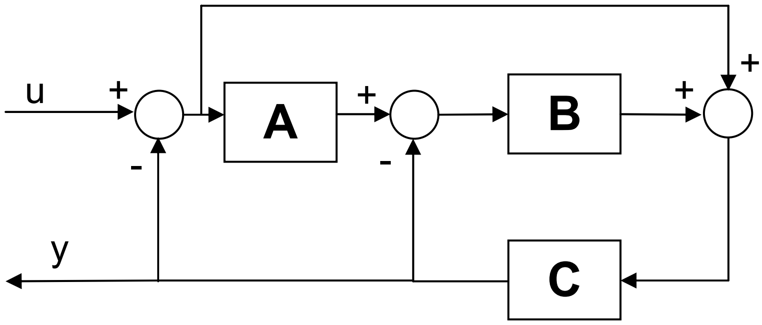
Esame di Fondamenti di Automatica
Corso di Laurea Vecchio Ordinamento in Ingegneria Meccanica
26 giugno 2002 - Compito **A**

Cognome:	Nome	Matricola:	E-mail:

1. Ricavare la funzione di trasferimento tra **u** ed **y** nel seguente schema a blocchi:

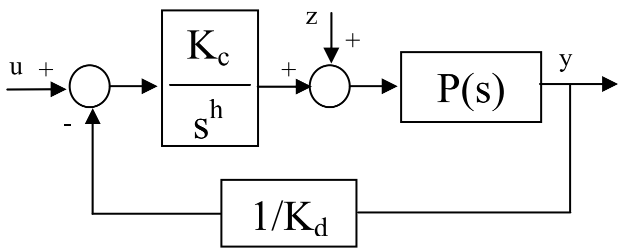


2. Sia dato un processo **P(s)** descrivibile mediante la funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{(s+1)(s/100+1)}{s^2/100 + 0.06s + 1}$$

Sintetizzare il sistema di controllo in figura (determinare **h** e **K_c**) in modo tale che:

- il guadagno a ciclo chiuso sia uguale a **3**
- l'errore per ingresso a rampa **u(t)=2t** sia minore o uguale a **3.6**



Scelto il valore **minimo** di **K_c** compatibile con le specifiche, tracciare i diagrammi di **BODE** e **NYQUIST** della funzione a ciclo aperto, e determinare su questi la pulsazione di attraversamento (ω_t) e, in caso di sistema stabile a ciclo chiuso, i margini di stabilità (**m_ϕ** e **m_g**).

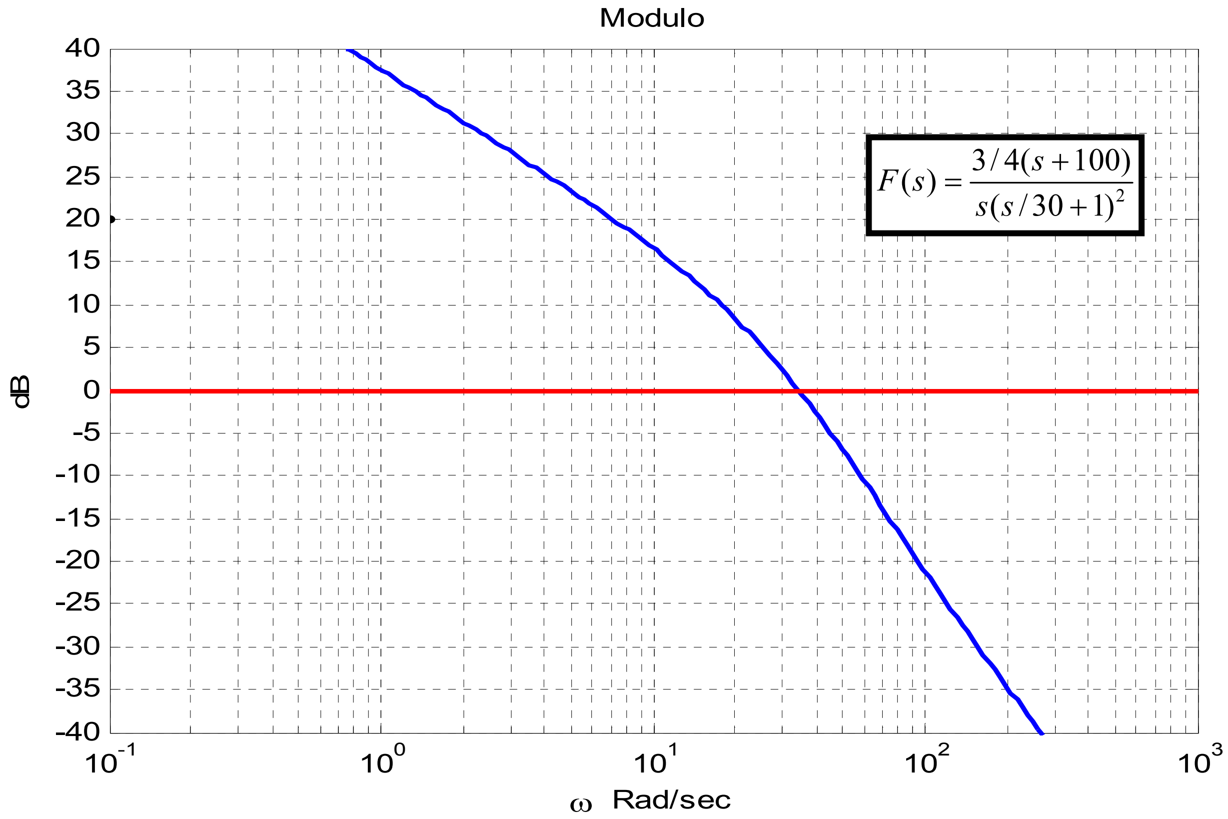
Infine calcolare:

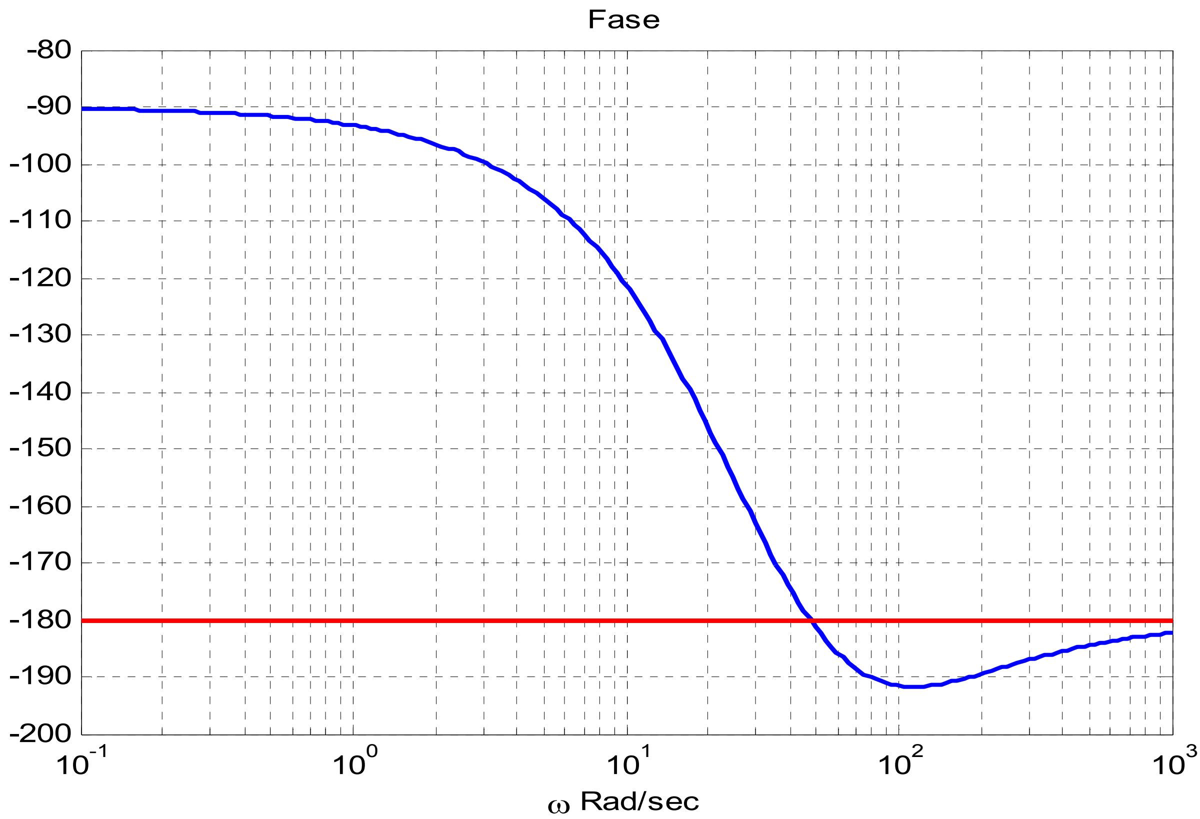
- l'effetto in uscita a regime di un disturbo **z(t)=3t**.
- fino a che pulsazione l'errore di riproduzione di una sinusoide unitaria risulti minore di **0.3**.

