_s, funzione della differenza di livelli.

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = Q_{\mathrm{in}} - Q_{\mathrm{u}} - \frac{(h_1 - h_2)}{R_{\mathrm{s}}}$$

$$A_2 \frac{dh_2}{dt} = \frac{(h_1 - h_2)}{R_{\mathrm{s}}} - Q_{\mathrm{z}}$$

Da queste si può tracciare lo schema a blocchi, riportato nella prima figura. Spostando il nodo di somma si ottiene lo schema riportato nella seconda figura. Per determinare la funzione di trasferimento ingresso-uscita lo schema va portato in forma canonica risolvendo in sequenza gli anelli L_1 e L_2, assumendo nulli gli ingressi di disturbo.





Si ottiene infine:

$$W(s) = \frac{1}{s[sR_{\mathrm{s}}\mathrm{A}_1 A_2 + (A_1 + A_2)]}$$

Si noti che per $R_s = 0$ il processo si comporta come un'unico serbatoio di area $A_1 + A_2$.

Secondo esercizio Un'ingresso a rampa unitaria significa, essendo 5 il guadagno della controreazione, un'uscita desiderata con coefficiente (velocità) pari a 0.2. Avendo già il sistema un polo nell'origine esso è di tipo uno e quindi basta calcolare il guadagno dell'intera funzione di trasferimento a ciclo aperto a partire dalla specifica sull'errore:

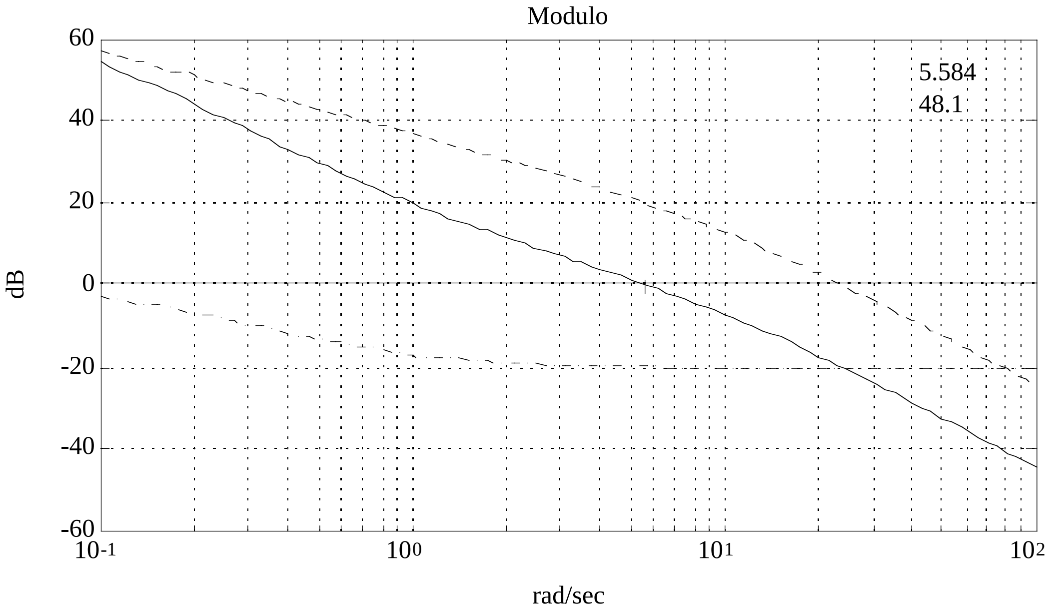
$$e_\infty = \frac{0.2}{k_F} \leq 0.003 \Rightarrow k_\mathrm{F} \geq 66.\overline{6}$$

