Secondo accertamento di Fondamenti di Automatica

Corsi di Laurea in Elettronica e in Meccanica

8 giugno 2001 – Compito **A**

1a) Sia dato un processo **P(s)** descrivibile mediante la funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{250(s/100+1)}{(s/20+1)(s/50+1)}$$

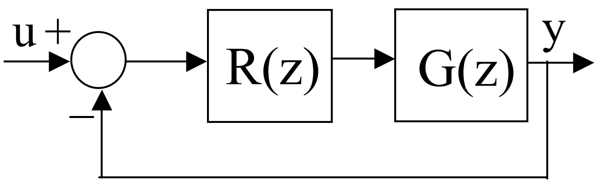
Sintetizzare un sistema di controllo a controreazione tale che il guadagno a ciclo chiuso sia pari a **2** e l'errore a regime per ingresso a rampa **u(t)=3t** sia minore o uguale a **0.008**. Inoltre l'errore di riproduzione di una sinusoide **sin(ωt)** sia minore di **0.2** almeno fino alla pulsazione **ω=100 rad/sec**. Infine, l'omega di attraversamento ed il margine di fase della funzione a ciclo aperto soddisfino le: $\boldsymbol{\omega_t \geq 100}$ rad/sec e $\boldsymbol{m\phi \geq 40°}$.

1b) Determinare utilizzando la carta di Nichols, le bande passanti a –3 e –6 decibel (in rad/sec) ed il modulo alla risonanza della funzione a ciclo chiuso.

1c) Tracciare il diagramma di Nyquist della funzione compensata e supporre di inserire una saturazione unitaria. Si innesca un ciclo limite? E aumentando il guadagno in catena diretta? Se si, qual è il guadagno minimo da inserire e a quale pulsazione si avrà l'oscillazione?

---

2) Dato il sistema discreto in figura con **G(z)=1/(z-0.2)** determinare il controllore **R(z)** che assicuri una funzione di trasferimento a ciclo chiuso **W(z)** tale che, per un ingresso a gradino, fornisca un'uscita pari alla discretizzazione (esatta) di $\mathbf{y(t)=(1-e^{-3t})\delta_{-1}(t)}$ con **Tc=0.1sec**. Prima di calcolare R(z) regolare il guadagno di W(z) in modo da avere guadagno unitario e quindi, supponendo di applicare un segnale impulsivo all'ingresso **u,** determinare i primi **4** campioni dell'uscita **y**.



---

3) Analizzare la cascata dei due sistemi qui riportati (l'uscita del primo è l'ingresso del secondo). Determinare controllabilità ed osservabilità dell'intero sistema e calcolarne la FdT. Determinare, quindi, se una reazione statica dall'uscita del tipo **u=k(v-y)** (con **k** scalare) sia in grado di stabilizzare asintoticamente il sistema con autovalori tutti a parte reale minore di –1.

$$A_1 = [-2]; = B_1 = [1]; C_1 = [-1]$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}; = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; C_2 = [2 \quad 0]$$

---

4) Dare le definizioni dei sottospazi controllabile e non controllabile, illustrare la forma canonica di Kalman relativa a questi sottospazi e mostrare come nella funzione di trasferimento di un sistema non completamente controllabile non compaiano i modi del sottospazio non controllabile.

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Elettronica/Meccanica	**Laurea/ Diploma/Nuovo Ordinamento**	**Immatricolato al ………. anno**

Secondo accertamento di Fondamenti di Automatica

Corsi di Laurea in Elettronica e in Meccanica

8 giugno 2000 – Compito **B**

1a) Sia dato un processo **P(s)** descrivibile mediante la funzione di trasferimento

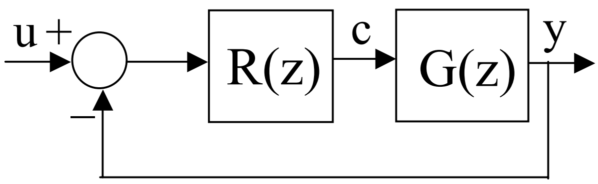
$$P(s) = \frac{10(1 - s/50)}{(s/10+1)(s/200+1)}$$

Sintetizzare un sistema di controllo a controreazione tale che il guadagno a ciclo chiuso sia pari a **2** e l'errore a regime per ingresso a rampa **u(t)=2t** sia minore o uguale a **0.16**. Inoltre l'errore di riproduzione di una sinusoide **sin(ωt)** sia minore di **0.2** almeno fino alla pulsazione **ω=2 rad/sec**. Infine, l'omega di attraversamento ed il margine di fase della funzione a ciclo aperto soddisfino le: $\omega_t \geq 10$ rad/sec e $m\phi \geq 40°$.

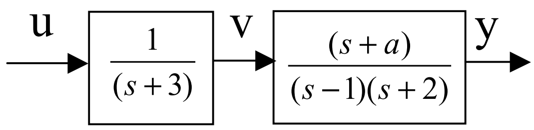
1b) Determinare utilizzando la carta di Nichols, le bande passanti a –3 e –6 decibel (in rad/sec) ed il modulo alla risonanza della funzione a ciclo chiuso.

1c) Tracciare il diagramma di Nyquist della funzione compensata e supporre di inserire una saturazione unitaria. Si innesca un ciclo limite? E aumentando il guadagno in catena diretta di **10** volte? Se si, a quale pulsazione si avrà l'oscillazione e quale sarà l'ampiezza?

2) Dato il sistema discreto in figura con **G(z)** ottenuta dalla discretizzazione (approssimata alle differenze all'indietro) del sistema **G(s)=1/(s+2)** e **Tc=0.1** sec, determinare il controllore **R(z)** che assicuri una funzione di trasferimento a ciclo chiuso pari, se possibile, ad un ritardo di 2 campioni. Quindi, supponendo di applicare un segnale a gradino all'ingresso **u** determinare i primi **4** campioni del segnale **c**.



3) Dato il sistema in figura, ricavare l'espressione delle matrici **A**, **B**, e **C** che lo descrivono. Trovare poi per quale valore di ***a*** il sistema risulti, in ogni tipo di realizzazione, non completamente osservabile e determinare per tale valore la decomposizione canonica di Kalman nei sottospazi osservabile/non osservabile. Sempre per tale valore di ***a***, il sistema risulta stabilizzabile con una controreazione dall'uscita? Lavorando sulla FdT calcolare, se esiste, una controreazione statica che stabilizzi il sistema.