3. Dato il sistema di equazioni differenziali $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = Cx \end{cases}$ con $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3/2 \\ 1 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ già in forma di Kalman di controllabilità, determinare anche gli autovalori appartenenti al sottospazio non osservabile e trovare il valore **Kp** di un controllore statico dall'uscita puramente proporzionale tale da ottenere tutte dinamiche a parte reale minore o uguale a -1.

4. Illustrare il criterio di Nyquist ed accennare i passaggi della sua dimostrazione.

5. Dato il diagramma di **BODE** della funzione di trasferimento a ciclo aperto **F(s)** sotto riportata determinare la rete compensatrice **R(s)** tale da assicurare ω_t**>30** Rad/sec e **m**$_\phi$>35°. Tracciare quindi il diagramma di **NICHOLS** della funzione compensata **F'(s)=F(s)R(s)** e determinare su di esso il modulo alla risonanza **Mr** e la banda passante a –3 Decibel.





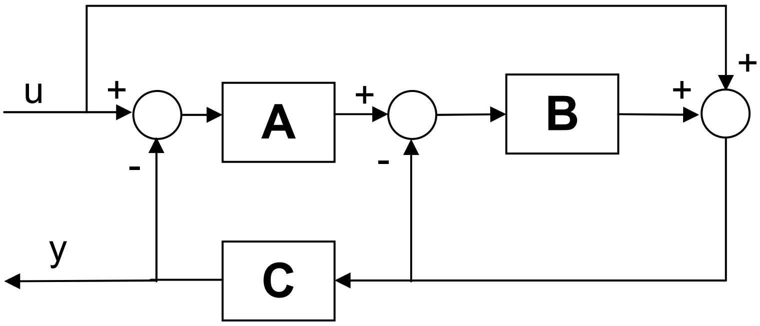
Esame di Fondamenti di Automatica

Corso di Laurea Vecchio Ordinamento in Ingegneria Meccanica

26 giugno 2002 - Compito **B**

Cognome:	Nome	Matricola:	E-mail:

1. Ricavare la funzione di trasferimento tra **u** ed **y** nel seguente schema a blocchi:

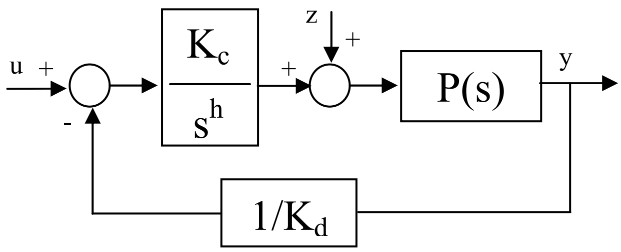


2. Sia dato un processo **P(s)** descrivibile mediante la funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{(s^2 + 6s + 100)}{(s+1)(s/100+1)}$$

Sintetizzare il sistema di controllo in figura (determinare **h** e $\mathbf{K_c}$) in modo tale che:

- il guadagno a ciclo chiuso sia uguale a **2**
- l'errore per ingresso a rampa **u(t)=10t** sia minore o uguale a **0.004**



Scelto il valore **minimo** di $\mathbf{K_c}$ compatibile con le specifiche, tracciare i diagrammi di **BODE** e **NYQUIST** della funzione a ciclo aperto, e determinare su questi la pulsazione di attraversamento (ω_t) e, in caso di sistema stabile a ciclo chiuso, i margini di stabilità ($\mathbf{m_\phi}$ e $\mathbf{m_g}$).

Infine calcolare:

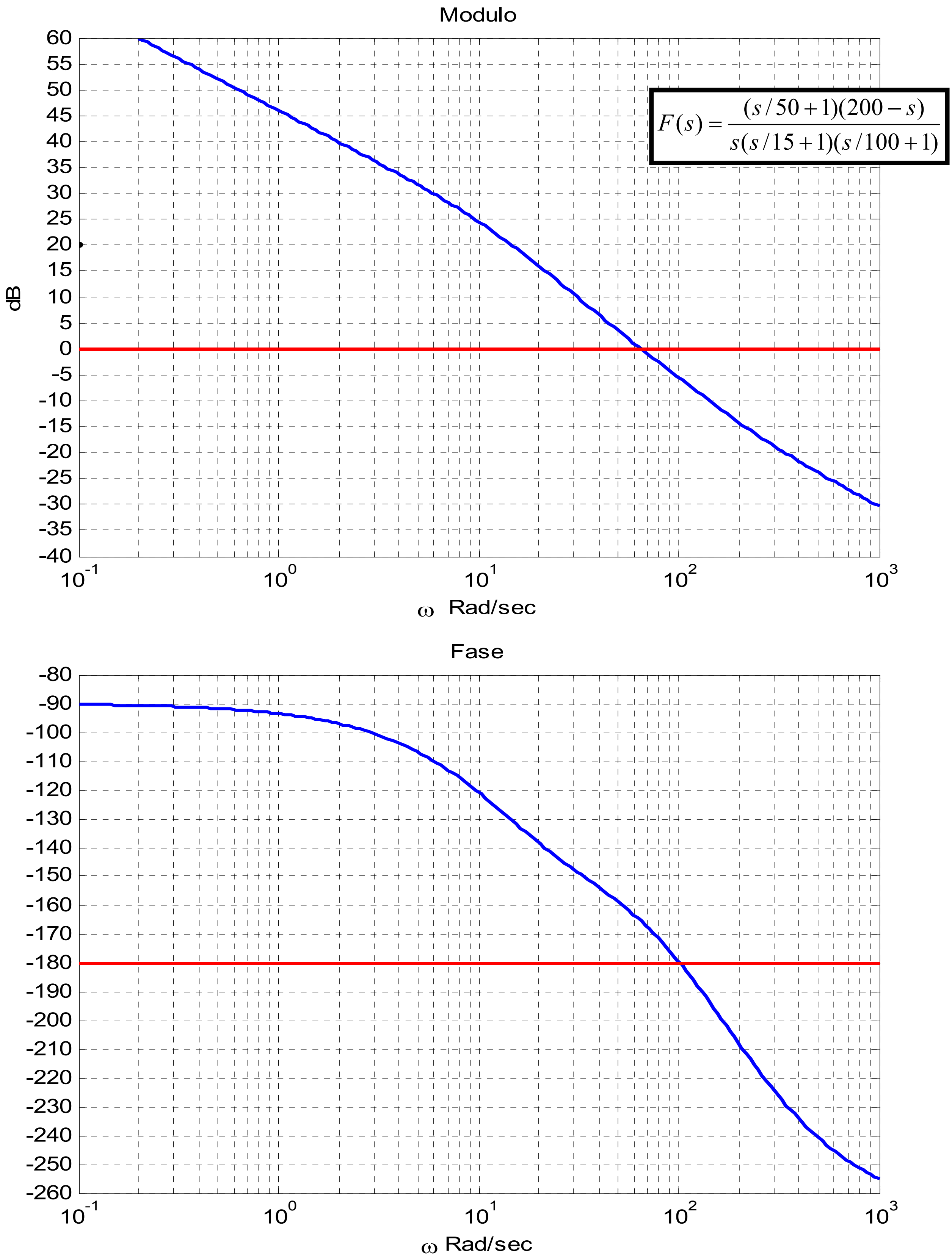
- l'effetto in uscita a regime di un disturbo $\mathbf{z(t)=2t^2}$.
- fino a che pulsazione l'errore di riproduzione di una sinusoide unitaria risulti minore di **0.2**.