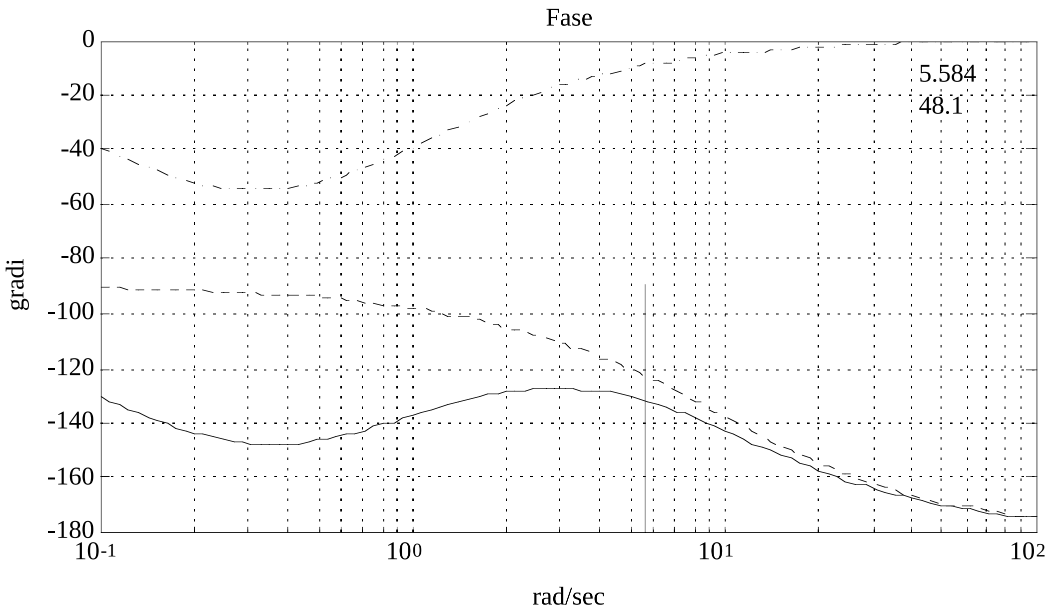
Assumendo $k_F = 70$, il guadagno del regolatore dovrà essere:

$$k_R = \frac{70}{(5 \cdot 0.75 \cdot 7/3)} = 8$$

Si devono tracciare quindi i diagrammi di Bode della funzione $F(s)$ col predetto guadagno (curva tratteggiata).

Si noti che la ω_T risulta molto maggiore di quanto richiesto ed la curva di fase è tale da soddisfare abbondantemente le specifiche qualora la curva dei moduli venga 'abbassata' in corrispondenza a $\omega = 5$rad/sec.





La funzione compensatrice da utilizzare è quindi un'attenuatrice, posizionata abbastanza a destra di $\omega = 5\text{rad/sec}$, con $m = 10$. La posizione esatta può essere determinata con l'ausilio delle curve a campana, in modo che il ritardo di fase aggiunto dalla compensazione sia abbastanza piccolo da permettere il soddisfacimento delle specifiche sul margine di fase. Risulta:

$$C(s) = \frac{s+1}{10s+1}$$

riportato a punto e tratto sui diagrammi. La funzione di trasferimento a ciclo aperto compensata è invece riportata con linea continua.

Terzo esercizio

Il tempo di campionamento specificato risulta abbastanza piccolo rispetto alle costanti di tempo in gioco ed è quindi possibile ricorrere a metodi approssimati.

a) Differenze all'indietro.

L'equazione differenziale che descrive il sistema è:

$$\ddot{y}(t) + 11\dot{y}(t) + 10y(t) = 10u(t)$$

da cui, sostituendo le espressioni approssimate delle derivate:

$$\frac{y_k - 2y_{\mathrm{k}-1} + y_{\mathrm{k}-2}}{0.05^2} + 11\frac{y_k - y_{\mathrm{k}-1}}{0.05} + 10y_k = 10u_{\mathrm{k}}$$

e quindi:

$$y_k = 1.619y_{\mathrm{k}-1} - 0.6349y_{\mathrm{k}-2} + 0.01587u_{\mathrm{k}}$$

b) Trasformazione bilineare.