4) Dare le definizioni dei sottospazi osservabile e non osservabile, mostrare come si ottiene la matrice di osservabilità di un sistema e come da essa sia possibile costruire la relativa forma canonica di Kalman.

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Elettronica/Meccanica	**Laurea/ Diploma/Nuovo Ordinamento**	**Immatricolato al ………. anno**

1a) Sia dato un processo **P(s)** descrivibile mediante la funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{10(s+1)}{(s/30+1)(s/100+1)(s/50+1)}$$

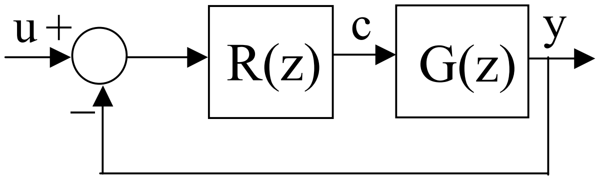
Sintetizzare un sistema di controllo a controreazione tale che il guadagno a ciclo chiuso sia pari a **4** e l'errore a regime per ingresso a rampa **u(t)=1.5t** sia minore o uguale a **0.24**. Inoltre l'errore di riproduzione di una sinusoide **sin(ωt)** sia minore di **0.4** almeno fino alla pulsazione **ω=1 rad/sec**. Infine, la banda passante a meno tre decibel soddisfi la seguente relazione ω_{-3}**<100 rad/sec**, mentre per il margine di fase valga **mφ≥45°**.

1b) Determinare utilizzando la carta di Nichols, le bande passanti a –3 e –6 decibel (in rad/sec) ed il modulo alla risonanza della funzione a ciclo chiuso.

1c) Tracciare il diagramma di Nyquist della funzione compensata e supporre di inserire una saturazione unitaria. Si innesca un ciclo limite? E aumentando il guadagno in catena diretta di 10 volte? Se si, a quale pulsazione si avrà l'oscillazione e quale sarà l'ampiezza?

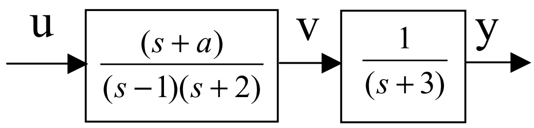
---

2) Dato il sistema discreto in figura con **G(z)** ottenuta dalla discretizzazione mediante il metodo di tustin del sistema **G(s)=1/(s+2)** e **Tc=0.1**sec, determinare il controllore **R(z)** che assicuri una funzione di trasferimento a ciclo chiuso **W(z)** tale che in risposta ad un gradino unitario produca la sequenza $\{y_k\}$**={0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.6, 0.6,...}**. Quindi, supponendo di applicare un segnale a rampa all'ingresso **u** determinare i primi **4** campioni del segnale **c**.



---

3) Dato il sistema in figura, ricavare l'espressione delle matrici **A**, **B**, e **C** che lo descrivono. Trovare poi per quale valore di ***a*** il sistema risulti, in ogni tipo di realizzazione, non completamente raggiungibile e determinare per tale valore la decomposizione canonica di Kalman nei sottospazi controllabile/non controllabile. Sempre per tale valore di ***a***, il sistema risulta stabilizzabile con una controreazione dallo stato? Se si, trovare la matrice F tale da assegnare tutti autovalori a parte reale minore di –1.



---

4) Riassumere l'uso della funzione descrittiva nell'analisi di sistemi che contengano piccole nonlinearità.

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Elettronica/Meccanica	**Laurea/ Diploma/Nuovo Ordinamento**	**Immatricolato al ………. anno**

F d'A

Secondo accertamento di Fondamenti di Automatica

Corsi di Laurea in Elettronica e in Meccanica

8 giugno 2001 – Compito **D**

1a) Sia dato un processo **P(s)** descrivibile mediante la funzione di trasferimento

$$P(s)=\frac{5000(s/50+1)}{(s/5+1)(s/10+1)}$$

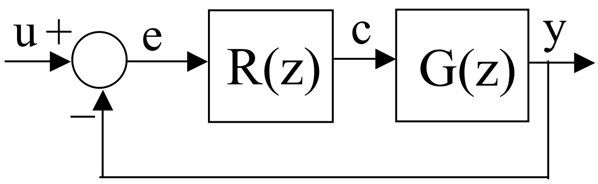
Sintetizzare un sistema di controllo a controreazione tale che il guadagno a ciclo chiuso sia pari a **2** e l'errore a regime per ingresso a rampa **u(t)=6t** sia minore o uguale a **0.0001**. Inoltre l'errore di riproduzione di una sinusoide **sin(ωt)** sia minore di **0.02** almeno fino alla pulsazione **ω =30**. Infine, l'omega di attraversamento ed il margine di fase della funzione a ciclo aperto soddisfino le: $\boldsymbol{\omega_t \geq 300}$ rad/sec e $\boldsymbol{m\phi \geq 35°}$.

1b) Determinare utilizzando la carta di Nichols, le banda passanti a –3 e –6 decibel (in rad/sec) ed il modulo alla risonanza della funzione a ciclo chiuso.

1c) Tracciare il diagramma di Nyquist della funzione compensata e supporre di inserire una saturazione unitaria. Si innesca un ciclo limite? Se si, a quale/i pulsazione/i si potrebbe avere l'oscillazione? E con quale/i ampiezza/e?

---

2) Dato il sistema discreto in figura, con **G(z)** ottenuta dalla discretizzazione approssimata mediante il metodo delle differenze all'indietro del sistema **G(s)=(s+1)/(s+3)** e **Tc=0.1** sec, determinare il controllore **R(z)** che assicuri una funzione di trasferimento a ciclo chiuso **W(z)** tale che in risposta ad un impulso unitario produca la sequenza **{y_k}={0, 1, 1, 0.3, 0, ...}**.