3. Dato il sistema di equazioni differenziali $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = Cx \end{cases}$ con $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

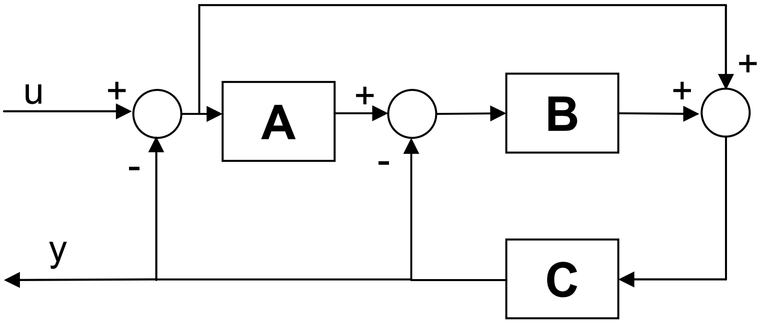
già in forma canonica di Jordan, determinare la risposta forzata **y(t)** con $\mathbf{u(t)=\delta_{-1}(t)}$ e condizioni iniziali nulle.

4. Mostrare l'equivalenza tra gli autovalori della matrice di stato di un sistema "un ingresso-un'uscita" ed i poli della sua funzione di trasferimento ed illustrare il significato della possibile cancellazione di alcuni di questi.

5. Dato il diagramma di **BODE** della funzione di trasferimento a ciclo aperto **F(s)** sotto riportata determinare la rete compensatrice **R(s)** tale da assicurare ω_t**<50** Rad/sec e **m**$_\phi$>20°. Tracciare quindi il diagramma di **NICHOLS** della funzione compensata **F'(s)=F(s)R(s)** e determinare su di esso il modulo alla risonanza **Mr** e la banda passante a –3 Decibel.



Schema a Blocchi (A)



$$W(s) = \frac{C(1 + AB)}{1 + C + BC + ABC}$$

- Kd=3 per avere il guadagno a ciclo chiuso richiesto,
- h=1 per avere un sistema di controllo di tipo 1 (errore finito per ingresso a rampa)
- Kc>= 5 in conseguenza della specifica sull'errore.

$$P(s) = K_p \frac{N_p(s)}{D_p(s)}$$

$$W_z(s) = \frac{sK_d K_p N_P(s)}{sK_d D_P(s) + K_c K_p N_P(s)}$$

$$z(s) = \frac{3}{s^2}$$

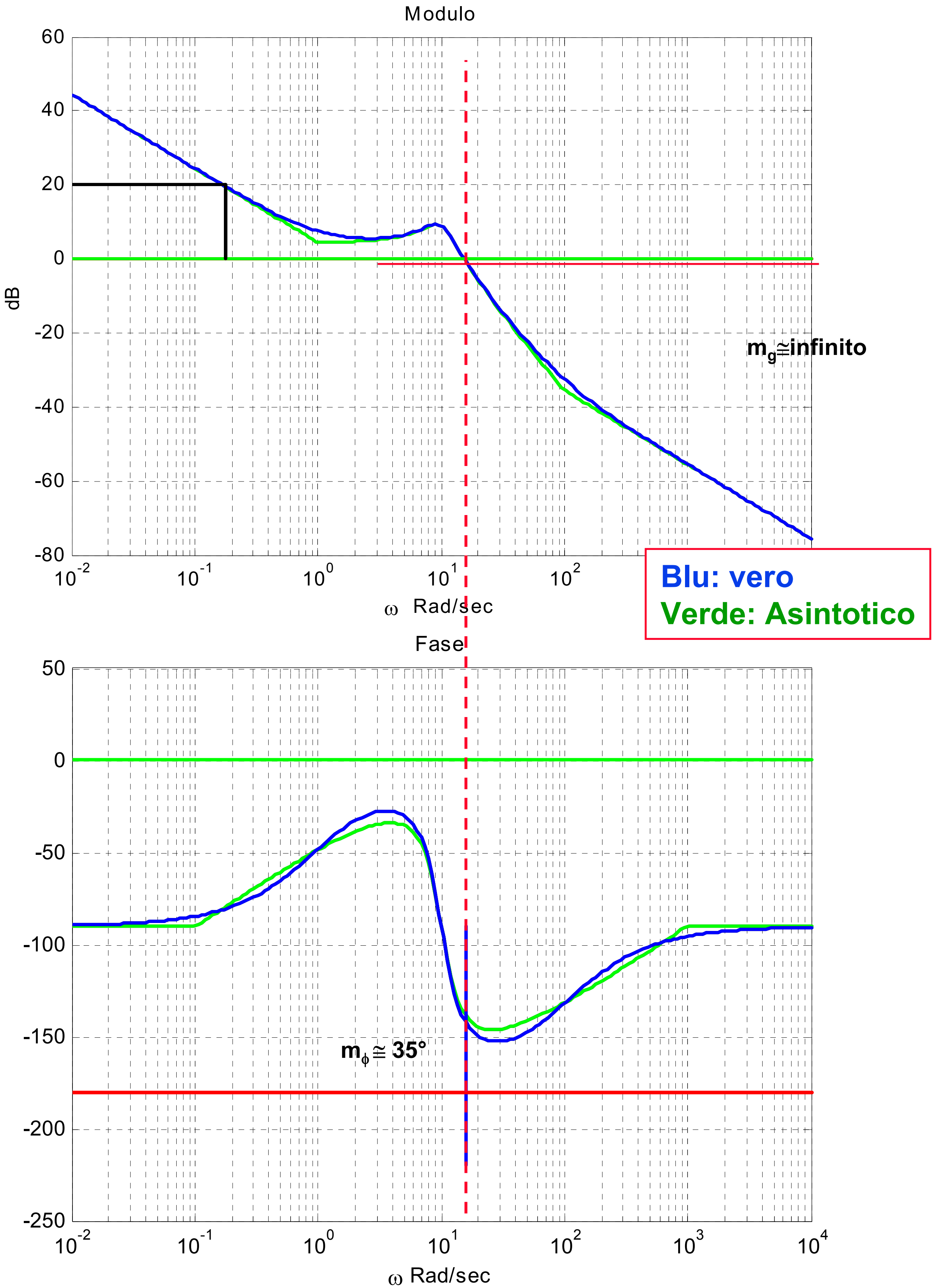
$$z(\infty) = \lim_{s \to 0} sW_z(s)z(s) = \frac{K_d}{K_c}3 = \frac{9}{5}$$