Sostituendo l'espressione approssimata di $s = s(z)$ si ha:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2 + 2z + 1}{205z^2 - 318z + 117}$$

da cui l'equazione alle differenze:

$$y_k = 1.5512y_{\mathrm{k}-1} - 0.5707y_{\mathrm{k}-2} + 0.0488u_{\mathrm{k}} + 0.0976u_{\mathrm{k}-1} + 0.0488u_{\mathrm{k}-2}$$

Per quest'ultima espressione i valori dell'uscita applicando un'ingresso a gradino $\{1, 1, 1, 1, \cdots\}$ risultano:

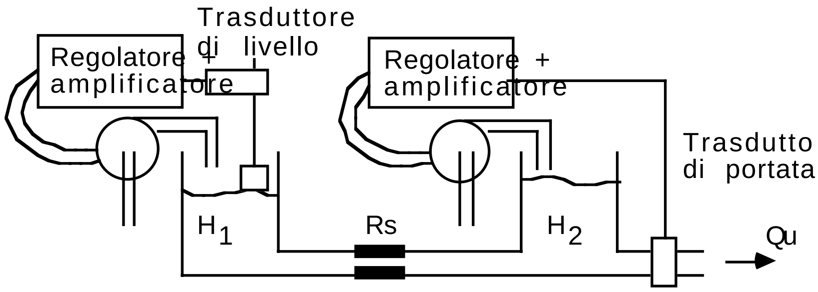
$\{0.0049, 0.0222, 0.0512, 0.0862, 0.1240, 0.1627, 0.2011, 0.2387, 0.2749, 0.3098 \cdots\}$.

E' interessante confontare i livelli di approssimazione introdotti: la posizione esatta dei poli in Z è data da $z_1 = e^{-1^{*}0.05} = 0.9512$ e $z_2 = e^{-10^{*}0.05} = 0.60653$ mentre quelle approssimate sono rispettivamente:

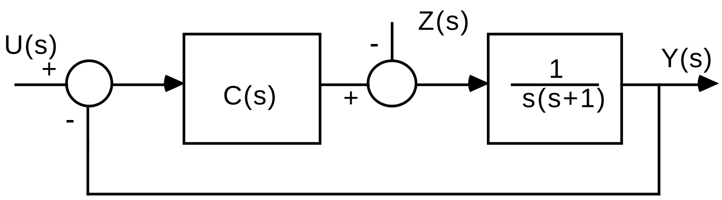
a) $z_1 = 0.952$ e $z_2 = 0.666$

b) $z_1 = 0.9512$ e $z_2 = 0.600$.

a) Il sistema di due serbatoi descritto in figura è destinato all'alimentazione idrica di un certo numaro di utenze, che assorbono complessivamente la portata Q_u. Per controllare il livello dei serbatoi si è predisposta una regolazione di livello standard sul primo serbatoio. Per aumentare la velocità di risposta, successivamente si è deciso di aggiungere il sistema di compensazione indicato a destra, costituito da un misuratore di portata cui è asservita una seconda pompa. Assumendo per i due gruppi regolatore-amplificatore-pompa due funzioni di trasferimento del tipo $K/(1+ts)$ si determini la funzione di trasferimento tra $Q_u(s)$ e $H_2(s)$. e si precisino qualitativamente le caratteristiche di detta funzione quando il fattore di quadagno K del sistema di compensazione vale 1 (compensazione esatta), $1 - \epsilon$ (compensazione approssimata), 0 (assenza di compensazione). Precisare cosa accadrebbe in caso di ostruzione della condotta di scambio $R_s = \infty$.



b) Sia dato il sistema di controllo illustrato. Si determini $C(s)$ in modo che l'errore a regime per un ingresso a gradino unitario sia nullo, per un disturbo a gradino unitario sia < 0.01 ed inoltre si abbiauna banda passante a ciclo chiuso maggiore di 1.3 Hz, con un margine di fase maggiore di 50°. Determinare infine la funzione di trasferimento tra $Z(s)$ e l'uscita di $C(s)$.



c) Si debba misurare una temperatura variabile da $0°C$ a $100°C$ con una risoluzione di $0.5°C$ con un trasduttore temperatura-tensione che ha una sensibilità di $0.03V/°C$. Determinare il numero di bit del convertitore A/D ed il guadagno che deve essere inserito per adeguare il trasduttore al convertitore, se questo accetta da 0 a 10 V di ingresso.

