F d'A

# Prova di accertamento di Fondamenti di Automatica

**15 giugno 1999 - compito A**

1) Sia dato un processo P(s) descrivibile mediante la funzione di trasferimento

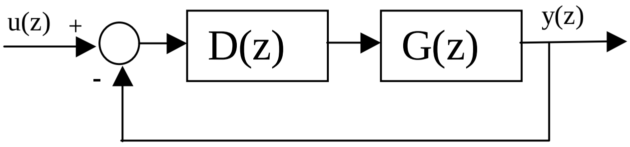
$$P(s) = \frac{0.5(30-s)(s+100)}{(s+10)(s+50)}$$

Sintetizzare un sistema di controllo a controreazione tale che il guadagno a ciclo chiuso sia pari a 2 e l'errore a regime per ingresso a rampa u(t)=0.2t sia minore di 0.016. Inoltre, l'omega di attraversamento ed il margine di fase della funzione a ciclo aperto soddisfino le: $\omega_t \geq 3$ rad/sec e $m\phi \geq 50°$. Per un ingresso del tipo $\sin(\omega t)$, fino a quale pulsazione l'errore di riproduzione risulterà inferiore a 0.1? Determinare, infine, utilizzando la carta di Nichols, la banda passante (in Hz) ed il modulo alla risonanza della funzione a ciclo chiuso.

2a) Per poter realizzare il sistema di controllo progettato nell'esercizio precedente si intende utilizzare un sistema a segnali campionati. Supponendo di voler discretizzare il controllore C(s) utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, dire quale tempo di campionamento Tc si potrebbe utilizzare.

2b) Se nel loop, dopo il controllore, si inserisce una saturazione unitaria il sistema evolve verso un ciclo limite o no?

3) Dato il sistema di controllo discreto con G(z)=(z-0.3)/(z-0.5)




determinare il controllore D(z) in modo che la funzione di trasferimento a ciclo chiuso W(z) sia tale da produrre un segnale pari alla discretizzazione di $y(t)=\delta_{-1}(t)+e^{-10t}$ (con Tc=0.1sec ed usando il metodo delle differenze all'indietro) in risposta ad un gradino u(z)=z/(z-1). Prima di calcolare il controllore D(z), verificare che il guadagno della W(z) sia unitario ed eventualmente moltiplicare per una costante per renderlo tale. Calcolare, infine, i primi 5 campioni della risposta al gradino.

4) Analizzare il seguente sistema

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 3 & 1 \\ -18 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e calcolare la decomposizione canonica di Kalman in sottospazi raggiungibili/irraggiungibili. Determinare, quindi, se una reazione statica dall'uscita del tipo u=ky+v (con k scalare) è in grado di stabilizzare asintoticamente il sistema .

5) Definire il concetto di osservabilità di un sistema lineare e mostrare in che maniera il nucleo della matrice di osservabilità è legato al sottospazio non osservabile. Dire in quali casi un sistema risulta stabilizzabile con una reazione dall'uscita.

---

**Nome** ……………………… **Cognome** ……..………………… **Matricola** ….………..…………..

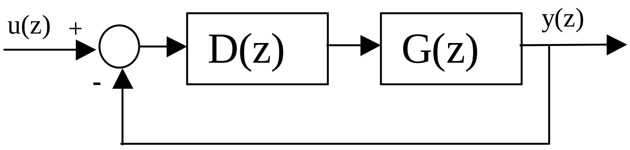
1) Sia dato un processo P(s) descrivibile mediante la funzione di trasferimento

$$P(s)=\frac{0.5(40-s)(s+90)}{(s+10)(s+50)}$$

Sintetizzare un sistema di controllo a controreazione tale che il guadagno a ciclo chiuso sia pari a 4 e l'errore a regime per rampa di uscita y(t)= t sia minore di 0.0695. Inoltre, l'omega di attraversamento ed il margine di fase della funzione a ciclo aperto soddisfino le: $\omega_t \geq 10$ rad/sec e $m\phi \geq 45°$. Per un ingresso del tipo $\sin(\omega t)$, fino a quale pulsazione l'errore di riproduzione risulterà inferiore a 0.1? Determinare, infine, utilizzando la carta di Nichols, la banda passante (in Hz) ed il modulo alla risonanza della funzione a ciclo chiuso.

2a) Per poter realizzare il sistema di controllo progettato nell'esercizio precedente si intende utilizzare un sistema a segnali campionati. Supponendo di voler discretizzare il controllore C(s) utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, dire quale tempo di campionamento Tc si potrebbe utilizzare.
2b) Se nel loop, dopo il controllore, si inserisce una saturazione unitaria il sistema evolve verso un ciclo limite o no?

3) Dato il sistema di controllo discreto G(z)=(z-0.3)/(z-0.5)




determinare il controllore D(z) in modo che la funzione di trasferimento a ciclo chiuso W(z) sia tale da produrre un segnale pari alla discretizzazione di $y(t)=\delta_{-1}(t)+e^{-20t}$ (con Tc=0.2sec ed usando il metodo delle differenze all'indietro) in risposta ad un gradino u(z)=z/(z-1). Prima di calcolare il controllore D(z), verificare che il guadagno della W(z) sia unitario ed eventualmente moltiplicare per una costante per renderlo tale. Calcolare, infine, i primi 5 campioni della risposta al gradino.

4) Analizzare il seguente sistema

$$A=\begin{bmatrix} 8 & -3 & 1 \\ -18 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}; C=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e calcolare la decomposizione canonica di Kalman in sottospazi raggiungibili/irraggiungibili. Determinare, quindi, se una reazione statica dall'uscita del tipo u=ky+v (con k scalare) è in grado di stabilizzare asintoticamente il sistema .

5) Mostrare che per un sistema lineare gli autovalori della sua rappresentazione nello spazio di stato coincidono con i poli della funzione di trasferimento ingresso uscita a meno di eventuali cancellazioni. Spiegare a cosa corrisponde l'eventuale cancellazione di una o più dinamiche e mostrare che una realizzazione in forma compagna ottenuta da una funzione di trasferimento è, invece, sempre raggiungibile.