---

3) Analizzare la cascata dei due sistemi qui riportati (l'uscita del primo è l'ingresso del secondo). Determinare controllabilità ed osservabilità dell'intero sistema e calcolarne la FdT. Determinare, quindi, se una reazione statica dall'uscita del tipo **u=k(v-y)** (con **k** scalare) sia in grado di stabilizzare asintoticamente il sistema con autovalori tutti a parte reale minore di –1.

$$A_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix};=B_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix};C_1=\begin{bmatrix}2 & 0\end{bmatrix}$$

$$A_2=[-2];=B_2=[1];C_2=[-1]$$

---

4) Mostrare come gli autovalori di un sistema dinamico corrispondano, a meno di cancellazioni, con i poli della funzione di trasferimento.

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Elettronica/Meccanica	**Laurea/ Diploma/Nuovo Ordinamento**	**Immatricolato al ………. anno**

F d'A

Secondo accertamento di Fondamenti di Automatica

Corsi di Laurea in Elettronica e in Meccanica

8 giugno 2001 – Compito **E**

1a) Sia dato un processo **P(s)** descrivibile mediante la funzione di trasferimento

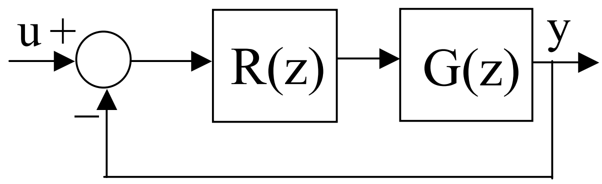
$$P(s) = \frac{5(s/70+1)}{(s/7+1)(s/20+1)}$$

Sintetizzare un sistema di controllo a controreazione tale che il guadagno a ciclo chiuso sia pari a **4** e l'errore a regime per ingresso a rampa **u(t)=3t** sia minore o uguale a **0.8**. Inoltre l'errore di riproduzione di una sinusoide **sin(ωt)** sia minore di **0.4** almeno fino alla pulsazione **ω=0.3**. Infine, l'omega di attraversamento ed il margine di fase della funzione a ciclo aperto soddisfino le: $\boldsymbol{\omega_t \geq 1}$ rad/sec e $\boldsymbol{m\phi \geq 45°}$.

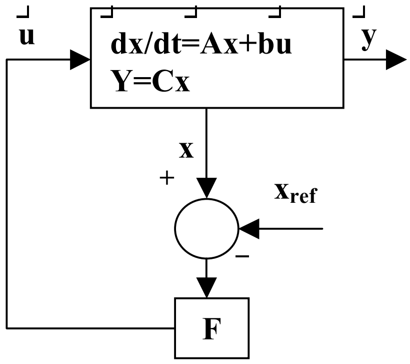
1b) Determinare utilizzando la carta di Nichols, le banda passanti a –3 e –6 decibel (in rad/sec) ed il modulo alla risonanza della funzione a ciclo chiuso.

1c) Tracciare il diagramma di Nyquist della funzione compensata e supporre di inserire una saturazione unitaria. Si innesca un ciclo limite? E aumentando il guadagno in catena diretta di 30 volte? Se si, a quale pulsazione si avrà l'oscillazione e quale sarà l'ampiezza?

2) Dato il sistema discreto in figura con **G(z)=(3z+1)/(2z-1)** determinare il controllore **R(z)** che assicuri una funzione di trasferimento a ciclo chiuso **W(z)** tale che, per un ingresso a gradino, fornisca un'uscita pari alla discretizzazione (esatta) di $\mathbf{y(t)=(1-e^{-2t})\delta_{-1}(t)}$ con **Tc=0.1sec**. Regolare, prima di calcolare R(z), il guadagno della W(z) in modo che sia pari ad uno ed infine, supponendo di applicare un segnale $\mathbf{u_k}$**={0, 0.5, 1, 0, 0, …},** determinare i primi **5** campioni dell'uscita **y**.



3) Dato il sistema di controllo riportato in figura, con $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, determinare se sia possibile regolare il sistema nel punto $\mathbf{x_{ref}}$**=(1 -3)** con errore nullo. In tal caso, determinare la matrice F in modo da assegnare gli autovalori (-2,-2).



4) Dimostrare, calcolando direttamente la matrice di controllabilità, che la forma canonica compagna rappresenta un sistema completamente raggiungibile. Per questo tipo di sistema mostrare come sia possibile determinare una matrice di reazione dallo stato in grado di assegnare dei nuovi autovalori.

Cognome:		**Nome:**		**Matricola:**
Elettronica/Meccanica	**Laurea/ Diploma/Nuovo Ordinamento**		**Immatricolato al ………. anno**	

Secondo accertamento di Fondamenti di Automatica
Corsi di Laurea in Elettronica e in Meccanica
8 giugno 2001 – Compito **F**

1a) Sia dato un processo **P(s)** descrivibile mediante la funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{10(1 - s/50)(s/1000 + 1)}{(s/20 + 1)(s/180 + 1)}$$

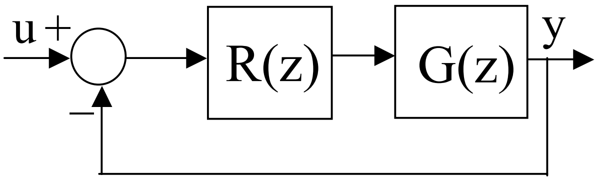
Sintetizzare un sistema di controllo a controreazione tale che il guadagno a ciclo chiuso sia pari a **3** e l'errore a regime per ingresso a rampa **u(t)=7t** sia minore o uguale a **0.9**. Inoltre l'errore di riproduzione di una sinusoide **sin(ωt)** sia minore di **0.3** almeno fino alla pulsazione **ω =2**. Infine, l'omega di attraversamento ed il margine di fase della funzione a ciclo aperto soddisfino le: $\boldsymbol{\omega_t \geq 20}$ rad/sec e $\boldsymbol{m\phi \geq 45°}$.

1b) Determinare utilizzando la carta di Nichols, le banda passanti a –3 e –6 decibel (in rad/sec) ed il modulo alla risonanza della funzione a ciclo chiuso.

1c) Tracciare il diagramma di Nyquist della funzione compensata e supporre di inserire una saturazione unitaria. Si innesca un ciclo limite? E aumentando il guadagno in catena diretta di 10 volte? Se si, a quale pulsazione si avrà l'oscillazione e quale sarà l'ampiezza?