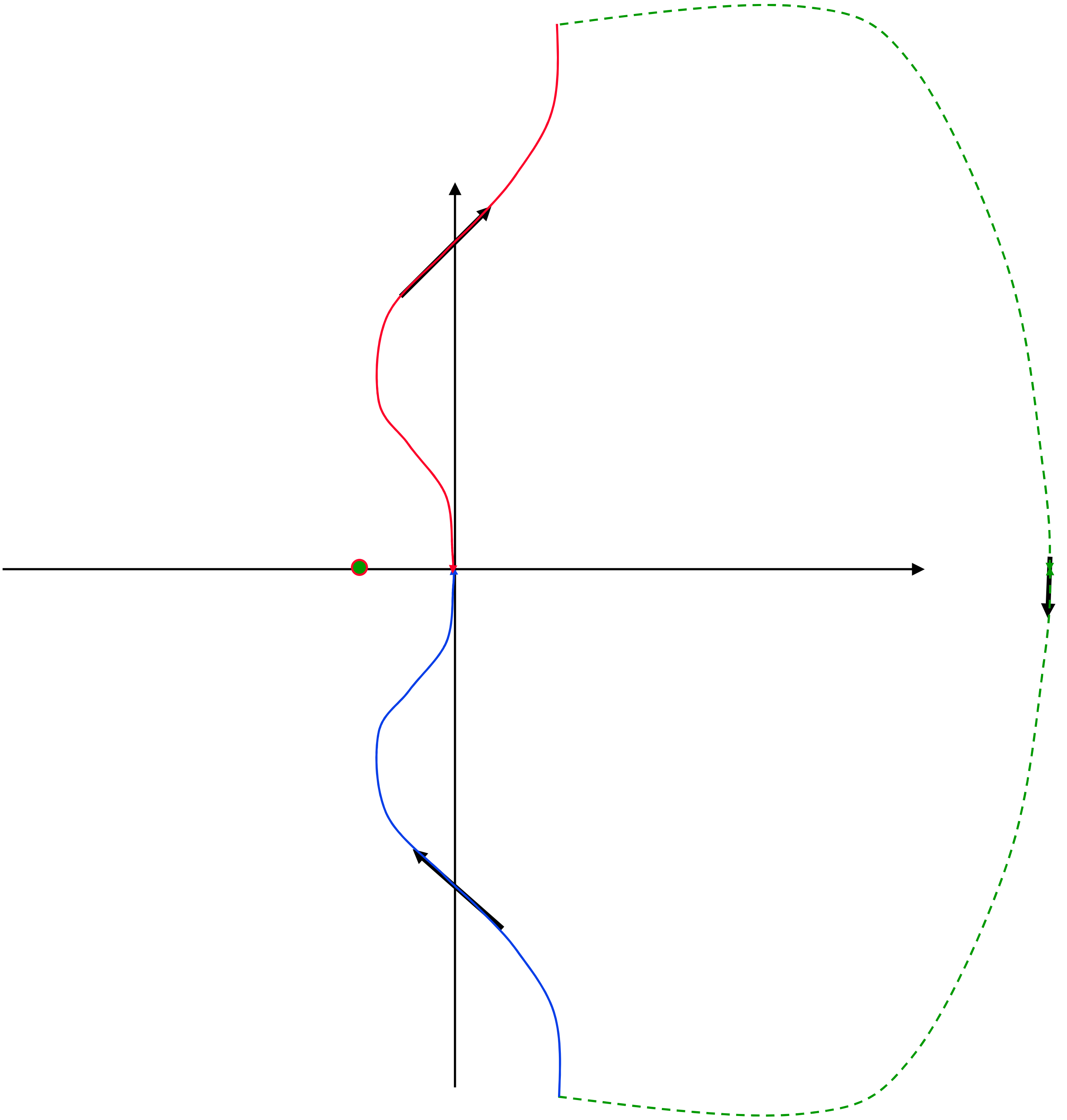
$$\left|\frac{K_d}{1+F(j\omega)}\right| < e$$

$$|F(j\omega)| > \frac{K_d}{e} = \frac{3}{0.3}$$

$$|F(j\omega)| > 10 = 20dB$$

fino a $\omega < 0.17$ rad/sec


Modulo
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
dB
10^{-2} 10^{-1} 10^{0} 10^{1} 10^{2}
ω Rad/sec
$m_g \cong$ infinito
Blu: vero
Verde: Asintotico
Fase
50
0
-50
-100
-150
-200
-250
$m_\phi \cong 35°$
10^{-2} 10^{-1} 10^{0} 10^{1} 10^{2} 10^{3} 10^{4}
ω Rad/sec



$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3/2 \\ 1 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

L'autovalore della parte non controllabile è -1, quindi possiamo sicuramente continuare con la sintesi e cervare di capire se c'è qualche dinamica non osservabile e che quindi non potrà essere spostata con una controreazione dall'uscita.

Possiamo provare a calcolare, a tal scopo, la funzione di trasferimento sul sottosistema controllabile:

$$F(s) = C_1(sI - A_{11})^{-1}B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -4 \\ -1 & s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 4 \\ 1 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{s^2 - 4} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2s + 4 & -8 - 4s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{s^2 + 4} = \frac{2(s+2)}{s^2 - 4} = \frac{2}{s - 2}$$

Poichè compare un solo polo in +2 ne deduciamo che questo è sicuramente osservabile.

Per sapere se l'autovalore in -1 è osservabile o meno (scomparirebbe comunque a causa della non controllabilità) vediamo quanto vale il rango della matrice di osservabilità:

$$O = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 3 \\ 8 & 16 & 9 \end{pmatrix}$$

Il determinante è nullo ma esiste un minore di dimensione 2 con determinante diverso da zero, quindi il rango è 2. A questo punto possiamo affermare la dinamica non osservabile è quella in -2 mentr -1 rimane solamente non controllabile.

Per trovare il K_p possiamo adesso calcolare il nuovo polo:

$$W(s) := \frac{2K_p}{s - 2 + 2K_p}$$

il polo si trova dunque in $2 - 2K_p$

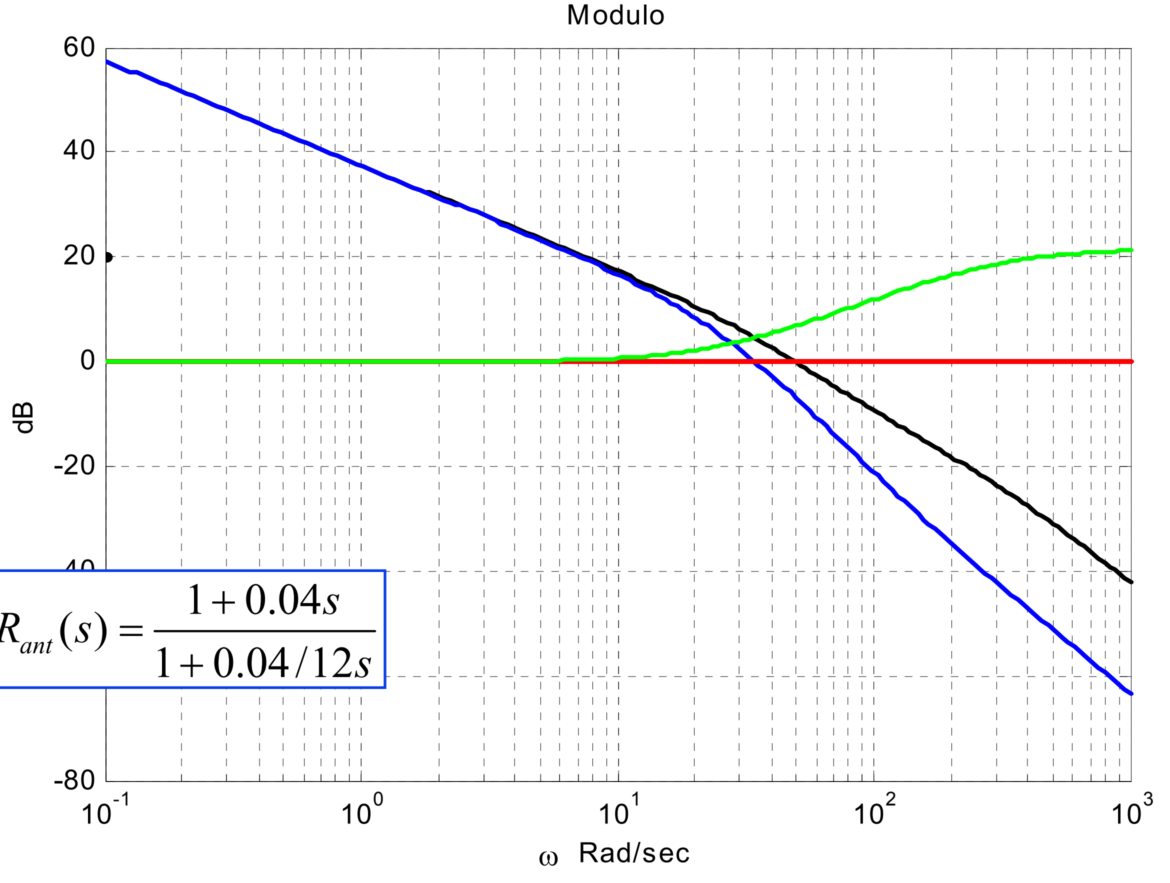
affinchè sia a sinistra di -1 basterà porre