Soluzione

Primo esercizio

In primo luogo occorre notare che la somma della portata di disturbo e di quella fornita dal dispositivo di compensazione vale:

$$Q_u(s)\left(1 - \frac{k_2}{1 + \tau_2 s}\right)$$

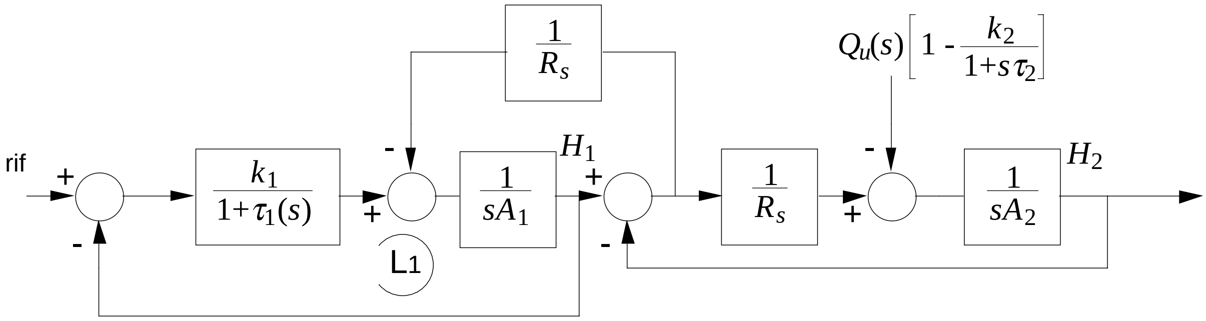
e assumere questo come ingresso disturbante. Lo schema a blocchi iniziale risulta allora il primo riportato in figura.

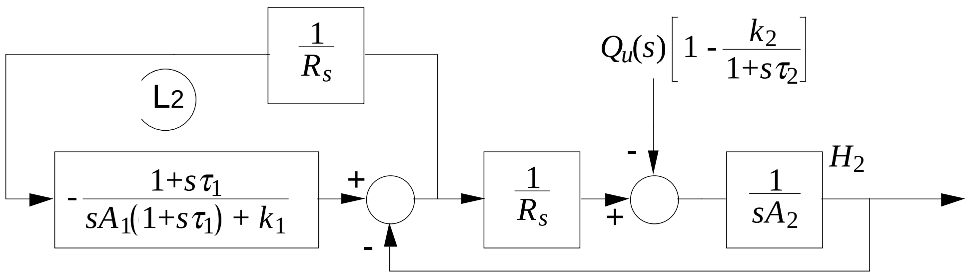
Tenendo conto che si richiede la funzione di trasferimento disturbo-uscita, si può porre pari a zero il riferimento, assorbendo il segno - del sommatore nel primo blocco. Questo può essere visto come blocco in controreazione di un loop (L_1) avente in catena diretta il secondo blocco e come ingresso la portata di scambio. Assorbendo questo anello, ponendo attenzione ai segni, si ottiene il secondo schema a blocchi.

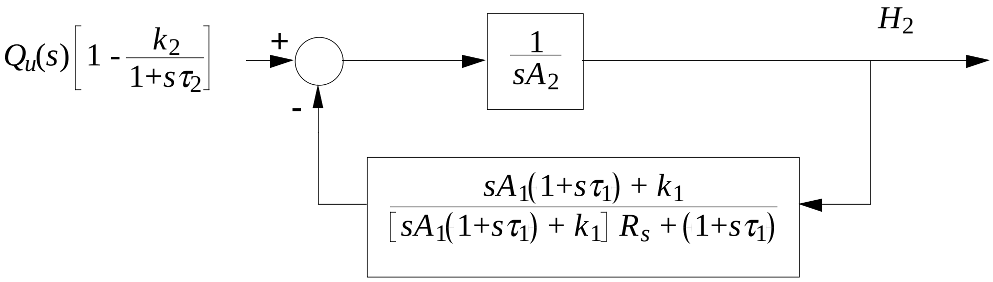
La stessa procedura può essere applicata ora al loop L_2, avente funzione di trasferimento in catena diretta unitaria (non compaiono blocchi). Si ottiene così il terzo schema che permette il calcolo della funzione di trasferimento disturbo-uscita e la risposta qualitativa ai rimanenti quesiti. Se la compensazione è esatta, l'errore a regime risulta nullo. Comunque è presente un errore transitorio, non essendo questa istantanea. Se la compensazione è approssimata o addirittura è assente è presente un errore a regime proporzionale a ϵ inversamente proporzionale al guadagno del blocco in controreazione che vale:

$$\frac{k_1}{k_1 R_s + 1}$$

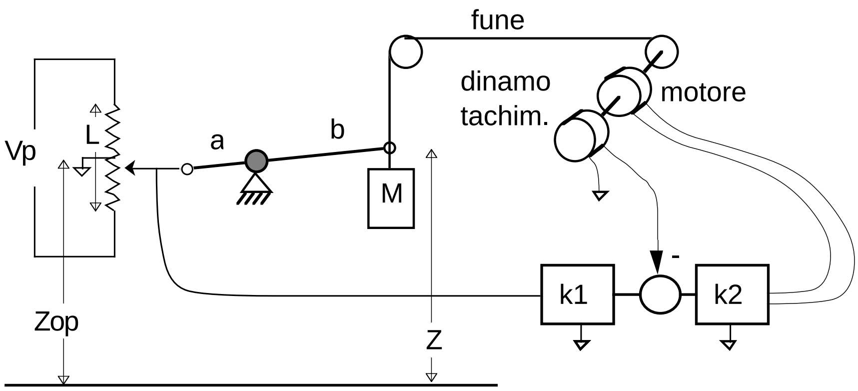
Chiaramente nel caso di ostruzione del condotto ($R_s = \infty$) l'uscita del sistema diverge, salvo che la compensazione sia esatta. D'altra parte ciò poteve essere intuito da un'analisi qualitativa del sistema. Nella situazione in oggetto esso si spezza nei due sottosistemi costituiti dai due serbatoi con i relativi organi di controllo, ed il secondo è il classico esempio di sistema al limite di stabilità che si cerca di controllare per compensazione.


rif
+
-
$\frac{k_1}{1+\tau_1(s)}$
-
+
L1
$\frac{1}{sA_1}$
H_1
+
-
$\frac{1}{R_s}$
$\frac{1}{R_s}$
$Q_u(s)\left[1-\frac{k_2}{1+s\tau_2}\right]$
-
+
$\frac{1}{sA_2}$
H_2


$\frac{1}{R_s}$
L2
$-\frac{1+s\tau_1}{sA_1(1+s\tau_1)+k_1}$
+
-
$\frac{1}{R_s}$
$Q_u(s)\left[1-\frac{k_2}{1+s\tau_2}\right]$
-
+
$\frac{1}{sA_2}$
H_2


$Q_u(s)\left[1-\frac{k_2}{1+s\tau_2}\right]$
+
-
$\frac{1}{sA_2}$
H_2
$\frac{sA_1(1+s\tau_1)+k_1}{\left[sA_1(1+s\tau_1)+k_1\right]R_s+(1+s\tau_1)}$

a) Il sistema illustrato è utilizzato per posizionare la massa M (soggetta a gravità) in un piccolo intervallo di valori Z. La posizione desiderata è imposta modificando l'altezza Z_{op} del potenziometro.



- Determinare il segno della tensione V_p per ottenere una reazione negativa, assumento che il motore ruoti in senso orario per tensioni di alimentazione positive.
- Tracciare lo schema a blocchi dell'intero sistema, portandolo ad un solo anello, per un motore alimentato in tensione sull'armatura.
- Specificare l'influenza di V_p e della posizione del fulcro della leva sulla funzione di trasferimento a ciclo aperto.

b) Per un processo descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$\frac{100(s+1)}{(s+50)(s^2+12s+20)}$$

determinare il controllore in modo che:

- L'errore a regime per una rampa di ingresso unitaria sia minore di 0.04
- La pulsazione di attraversamento sia maggiore di $4\,rad/sec$
- Il margine di fase sia maggiore di 50°.

c) Determinare i primi 6 campioni della risposta a gradino per un sistema tempo discreto la cui funzione di trasferimento in z abbia tre poli nell'origine ed uno in $(1 + j\,0)$.

Soluzione

Primo esercizio

Dal funzionamento qualitativo del sistema risulta che una tensione positiva applicata al motore provova l'innalzamento della massa e quindi l'abbassamento del cursore. Affinchè ciò provochi un'azione che si oppone al movimento, il morstto negativo di V_p deve essere in basso e quello positivo in alto.