---

2) Dato il sistema discreto in figura con $\mathbf{G(z)=(3z+1)/(2z^2-1)}$ determinare il controllore **R(z)** che assicuri una funzione di trasferimento a ciclo chiuso **W(z)** tale che, per un ingresso a gradino, fornisca un'uscita pari alla discretizzazione (esatta) di $\mathbf{y(t)= \delta_{-1}(t)- \delta_{-1}(t-0.4)}$ con **Tc=0.1sec**. Quindi, supponendo di applicare un segnale **u={0, 0.3, -0.3, 0, 0, …}**, determinare i primi **4** campioni dell'uscita **y**.



---

3) Determinare le proprietà strutturali (controllabilità e osservabilità) del seguente sistema e calcolarne l'uscita y(t) per t=2 sec, u(t)=0 ed x_0=(1, 1):

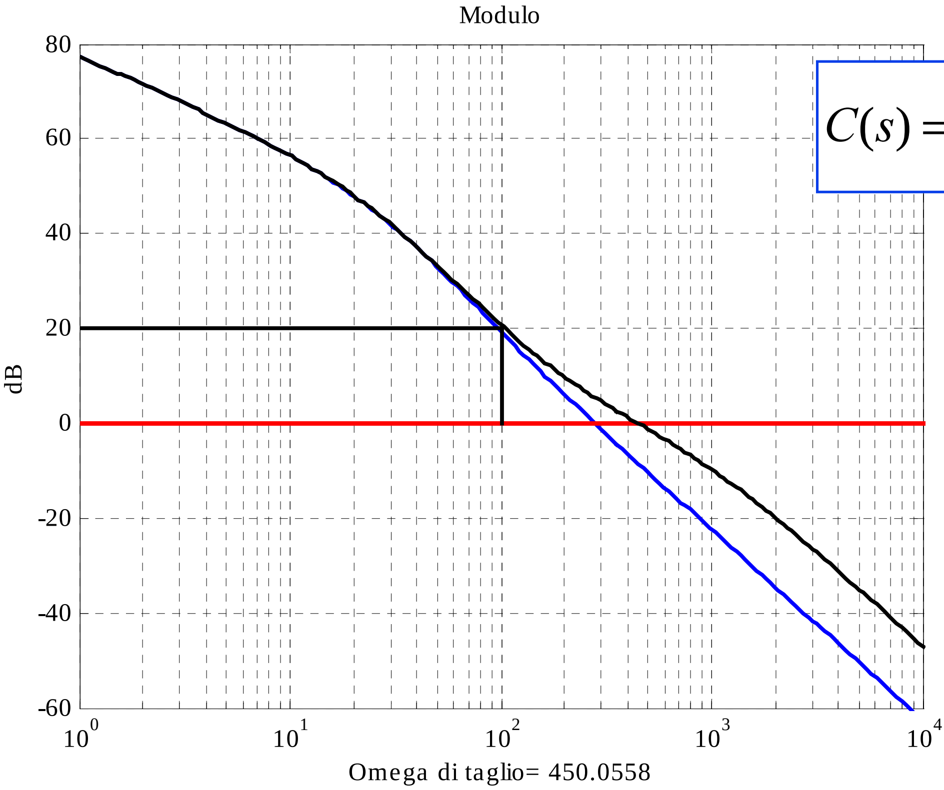
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 - 4x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 2x_2 + 2u \\ y = x_1 + x_2 \end{cases}$$

---

4) Mostrare l'uso dell'osservatore nel problema dell'assegnazione degli autovalori con una reazione dall'uscita. Nella funzione di trasferimento complessiva quali dinamiche saranno presenti?

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Elettronica/Meccanica	**Laurea/ Diploma/Nuovo Ordinamento**	**Immatricolato al ………. anno**

SINTESI A



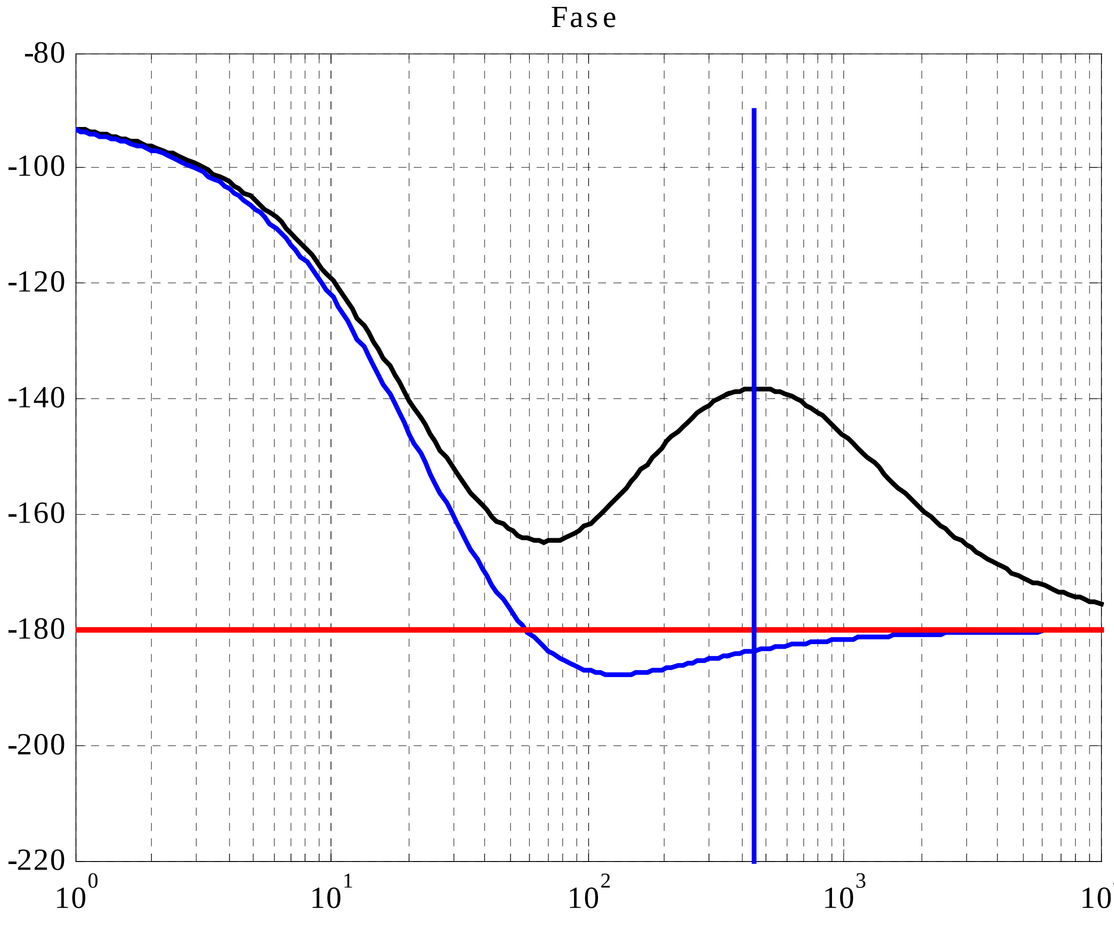
$$C(s) = \frac{6*10}{s}\frac{0.006s+1}{0.006/6s+1}$$