$2 - 2K_p < -1$

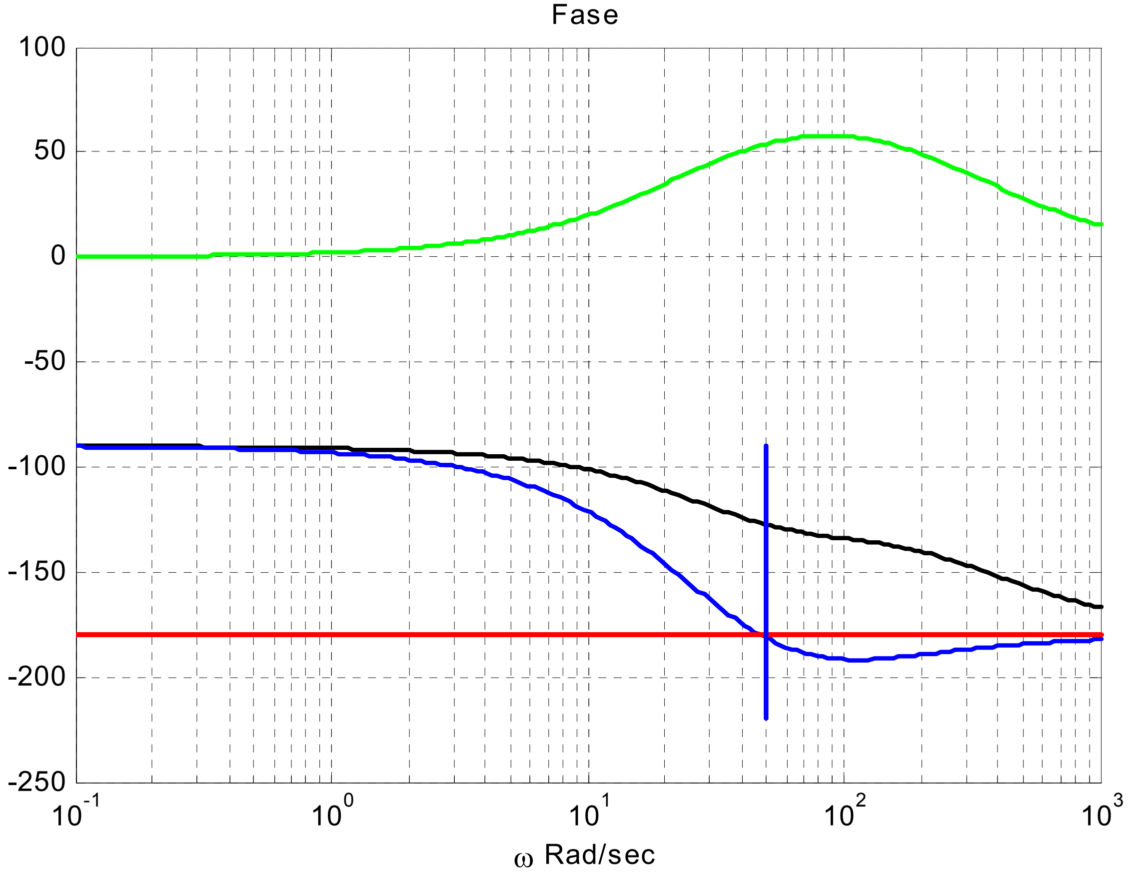
da cui

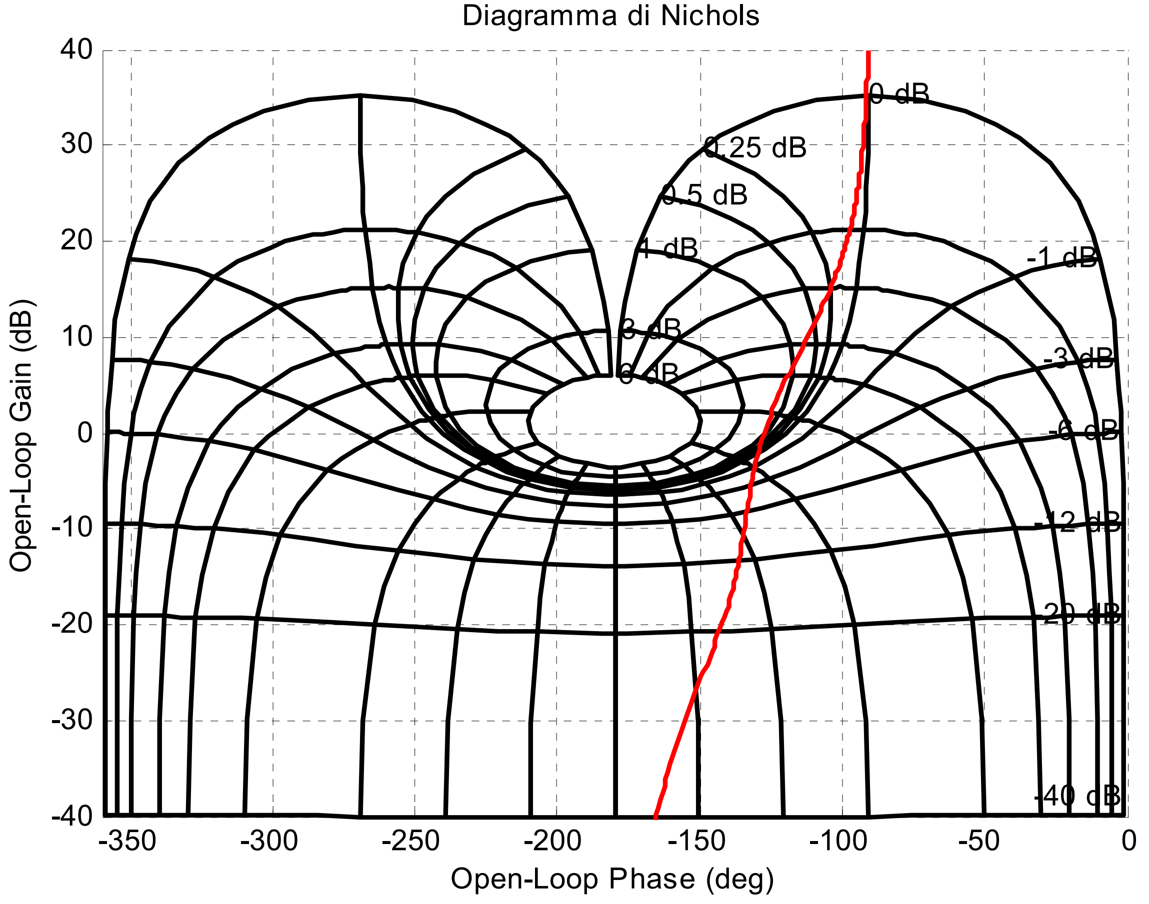
$K_p > 3/2$

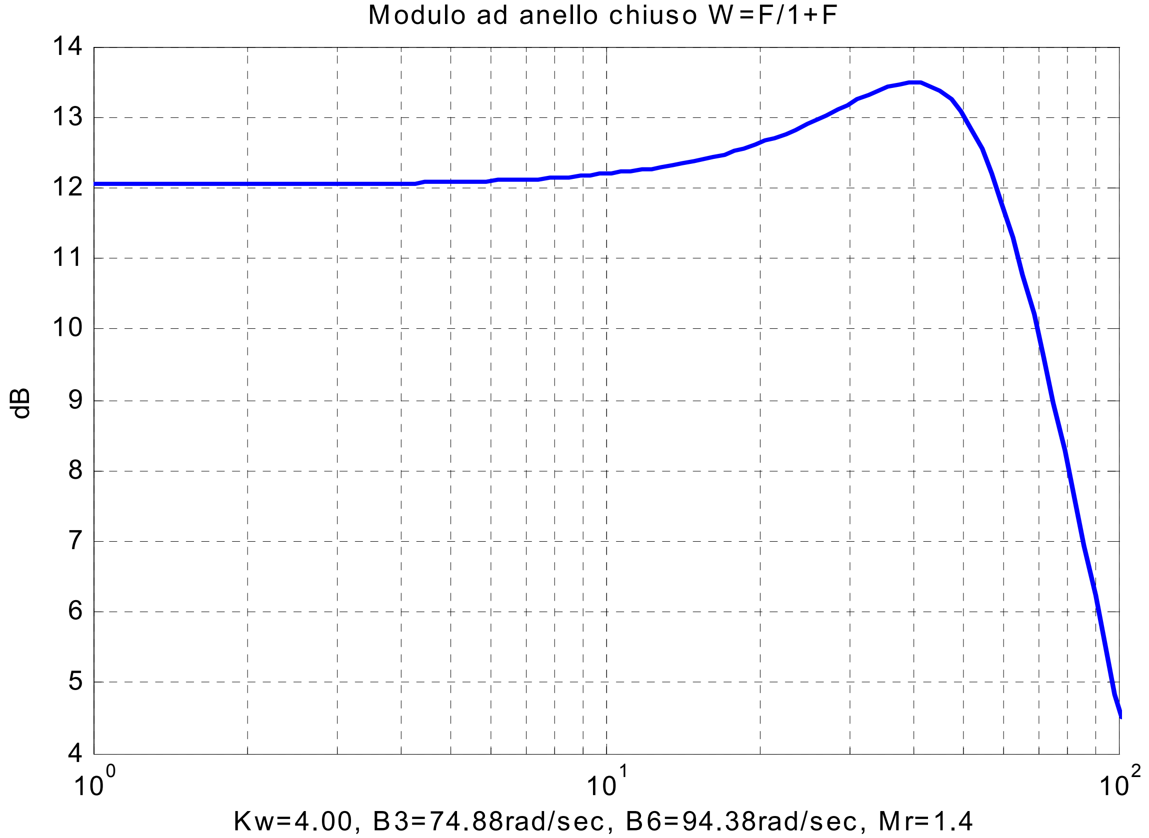
Sintesi Rete (A)



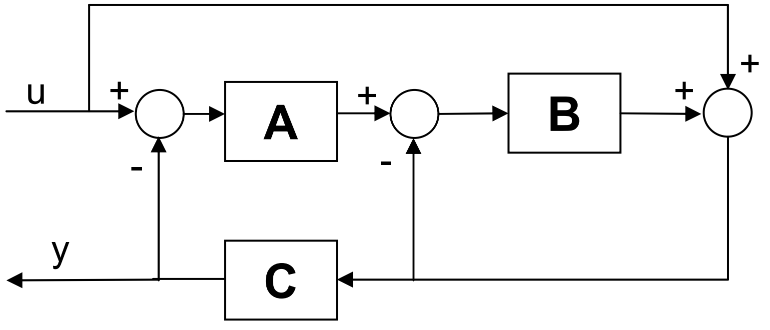
$$R_{ant}(s) = \frac{1 + 0.04s}{1 + 0.04/12s}$$







Kw=4.00, B3=74.88rad/sec, B6=94.38rad/sec, Mr=1.4



$$W(s) = \frac{C(AB+1)}{1+B+ABC}$$

- Kd=2 per avere il guadagno a ciclo chiuso richiesto,