---

**Nome …………………… Cognome ……..………………… Matricola ….………..……………..**

F d'A

# Prova di accertamento di Fondamenti di Automatica

**15 giugno 1999 - compito C**

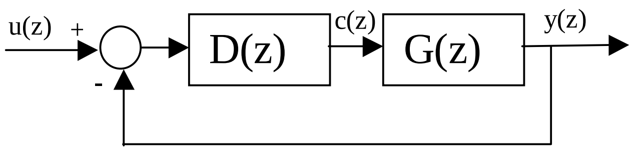
1) Sia dato un processo P(s) descrivibile mediante la funzione di trasferimento

$$P(s)=\frac{50(s+3)}{(s^2+14s+100)}$$

Sintetizzare un sistema di controllo a controreazione tale che il guadagno a ciclo chiuso sia pari a 3 e l'errore a regime per ingresso a rampa di ingresso u(t)=0.1t sia minore di 0.005. Inoltre, l'omega di attraversamento ed il margine di fase della funzione a ciclo aperto soddisfino le: $\omega_t \geq 60$ rad/sec e $m\phi \geq 50°$. Per un ingresso del tipo $\sin(\omega t)$, fino a quale pulsazione l'errore di riproduzione risulterà inferiore a 0.1? Determinare, infine, utilizzando la carta di Nichols, la banda passante (in Hz) ed il modulo alla risonanza della funzione a ciclo chiuso.

2a) Per poter realizzare il sistema di controllo progettato nell'esercizio precedente si intende utilizzare un sistema a segnali campionati. Supponendo di voler discretizzare il controllore C(s) utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, dire quale tempo di campionamento Tc si potrebbe utilizzare.
2b) Se nel loop, dopo il controllore, si inserisce una saturazione unitaria il sistema evolve verso un ciclo limite o no?

3) Dato il sistema di controllo discreto




con G(z) pari alla discretizzazione di un processo G(s)=1/(s+2) (usare diff. indietro con Tc=0.1 sec, e verificare che il guadagno della funzione discretizzata sia lo steso di quella continua), determinare il controllore D(z) in modo che la funzione di trasferimento a ciclo chiuso W(z) sia tale da produrre un segnale in uscita ritardato di un campione rispetto all'ingresso. Calcolare, quindi, i primi 4 campioni del segnale di controllo c(z) in risposta ad un gradino unitario per u(z). A quale valore tendono?

4) Dato il seguente sistema

$$P(s)=\frac{s+2}{(s-1)(s-3)}$$

fornirne una possibile realizzazione nello spazio di stato e stabilizzarla, portando i poli in (-2,-3), impiegando una controreazione dall'uscita che faccia uso di un osservatore con autovalori (-1,-1). Quanto vale la nuova funzione di trasferimento ingresso/uscita? Cosa è successo alla raggiungibilità/osservabilità del sistema finale?

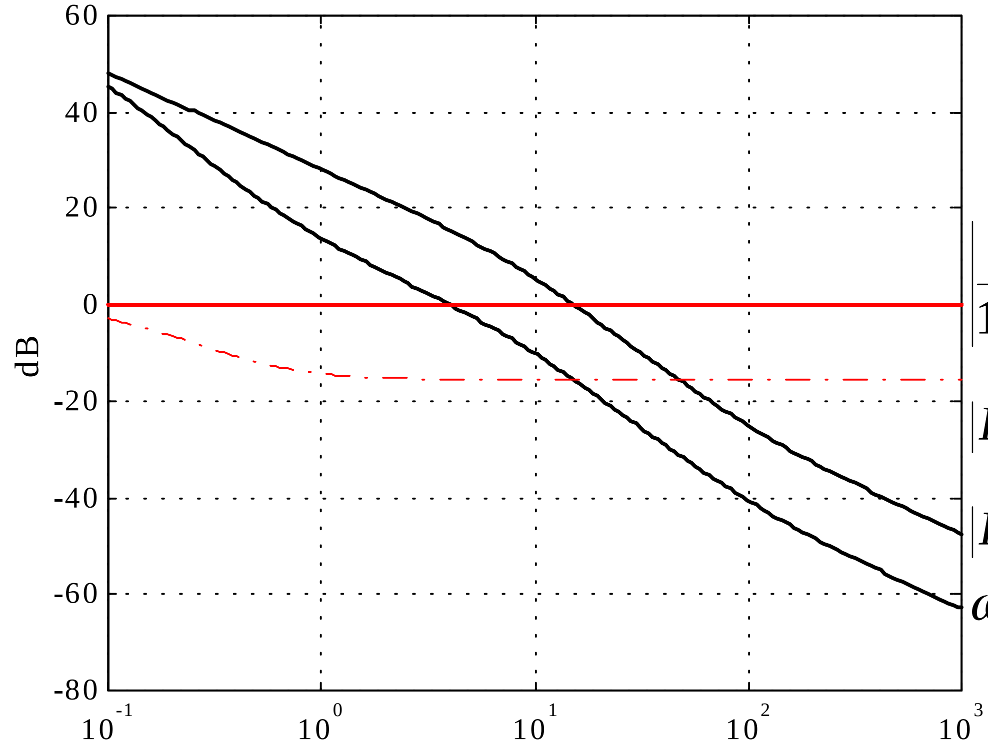
5) Illustrare il criterio di stabilità di Nyquist e spiegare l'utilizzo del relè ideale per la determinazione dell'$\omega$ limite