La costante di trasduzione del potenziometro vale $k_p = V_p/L$ e la tensione che esso fornisce è $k_p(z^{'} - z_{0p})$, essendo $z^{'}$ la quota del cursore. Per la leva si ha:

$$\frac{z - z_{\mathrm{f}}}{\mathrm{b}} = -\frac{z^{'} - z_{\mathrm{f}}}{\mathrm{a}}$$

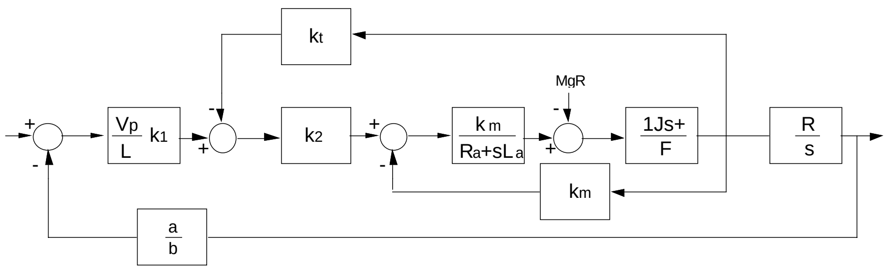
essendo $z^{'}$ la quota del fulcro. Quindi

$$z^{'} = -\frac{a}{b}z + \frac{b+a}{b}\mathrm{z_f}$$

Ne risulta lo schema in figura ove con R si è indicata la puleggia collegata al motore e gli altri simboli sono di ovvio significato. In particolare J rappresenta l'inerzia totale comprensiva del contributo MR^2 dato dalla massa.

L'ingresso risulta dato da $-z_{0p} + \frac{b+a}{b}\mathrm{z_f}$ quindi l'altezza del potenziometro risulta riferita ad una quota legata a quella del fulcro della leva e una sua variazione ne produce una di segno contrario all'uscita del sistema.

La riduzione dello schema a blocchi non è impegnativa e viene lasciata allo studente.



Secondo esercizio

Si noti che il processo in oggetto non ha poli nell'origine; poichè le specifiche richiedono un sistema di tipo uno, occorre aggiungerne uno nel controllore.

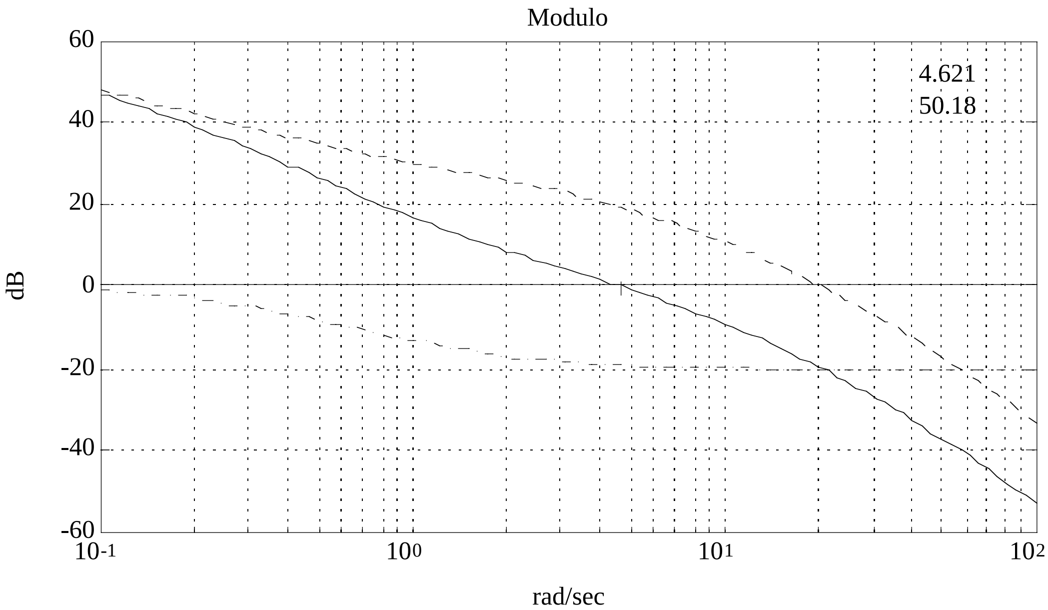
Si ha $k_p = 0.1$ e mentre deve risultare:

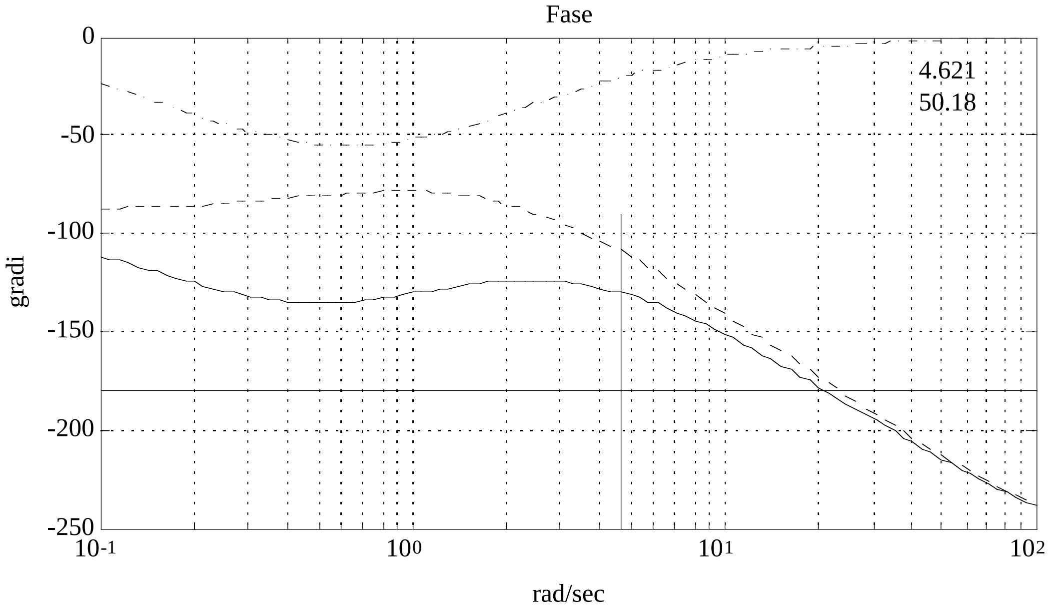
$$k_F \geq \frac{1}{0.04} = 25$$

si pone quindi $k_c = 250$ e si traccia il diagramma di Bode di

$$\frac{250}{s}P(s)$$

riportato a tratto nelle figure.





Evidentemente la ω_T è molto alta rispetto alle specifiche.

Vale la pena ricordare che ciò non è infrequente nella prassi in quanto il guadagno introdotto dal controllore per soddisfare le specifiche a regime ha anche l'effetto di aumentare la prontezza di risposta del sistema. Ma ciò è ottenuto a discapito del dimensionamento degli attuatori, che devono anch'essi risultare più pronti ed in grado di fornire picchi della grandezza di forzamento del processo più elevati, risultando pertanto più costosi.

In questo caso la scelta più appropriata è quella di impiegare una rete attenuatrice, in quanto l'andamento della fase del sistema non compensato è tale da garantire il margine di fase richiesto semplicemente abbassando la curva dei moduli in corrispondenza della ω_T desiderata. In altre parole il valore della fase a 4 rad/sec è maggiore di $-130°$.

Il valore di attenuazione richiesta è pari a 20dB, ovvero 10. Sceglieremo quindi $m = 10$ e

$$C^{'}(s) = \frac{0.5s + 1}{5s + 1}$$

ottenendo così gli andamenti riportati nei grafici.

Secondo esercizio

Il sistema in oggetto ha funzione di trasferimento in z data da:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z^3(z-1)} = \frac{z^{-4}}{1 - z^{-1}}$$

cui corrisponde una equazione alla differenze:

$$y_k = y_{\mathrm{k}-1} + u_{\mathrm{k}-4}$$

I campioni cercati sono quindi,assumendo $u_0 = 1$,

$$Y_k = \{000012\cdots\}, k = 0, \cdots$$

.