- h=1 per avere un sistema di controllo di tipo 1 (errore finito per ingresso a rampa)
- Kc>= 100 in conseguenza della specifica sull'errore.

$$P(s) = K_p \frac{N_p(s)}{D_p(s)}$$

$$W_z(s) = \frac{sK_d K_p N_P(s)}{sK_d D_P(s) + K_c K_p N_P(s)}$$

$$z(s) = \frac{4}{s^3}$$

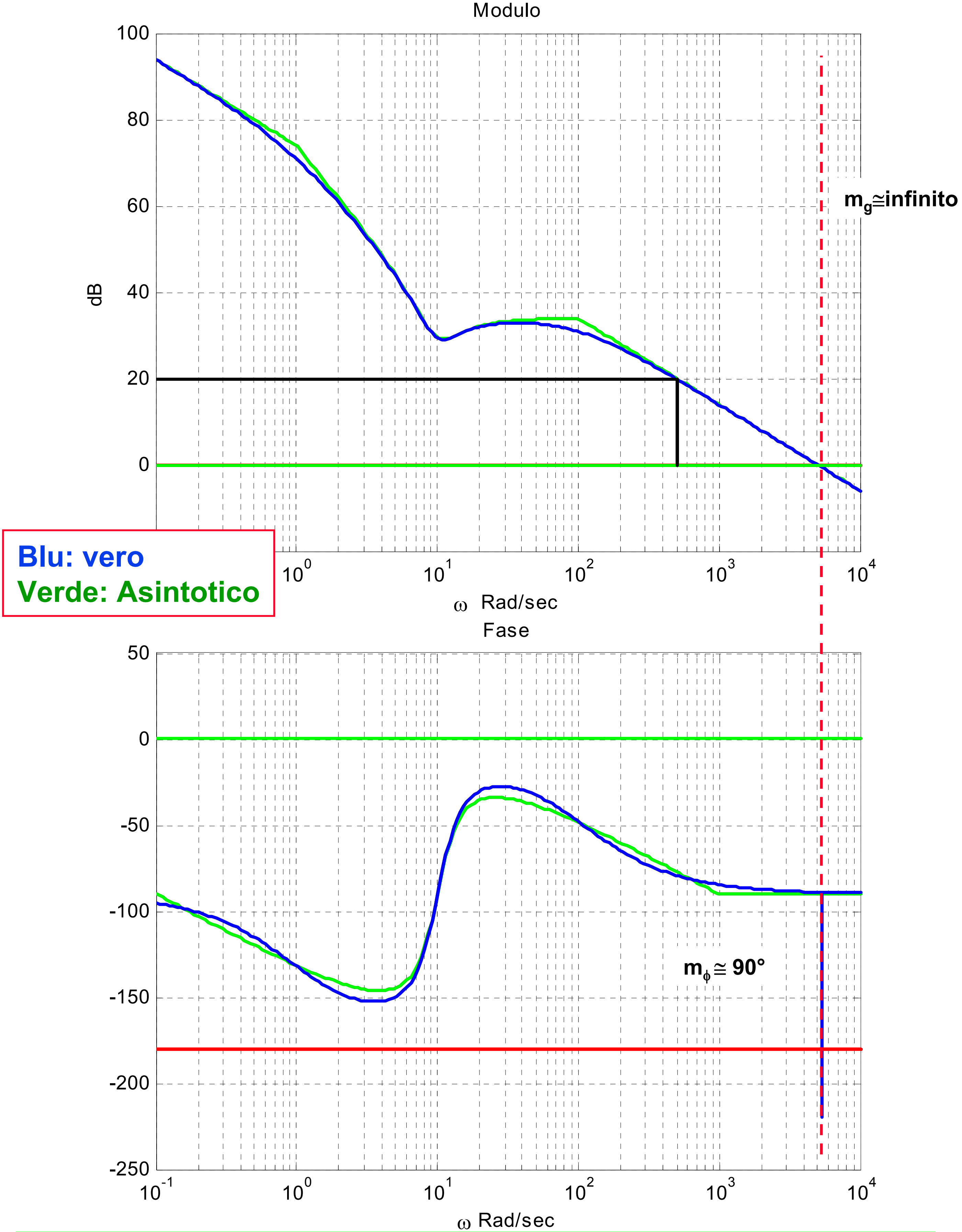
$$z(\infty) = \lim_{s \to 0} sW_z(s)z(s) = \infty$$