---

**Nome ……………………… Cognome ……..………………… Matricola ….………..……………..**

# SINTESI A

Moduli di Processo modificato, Rete e Catena diretta




Omega di taglio del processo modificato= 4.0555

$$C(s) = \frac{17}{s}\,\frac{\frac{10}{6}s+1}{10s+1}$$

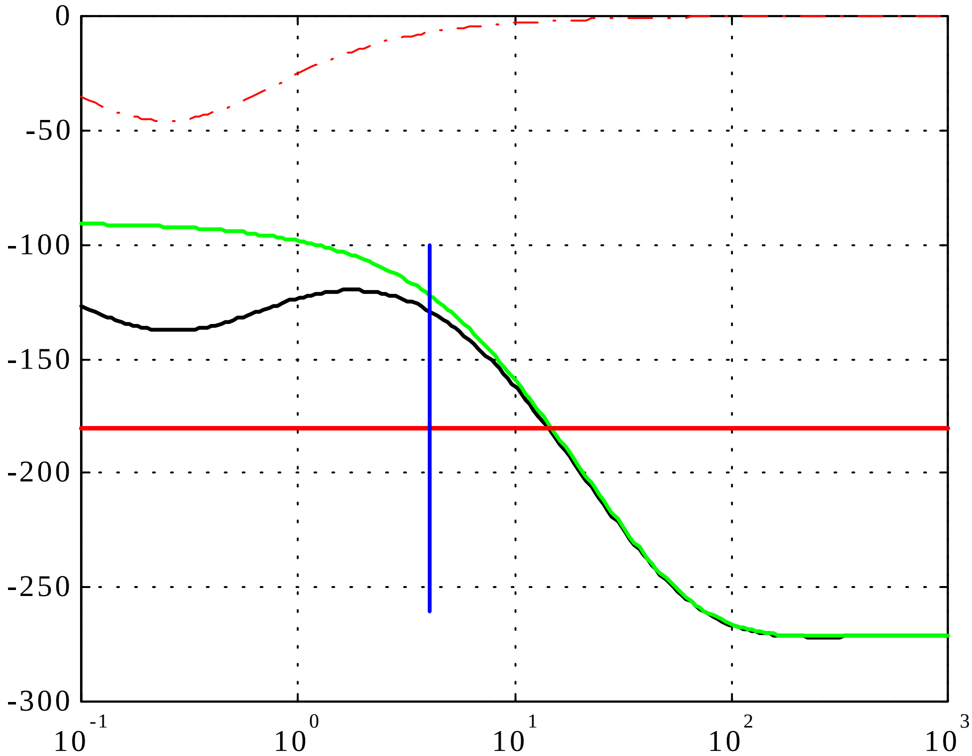
$$\left|\frac{K_d}{1+F(j\omega)}\right| < e$$

$$\left|F(j\omega)\right| > \frac{K_d}{e}$$

$$\left|F(j\omega)\right| > 20 = 26dB$$

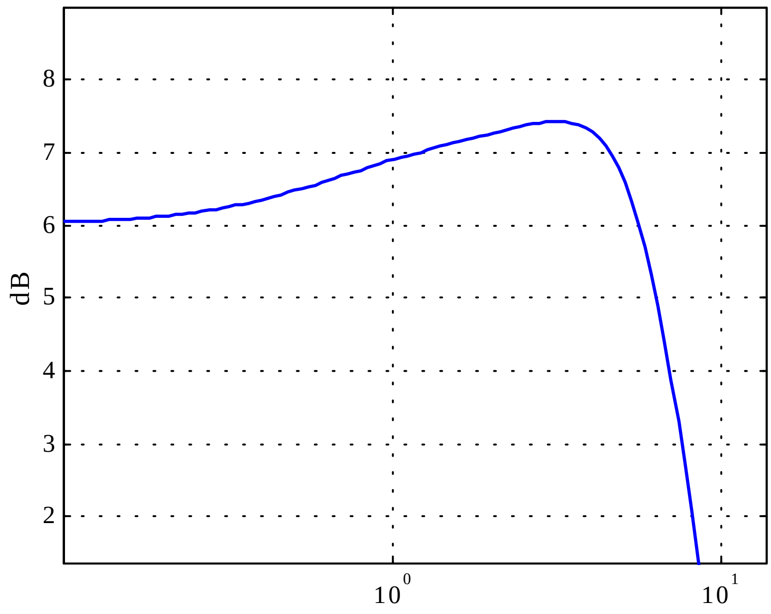
$$\omega < 0.38 \text{ rad / sec}$$

Fasi di Processo modificato, Rete e Catena diretta




margine di fase processo modificato= 50.9

Modulo ad anello chiuso W=F/1+F



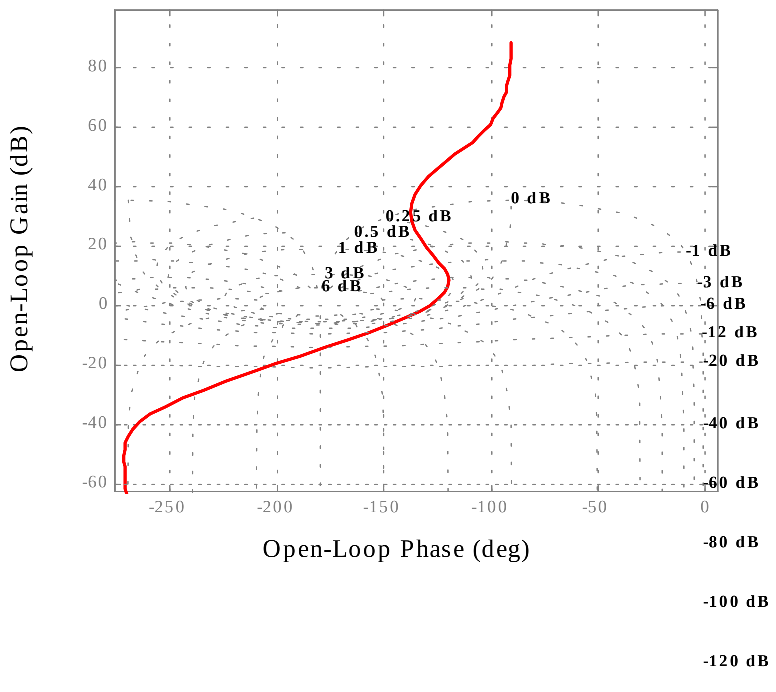

Kw=2.01, B3=444.19Hz, Mr=1.4

fc=10 volte la banda passante

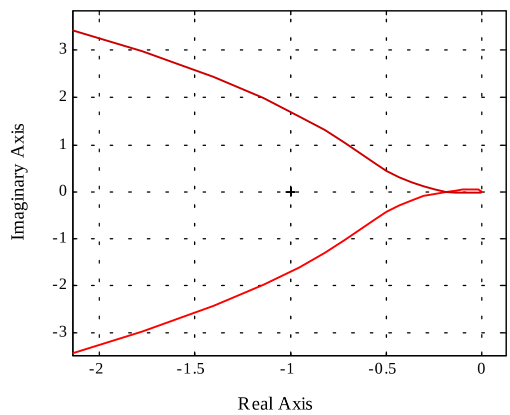
$$T_c = 0.0225\text{sec}$$

Poiché il diagramma di nyquist non interseca la funzione descrittiva della saturazione (-inf, -1), il sistema non tenderà al ciclo limite.