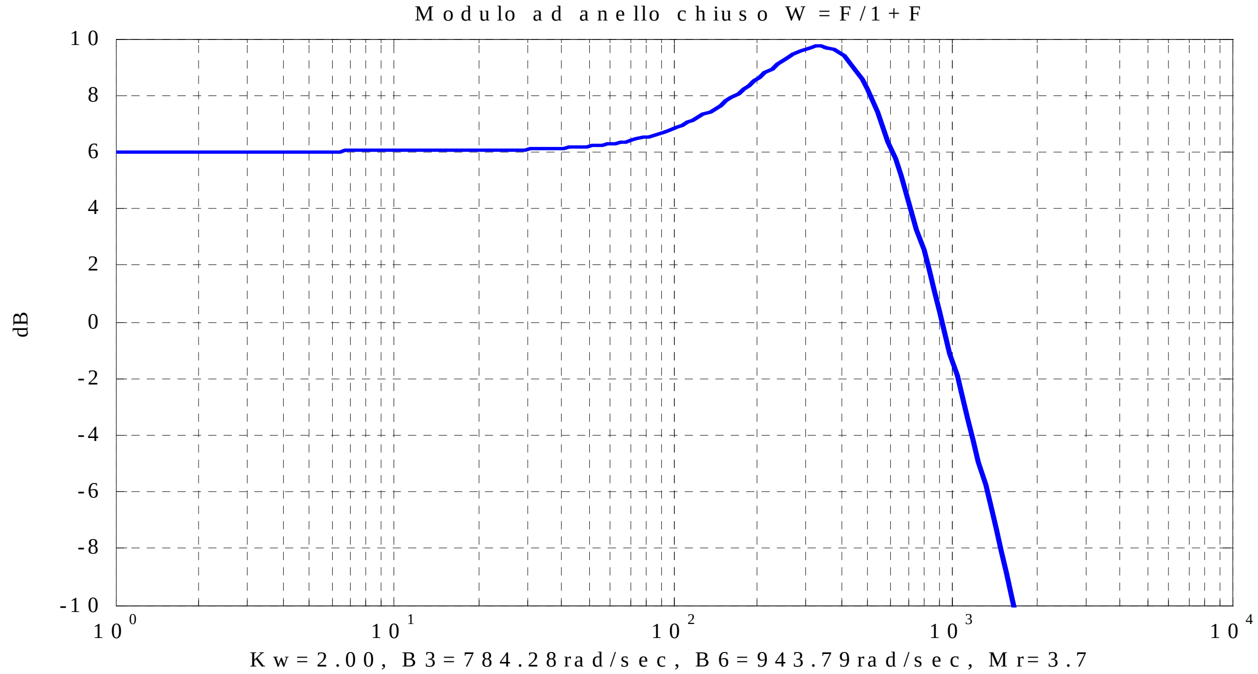
$$\left|\frac{K_d}{1+F(j\omega)}\right| < e$$

$$|F(j\omega)| > \frac{K_d}{e} = \frac{2}{0.2}$$

$$|F(j\omega)| > 10 = 20dB$$

fino a $\omega < 100$ rad/sec




Modulo ad anello chiuso W = F/1+F
dB
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4
Kw=2.00, B3=784.28rad/sec, B6=943.79rad/sec, Mr=3.7