$$\left|\frac{K_d}{1+F(j\omega)}\right| < e$$

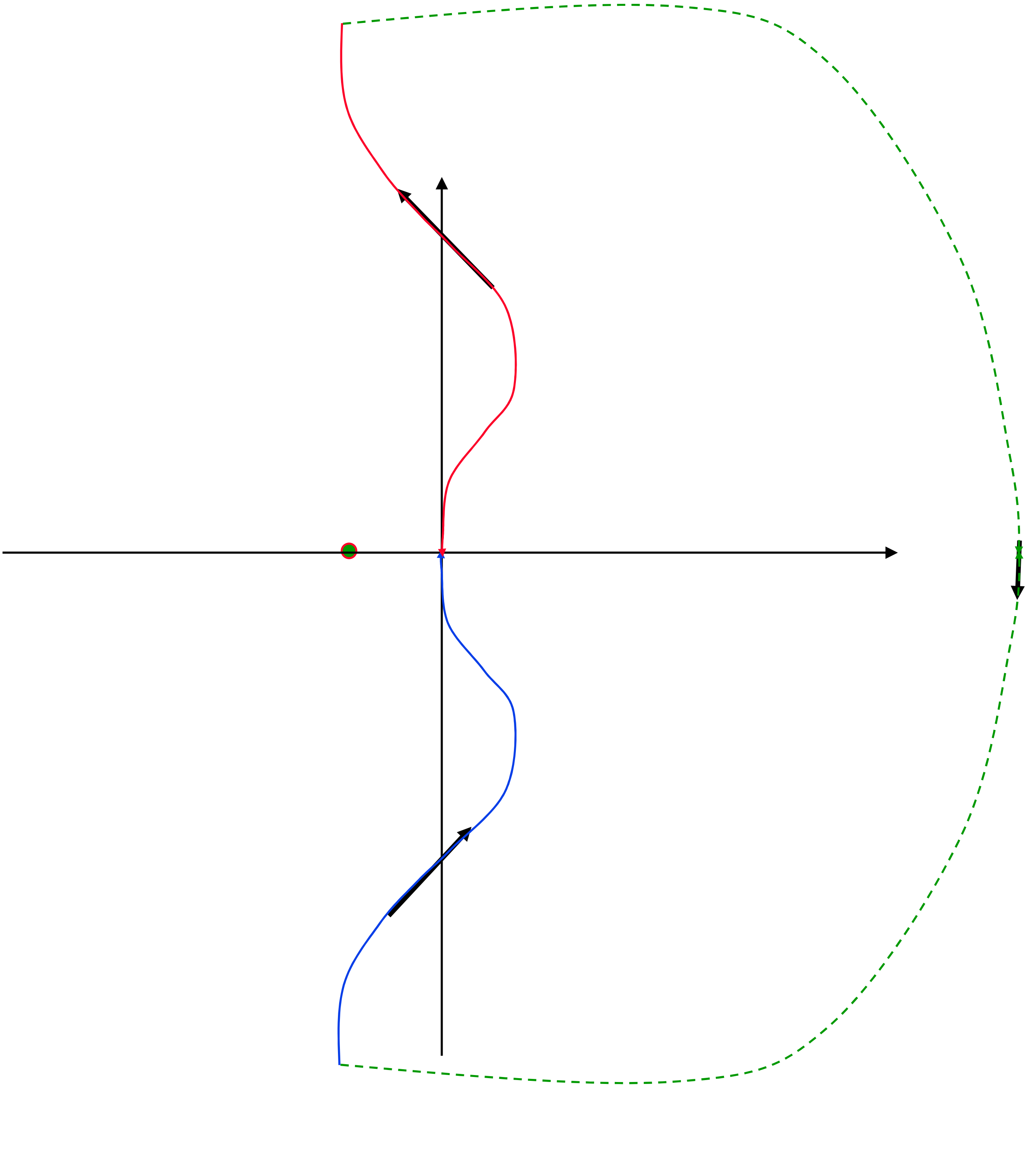
$$|F(j\omega)| > \frac{K_d}{e} = \frac{2}{0.2}$$

$$|F(j\omega)| > 10 = 20dB$$

$$\text{fino a } \omega < 500 \text{ rad/sec}$$


Modulo
100
80
60
40
20
0
dB
mg≅infinito
Blu: vero
Verde: Asintotico
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4
ω Rad/sec
Fase
50
0
-50
-100
-150
-200
-250
mφ≅ 90°
10^-1
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4
ω Rad/sec

Nyquist (B)



$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Poichè la matrice b ha uno zero in ultima posizione la dinamica -1 non sarà controllabile. Invece, a causa dell -2 nella matrice C la stessa dinamica sarà osservabile. Possiamo calcolare la funzione di trasferimento del sistema limitandoci alle due dinamiche in -2:

$$F(s) = C_1(sI - A_{11})^{-1}B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{(s+2)^2} =$$

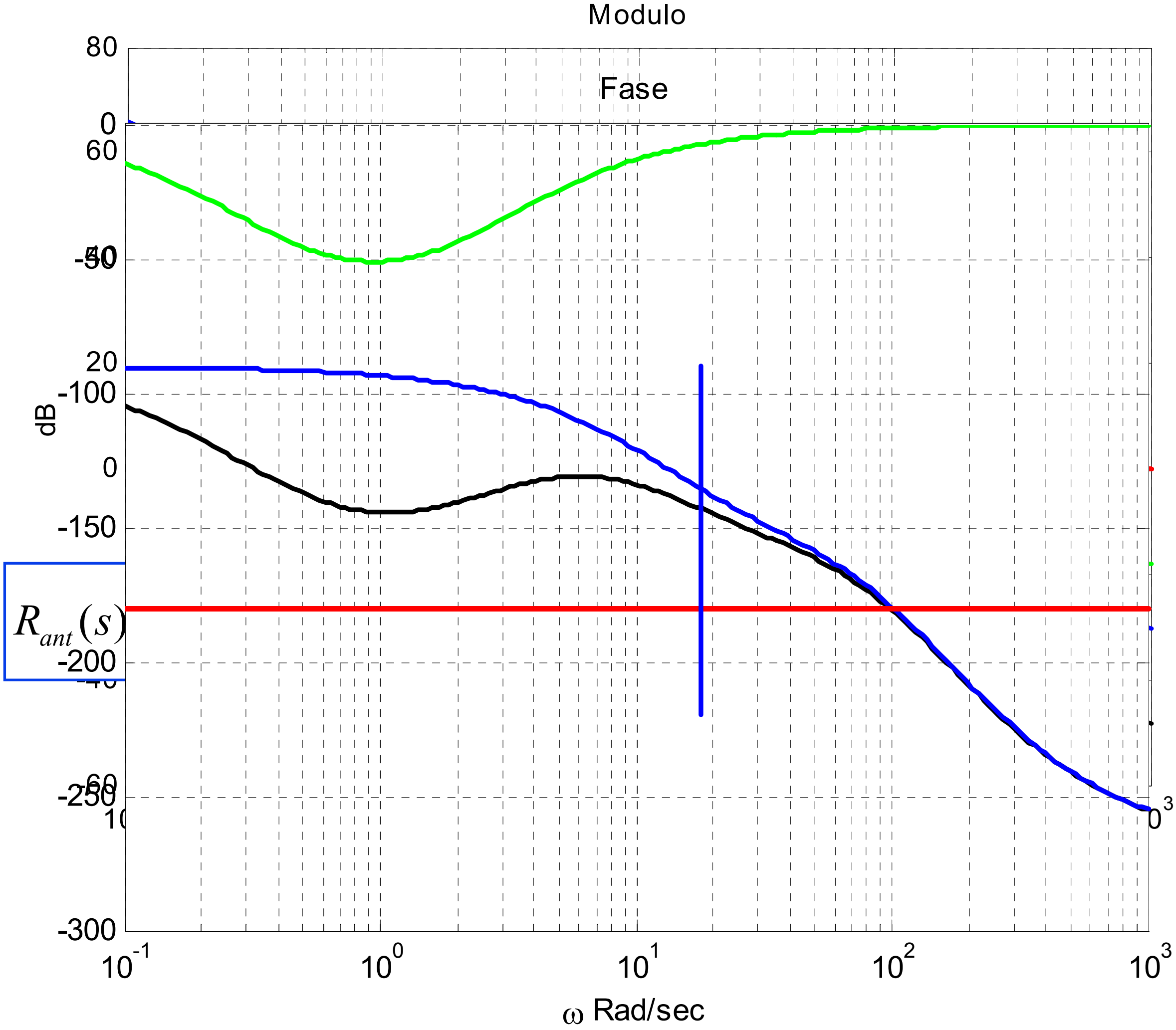
$$= \begin{pmatrix} s+2 & 2s+5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{(s+2)^2} = \frac{2s+5}{(s+2)^2}$$

notiamo che le due dinamiche in -2 risultano anche osservabili.