Nichols Charts



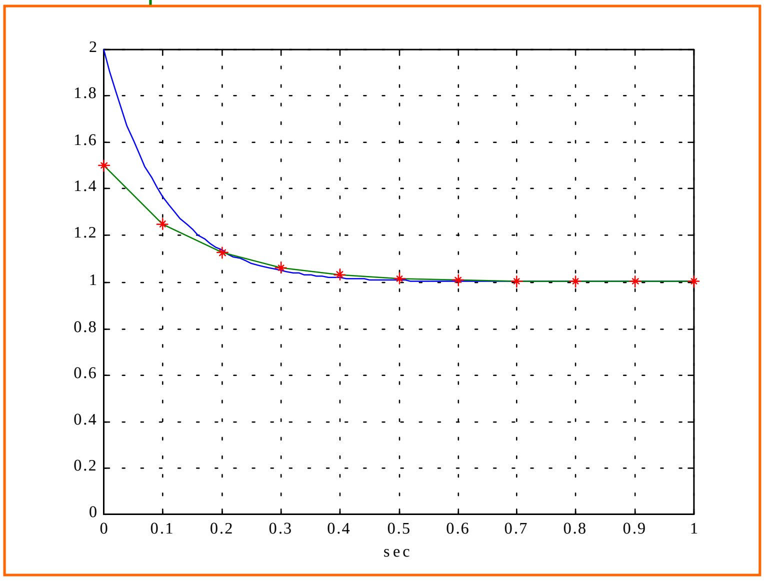

Nyquist Diagrams



```
# y(s):=1/((s+10))+1/s;

                          1
                 y(s) := ------ + 1/s
                        s + 10

> Tc:=0.1;#

                       Tc := .1

> y(z):=subs(s=(1-z^(-1))/Tc,y(s)):
> y(z):=simplify(y(z));

                          z (3. z - 2.)
              y(z) := .1 --------------------
                        (2. z - 1.) (z - 1.)

> W(z):=y(z)*(z-1)/z*10:
> simplify(W(z));

                      3. z - 2.
                      ---------
                      2. z - 1.

> G(z):=(z-0.3)/(z-0.5);

                          z - .3
                 G(z) := ------
                          z - .5

> D(z):=1/G(z)*W(z)/(1-W(z)):
> D(z):=simplify(D(z));

                     (3. z - 2.) (2. z - 1.)
         D(z) := -5. -----------------------
                     (z - 1.) (10. z - 3.)

> W2(z):=D(z)*G(z)/(1+D(z)*G(z)):
> simplify(W2(z));

                      3. z - 2.
                      ---------
                      2. z - 1.
```

Primi campioni della risposta al gradino

1.5000
1.2500
1.1250
1.0625
1.0313
1.0156
1.0078
1.0039
1.0020
1.0010
1.0005



$$A=\begin{bmatrix}-7 & 3 & 1\\ -18 & 8 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix};C=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Raggiungibiltà =

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 |
| 3 | 6 | 12 |
| 0 | 0 | 0 |

il rango è solo 1 per cui la dimensione del sottospazio raggiungibile è 1.

T=

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

$T^{-1}$*A*T =

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 1 |
| 0 | -1 | -1 |
| 0 | 0 | -1 |

$T^{-1}$*B=

1
0
0

Quindi l'autovalore 2 è raggiungibile, mentre la seconda sottomatrice ha come autovalori (-1,-1) che invece non lo sono.

Osservabilità =

| | | |
|---|---|---|
| -2 | 1 | 1 |
| -4 | 2 | -1 |
| -8 | 4 | 1 |

il rango è due, calcoliamo quale è la dinamica non osservabile:

$T^{-1}$ =

| | | |
|---|---|---|
| -2 | 1 | 1 |
| -4 | 2 | -1 |
| 1 | 0 | 0 |

$T^{-1}$*A*T=

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 0 |
| 1.6 | 0.6 | -1 |

C T=

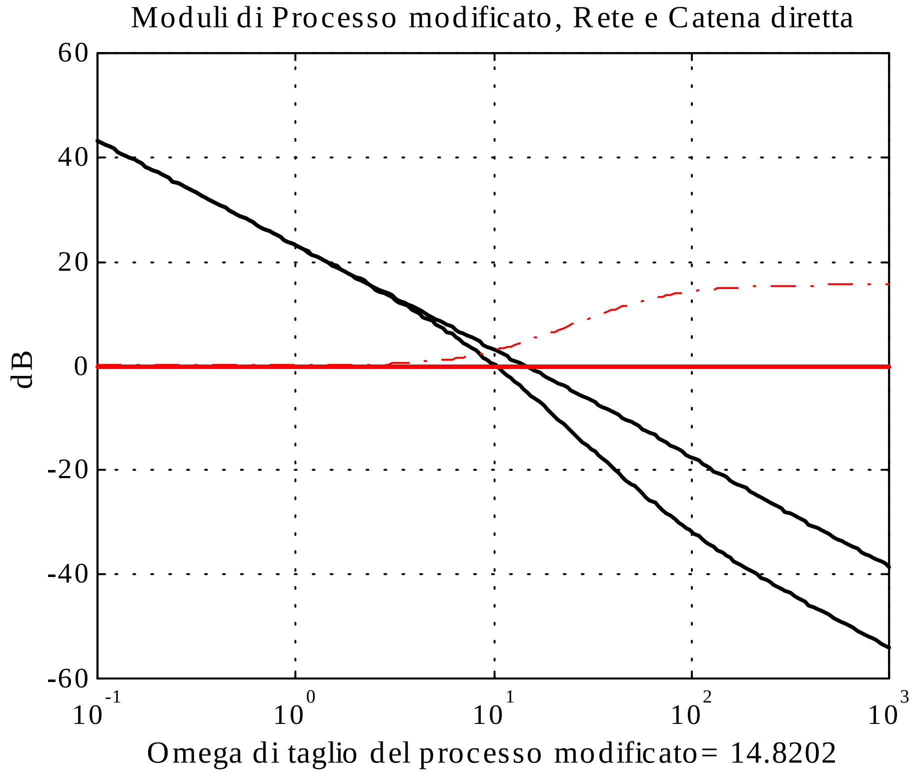
1 0 0

per cui l'autovalore non osservabile è il -1.