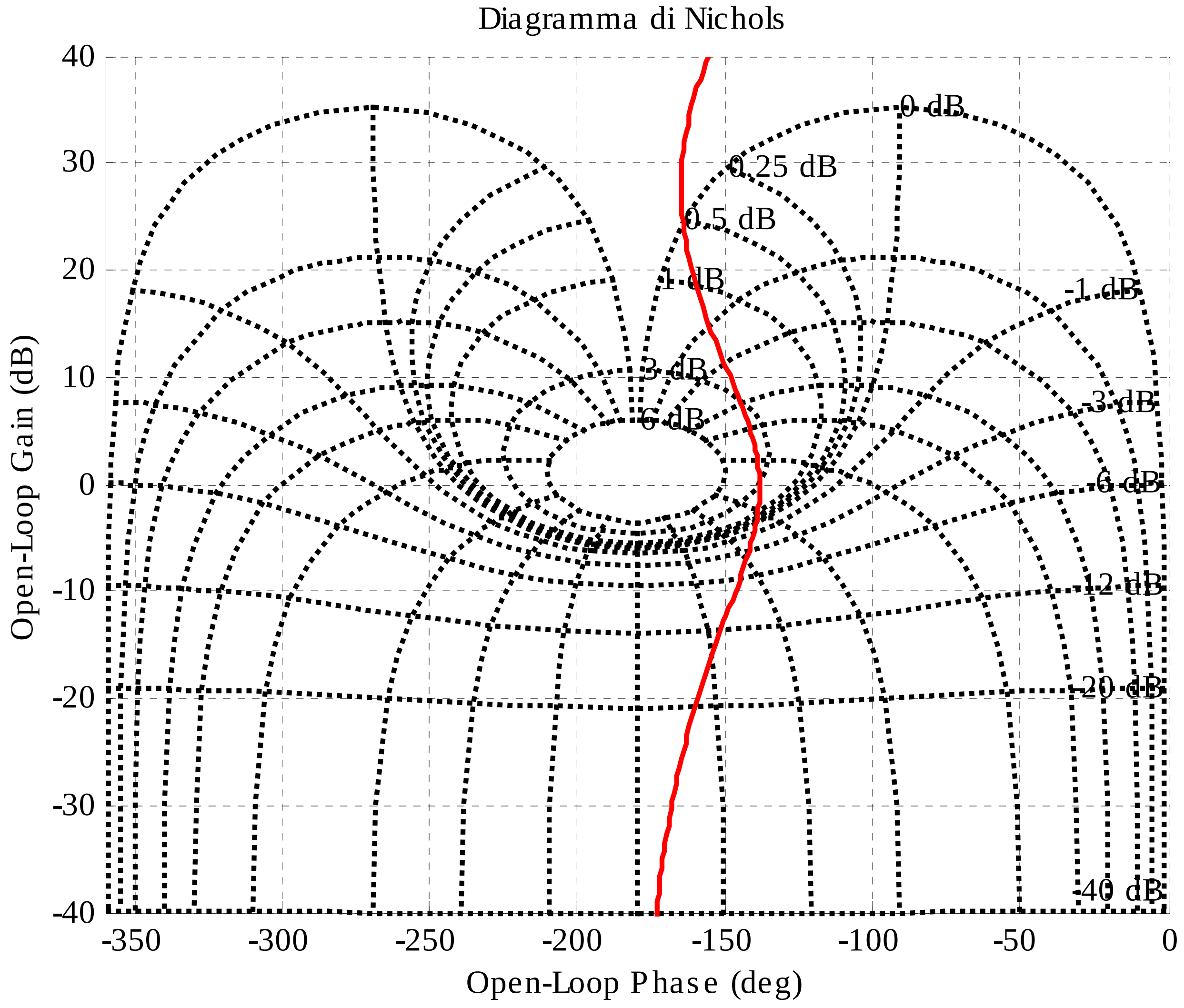
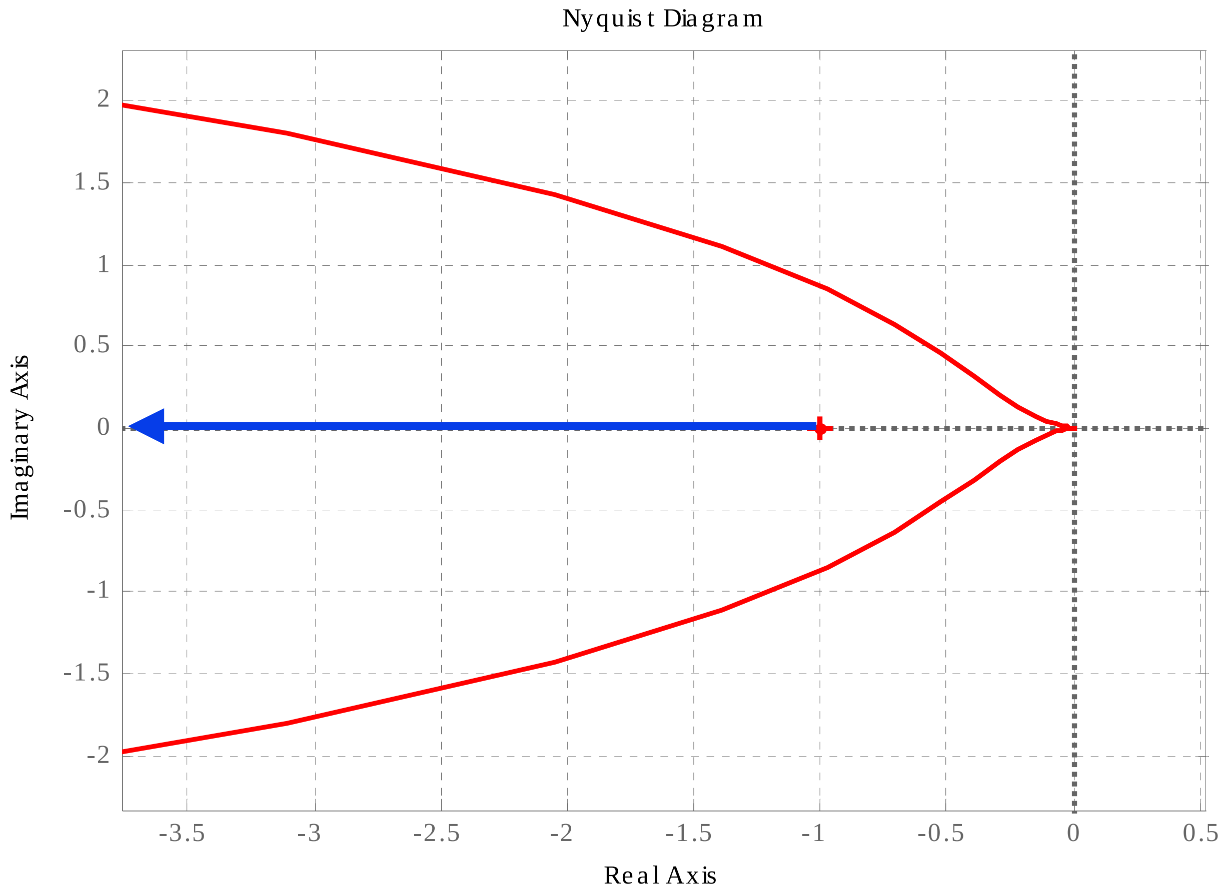


Diagramma di Nichols
Open-Loop Gain (dB)
Open-Loop Phase (deg)
0 dB
0.25 dB
0.5 dB
1 dB
3 dB
6 dB
-1 dB
-3 dB
-6 dB
-12 dB
-20 dB
-40 dB
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-350
-300
-250
-200
-150
-100
-50
0



Poiché il diagramma di Nyquist non interseca la funzione descrittiva della saturazione (-inf, -1), il sistema non si porterà sul ciclo limite. Anche moltiplicando il guadagno il catena diretta non sarà possibile intersecarla visto che la fase non scende mai sotto i –180°

Per cominciare discretizziamo l'uscita y(t) con il metodo indicato:

$$y(s)=1/s-1/(s+3)$$

Con il metodo esatto e con Tc=0.1 sec otteniamo

$$Y(z)=z/(z-1) - z/(z-\beta) = z\,(1-\beta)/[(z-1)(z-\beta)] \quad \beta=e^{-3Tc}=0.7408$$

La funzione di trasferimento W(z), dato l'ingresso a gradino U(z)=z/(z-1) varrà:

$$W(z)=Y(z)/U(z)=(1-\beta)/(z-\beta)$$

il cui guadagno, ottenibile ponendo z=1, vale 1 e non necessita di modifiche.