A questo punto la soluzione è

$$\text{Y(s)}=\frac{2s+5}{(s+2)^2}\frac{1}{s} = \frac{5/4}{s} - \frac{5/4}{s+2} - \frac{1/2}{(s+2)^2}$$

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = \frac{5}{4} - \frac{5}{4}e^{-2t} - \frac{1}{2}te^{-2t}$$


Modulo
Fase
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
0
-50
-100
-150
-200
-250
-300
dB
$R_{ant}(s)$
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
ω Rad/sec

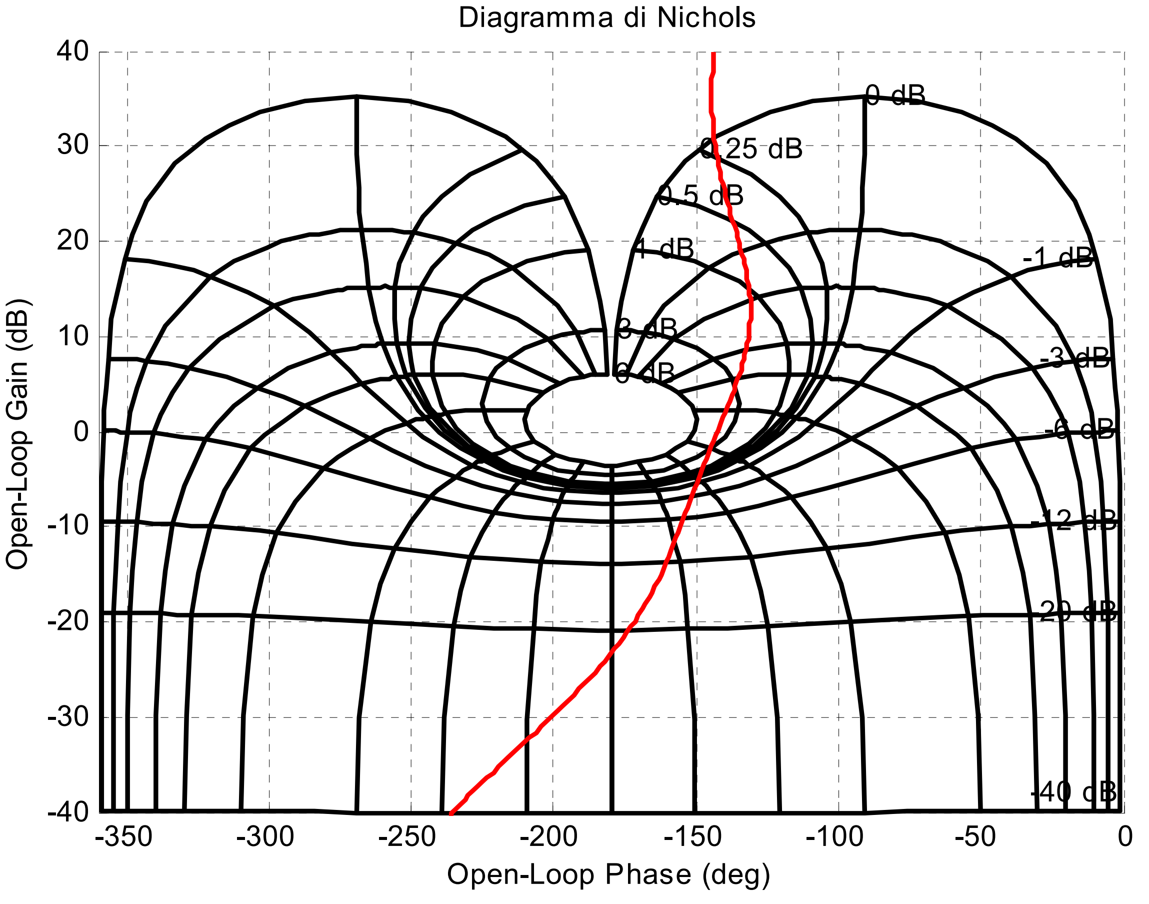
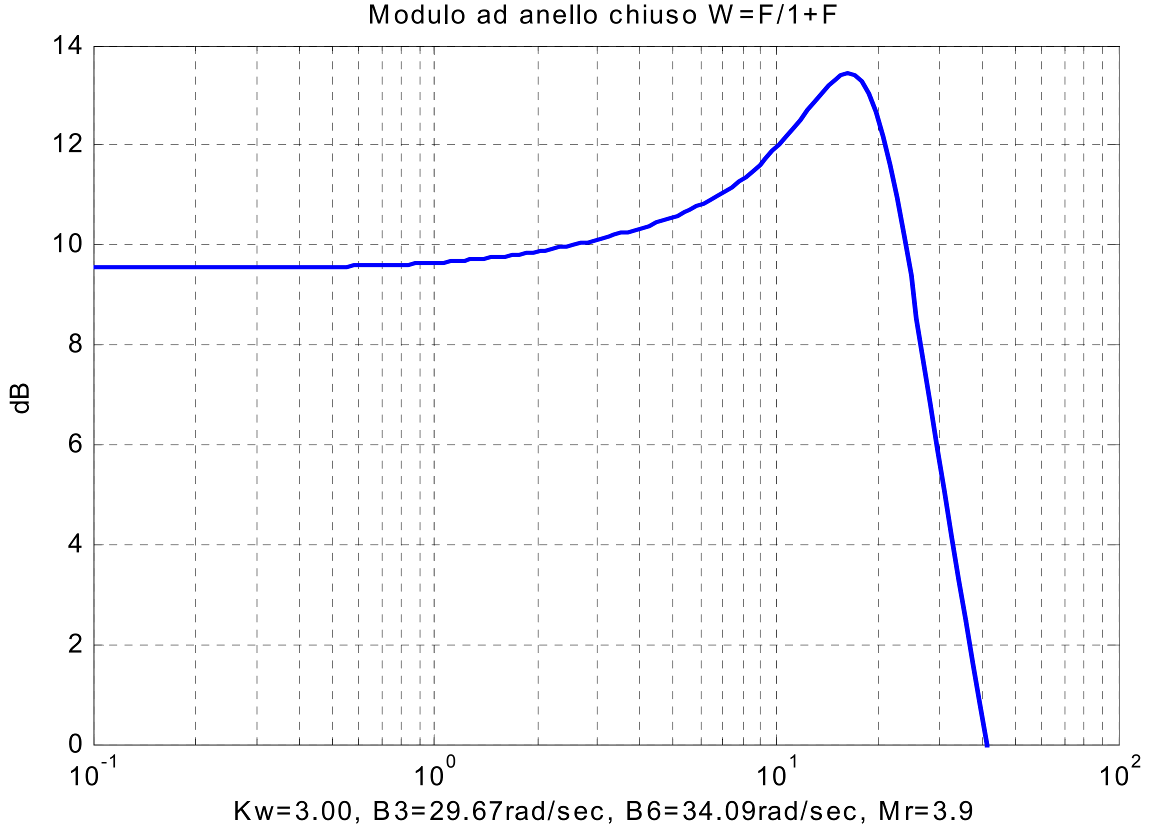


Diagramma di Nichols
Open-Loop Gain (dB)
Open-Loop Phase (deg)
0 dB
0.25 dB
0.5 dB
1 dB
3 dB
6 dB
-1 dB
-3 dB
-6 dB
-12 dB
-20 dB
-40 dB


Modulo ad anello chiuso W=F/1+F
dB
Kw=3.00, B3=29.67rad/sec, B6=34.09rad/sec, Mr=3.9