Concludendo, la parte raggiungibile e osservabile contiene l'autovalore 2 che pertanto risulta modificabile. A conferma si può calcolare la funzione di trasferimento che vale:

$$1/(s-2)$$

pertanto con la controreazione proposta si può spostare l'autovalore 2 in un punto qualsiasi dell'asse reale.



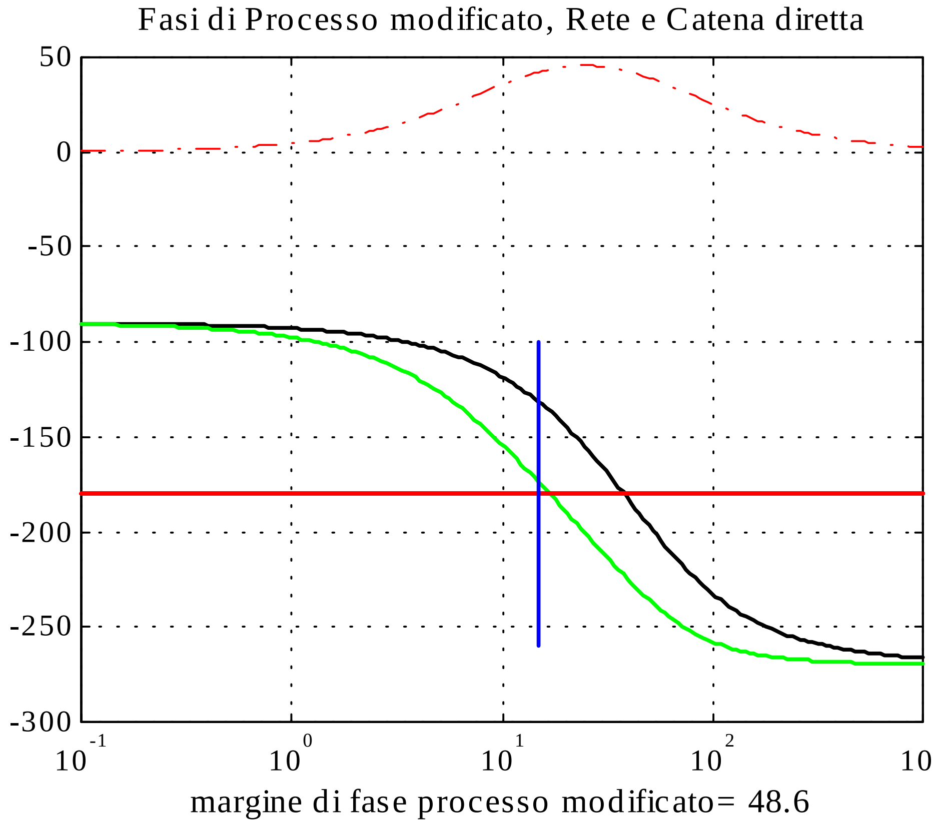

$$C(s) = \frac{16}{s}\frac{0.1s+1}{\frac{0.1}{6}s+1}$$

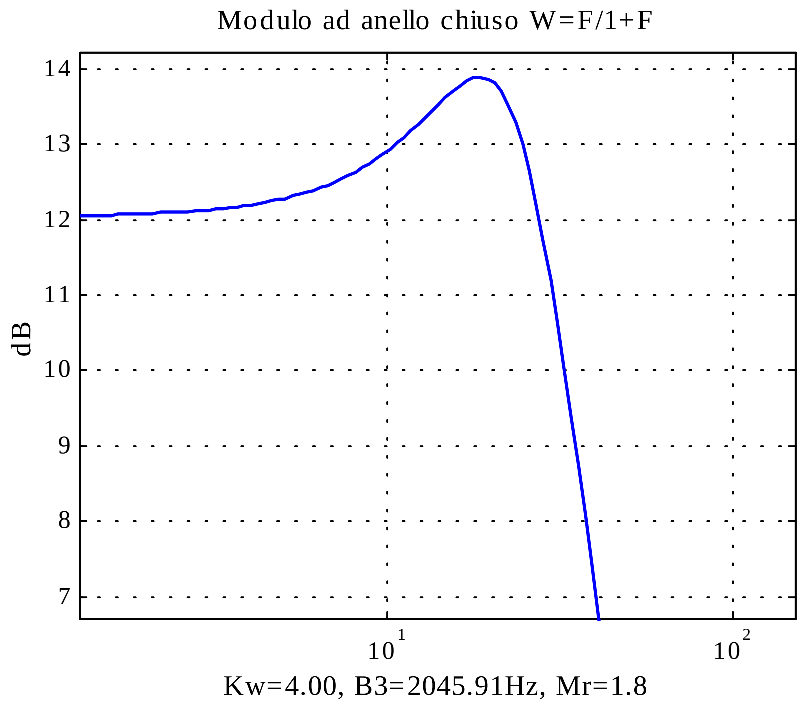
$$\left|\frac{K_d}{1+F(j\omega)}\right| < e$$