Il regolatore R(z) sarà dato, quindi, da

$$R(z)=1/G(z)\ W(z)/(1-W(z))=(1-\beta)(5z-1)/[5(z-1)]$$

L'equazione alle differenze che si ottiene dalla W(z) si può scrivere:

$$y_k= \beta\, y_{k-1}+(1-\beta)u_{k-1}= 0.7408\, y_{k-1}+0.2592\, u_{k-1}$$

L'ingresso da applicare è u_k={1, 0, 0, 0, 0, …} per cui i primi campioni di y_k saranno:

$$y_k=\{0,\ 0.2592,\ 0.1920,\ 0.1422,\ 0.1054,\ \ldots\}$$

$A_1 = [-2]; = B_1 = [1]; C_1 = [-1], A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}; = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; C_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$

Ponendo l'ingresso del secondo sistema pari all'uscita del primo si ottiene il nuovo sistema

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice di controllabilità è data da:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

il cui rango vale 2, pari alla dimensione del sottospazio controllabile. Usando la matrice di trasformazione:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

quindi avremo nella parte controllabile gli autovalori 1 e -2 e nella parte non controllabile l'autovalore -2 .

La funzione di trasferimento si può calcolare utilizzando il sottospazio controllabile:

$$F(s)=\tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} = \frac{2}{(1-s)(s+2)} = -\frac{2}{s^2 + s - 2}$$

La matrice di osservabilità è data da:

$$O=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

il cui rango vale 2, pari alla dimesione del sottospazio osservabile. L'unico autovalore non osservabile è -2, proprio quello non controllabile altrimenti sarebbe scomparso nel calcolo della funzione di trasferimento.

A questo punto basta applicare Routh al sistema con controreazione unitaria che ha k*F(s) in catena diretta.

Al denominatore della funzione di trasferimento si avrà:

(1-s)(s+2)+2*k=0

$-s^2 - s + 2 + 2k = 0$

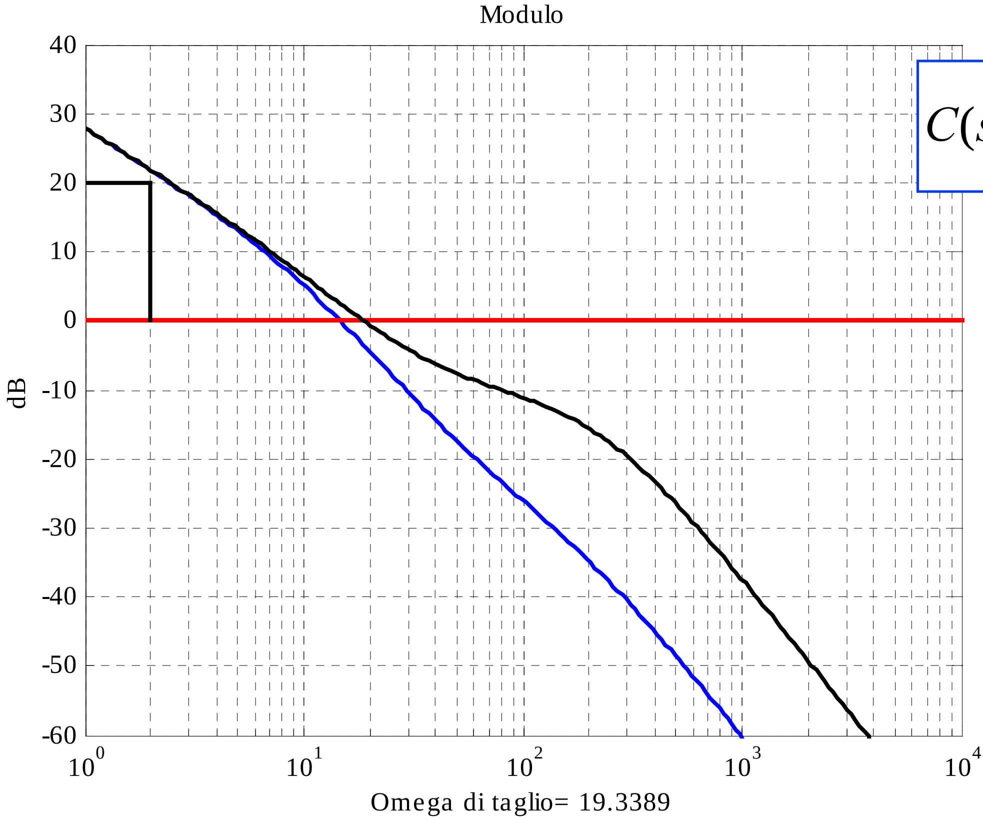
con un cambiamento di variabile $s = \sigma - 1$

$-(\sigma - 1)^2 - (\sigma - 1) + 2 + 2k = 0$

$-(\sigma^2 - 2\sigma + 1) - \sigma + 1 + 2 + 2k = 0$

$-\sigma^2 + \sigma + 2 + 2k = 0$

da cui si deduce che non esiste un k in grado di porre tutti gli autovalori a parte reale minore di -1.