$$|F(j\omega)| > \frac{K_d}{e}$$

$$|F(j\omega)| > 40 = 32dB$$

$$\omega < 0.36 \text{ rad / sec}$$

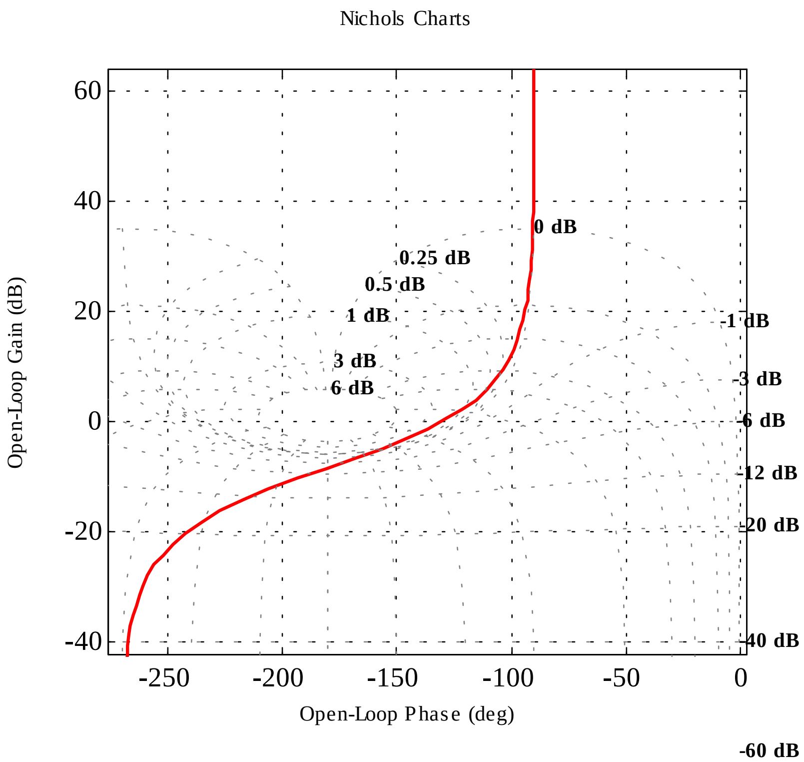


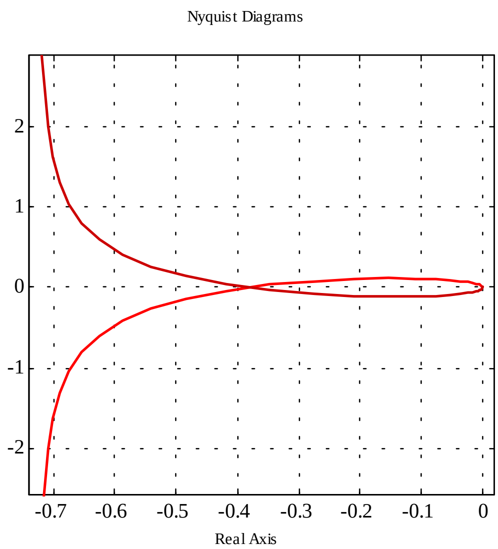



fc=10 volte
la banda
passante

$$T_c = 0.0049\text{sec}$$

Poiché il diagramma di nyquist non interseca la funzione descrittiva della saturazione (-inf, -1), il sistema non tenderà al ciclo limite.



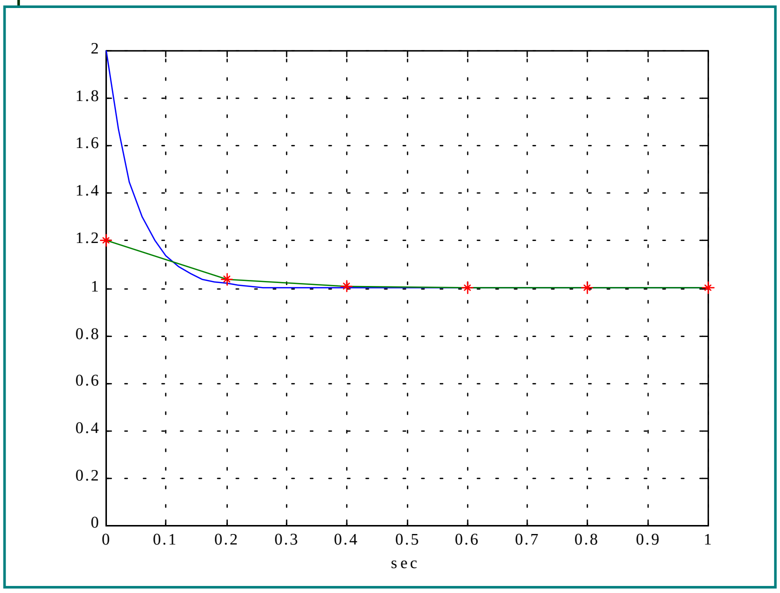



# Discreto B

```
# y(s):=1/((s+20))+1/s;

                       1
              y(s) := ------ + 1/s
                      s + 20

> Tc:=0.2;#

                   Tc := .2

> y(z):=subs(s=(1-z^(-1))/Tc,y(s)):#
> y(z):=simplify(y(z));

                        z (3. z - 1.)
         y(z) := .4 -------------------
                     (5. z - 1.) (z - 1.)

> W(z):=y(z)*(z-1)/z*5:
> simplify(W(z));

                    3. z - 1.
                 2. ---------
                    5. z - 1.

> G(z):=(z-0.3)/(z-0.5);

                       z - .3
              G(z) := ------
                       z - .5

> D(z):=1/G(z)*W(z)/(1-W(z)):#
> D(z):=simplify(D(z));

                      (3. z - 1.) (2. z - 1.)
       D(z) := -10. ----------------------
                      (z - 1.) (10. z - 3.)

> W2(z):=D(z)*G(z)/(1+D(z)*G(z)):#
> simplify(W2(z));

                    3. z - 1.
                 2. ---------
                    5. z - 1.
```

Primi campioni della risposta al gradino

1.2000
1.0400
1.0080
1.0016
1.0003
1.0001
1.0000
1.0000



$$A=\begin{bmatrix} 8 & -3 & 1 \\ -18 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};B=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix};C=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Raggiungibiltà =

| | | |
|---|---|---|
| 1 | -1 | 109 |
| 3 | -39 | 291 |
| 0 | 0 | 0 |

il rango è solo 2 per cui le matrici si trovano già in forman di Kalman di raggiungibilità. L'autovalore 2 non è raggiungibile, la prima sottomatrice ha come autovalori (11,-10) che invece lo sono. Quindi il sistema non è stabilizzabile con la reazione dall'uiscita.

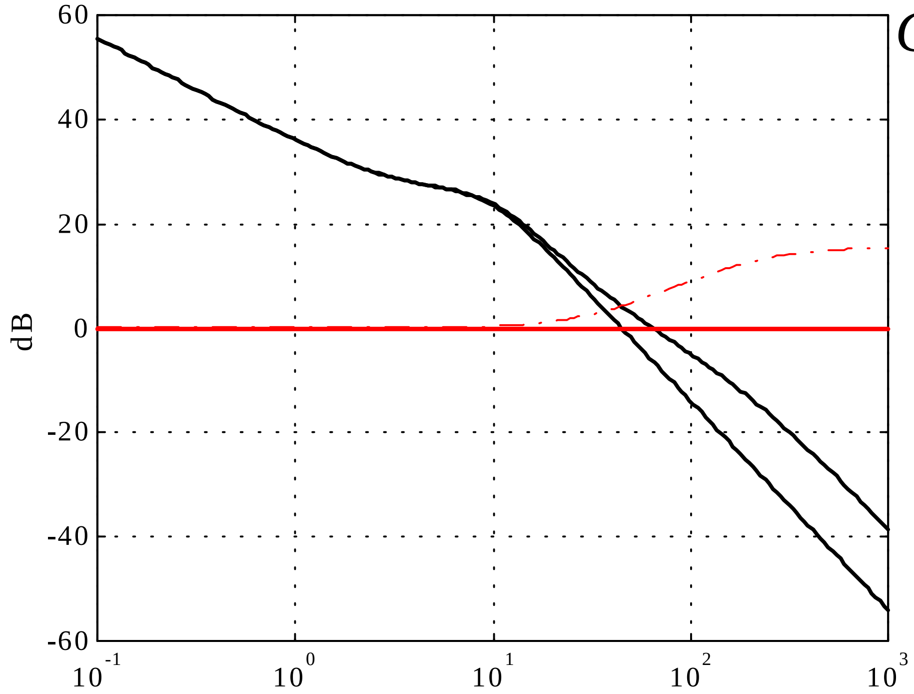
Osservabilità =

| | | |
|---|---|---|
| -2 | 1 | 1 |
| -34 | -1 | 2 |
| -254 | 109 | -32 |

il rango è tre, ne segue che il sistema è completamente osservabile.
Concludendo, la parte raggiungibile e osservabile contiene gli autovalori (11,-10) che pertanto risulteranno modificabili.
La funzione di trasferimento a ciclo chiuso vale:

(-38+s)/(s^2-s-110)

Moduli di Processo modificato, Rete e Catena diretta




Omega di taglio del processo modificato= 65.1734

$$C(s) = \frac{120}{s} \frac{0.03s+1}{\frac{0.03}{6}s+1}$$

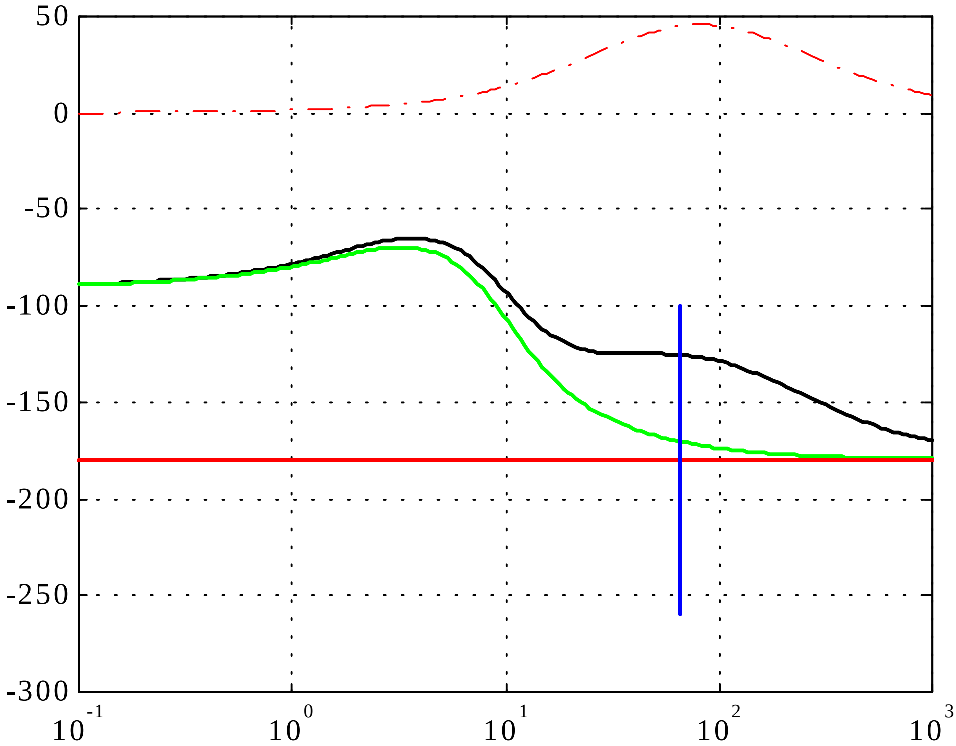
$$\left| \frac{K_d}{1+F(j\omega)} \right| < e$$

$$|F(j\omega)| > \frac{K_d}{e}$$

$$|F(j\omega)| > 30 = 29.5dB$$

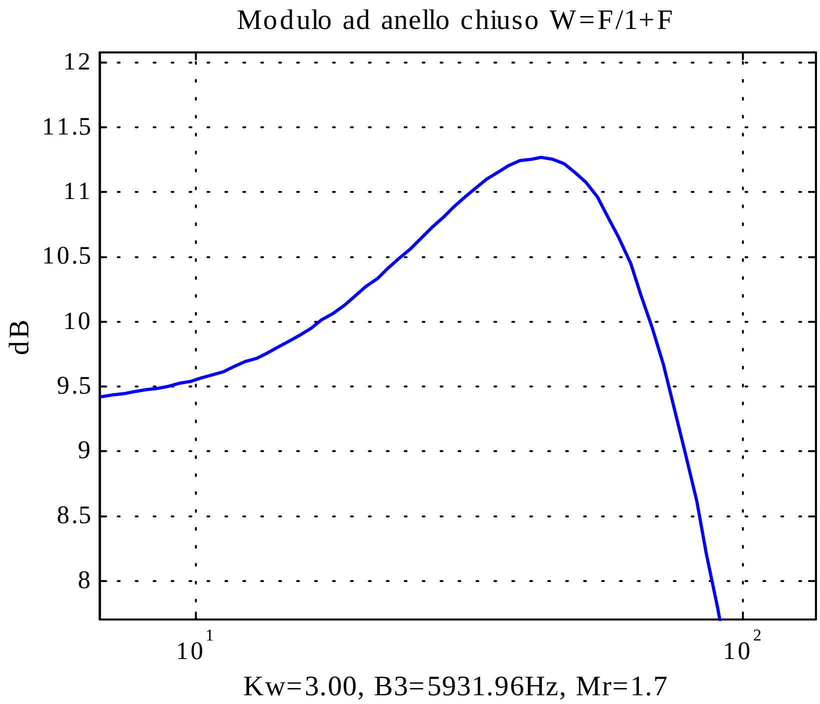
$$\omega < 2.70 \text{ rad / sec}$$

Fasi di Processo modificato, Rete e Catena diretta




margine di fase processo modificato= 54.6

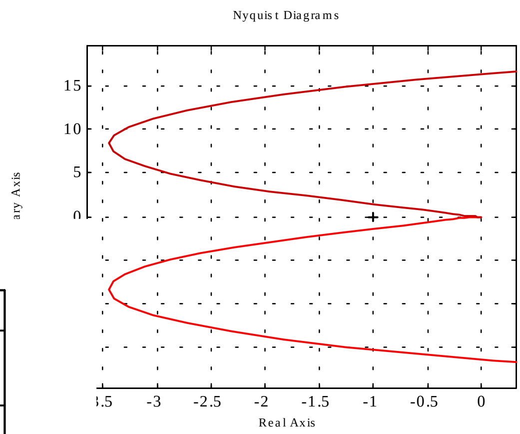
# SINTESI C

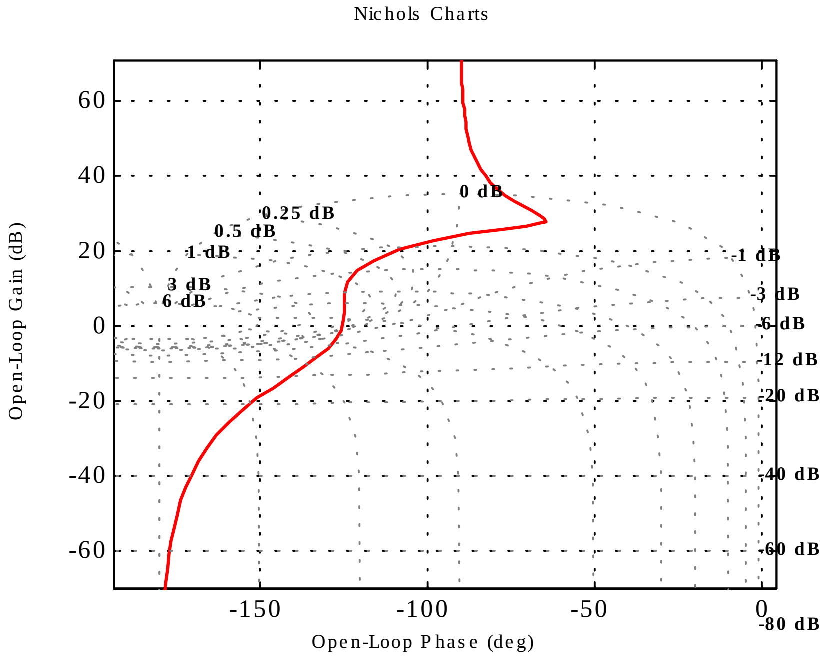



fc=10 volte
la banda
passante

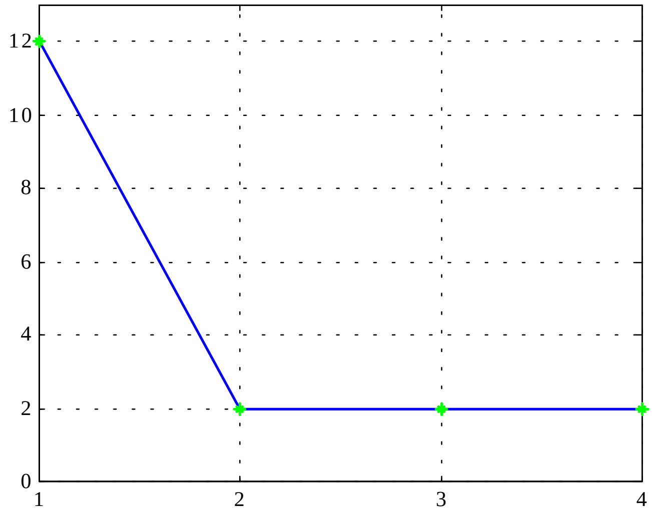
$$T_c = 0.0017\text{sec}$$

Poiché il diagramma di nyquist non interseca la funzione descrittiva della saturazione (-inf, -1), il sistema non tenderà al ciclo limite.



```
# G(s):=1/(s+2);
                                 1
                    G(s) := -------
                               s + 2
> Tc:=0.1;#
                         Tc := .1

> G(z):=subs(s=(1-z^(-1))/Tc,G(s)):#
> G(z):=simplify(G(z));

                                        z
      G(z) := .5000000000 ---------
                                    6. z - 5.

> D(z):=1/G(z)/(z-1):
> D(z):=simplify(D(z));

                              6. z - 5.
                 D(z) := 2. ----------
                              z (z - 1.)

> C(z):=D(z)/(1+G(z)*D(z)):
> C(z):=simplify(C(z));

                         6. z - 5.
            C(z) := 2. ---------
                         2 z^2
```



$$P(s) = \frac{s+2}{(s-1)(s-3)} = \frac{s+2}{s^2-4s+3} = \frac{s+2}{s^2+a_1 s+a_0}$$

In forma compagna di controllabilità:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico desiderato per il sistema vale:

$$P^*(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} a_0 - \alpha_0 & a_1 - \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -9 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico del sistema di errore vale:

$$P^*{}_e(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

$$K_2 = P_e^*(\lambda)\bar{\gamma} = \begin{bmatrix} \frac{28}{30} & \frac{124}{30} \end{bmatrix}$$

Con $\gamma$ l'ultima colonna dell'inverso della matrice di osservabilità

Essendo la dinamica dell'osservatore irraggiungibile, la funzione di trasferimento varrà semplicemente:

$$C[sI - (A + BK_1)^{-1}]B = \frac{1}{s+3}$$

In quanto uno dei poli imposti si cancella con lo zero a numeratore (diventando obbligatoriamente inosservabile in quanto la forma compagna è sempre tutta raggiungibile).