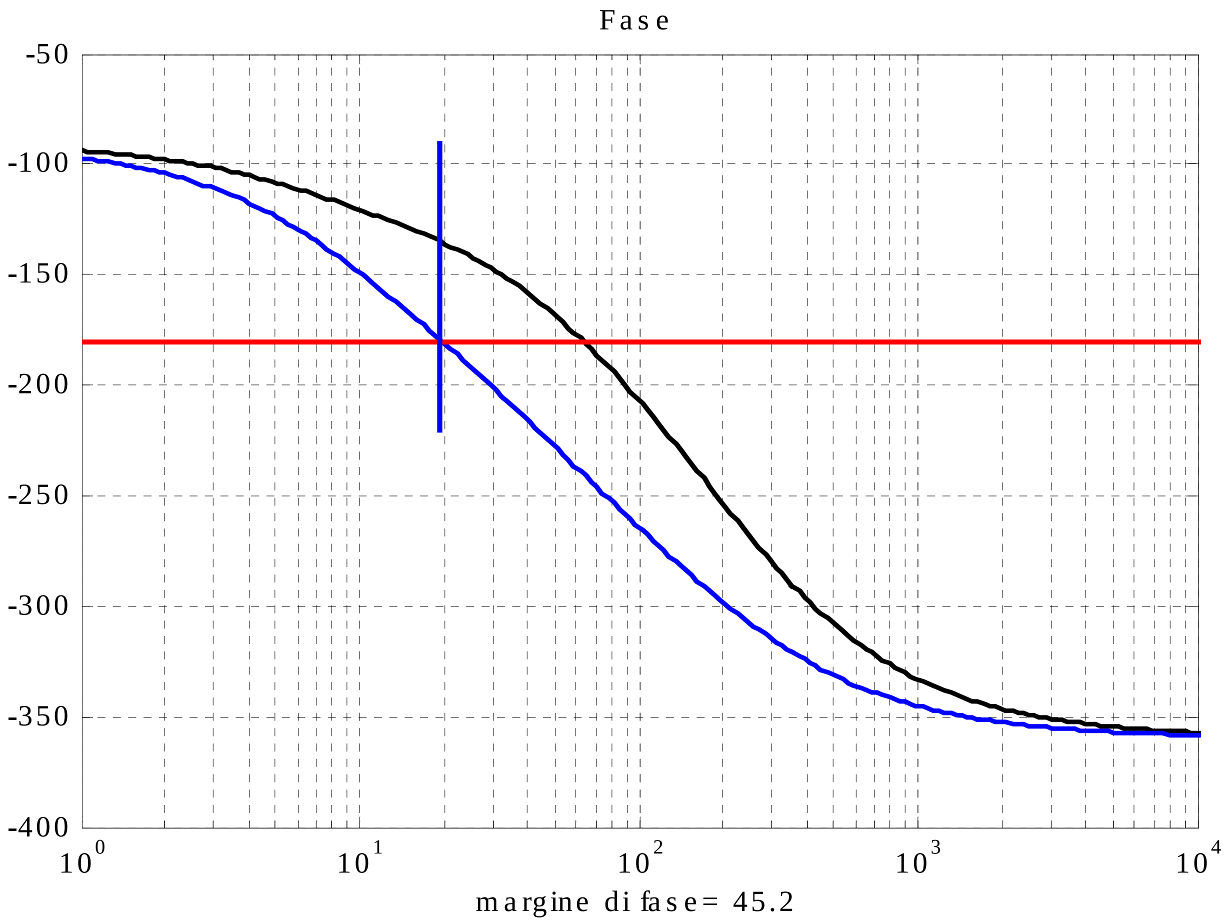
$$C(s)=\frac{5}{s}\frac{0.06s+1}{0.06/14s+1}$$

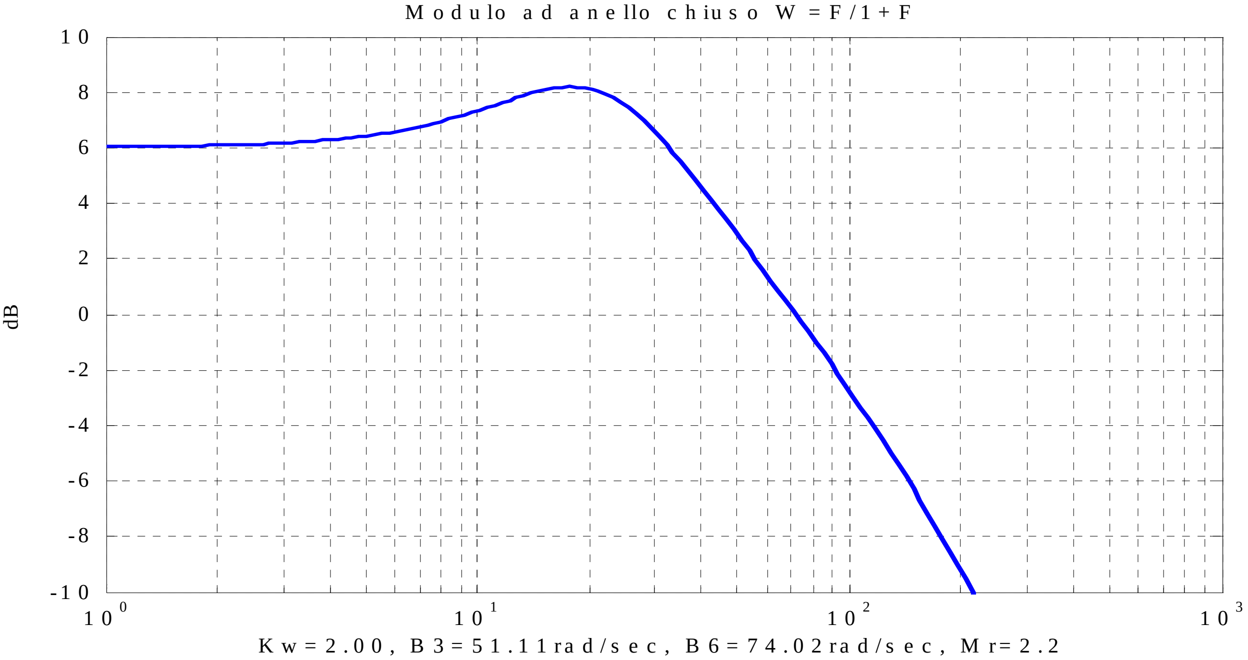
$$\left|\frac{K_d}{1+F(j\omega)}\right|<e$$

$$|F(j\omega)|>\frac{K_d}{e}=\frac{2}{0.2}$$

$$|F(j\omega)|>10=20dB$$

fino a $\omega < 2$ rad/sec




Modulo ad anello chiuso W = F/1+F
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
dB
10^0
10^1
10^2
10^3
Kw = 2.00, B3 = 51.11rad/sec, B6 = 74.02rad/sec, Mr = 2.2

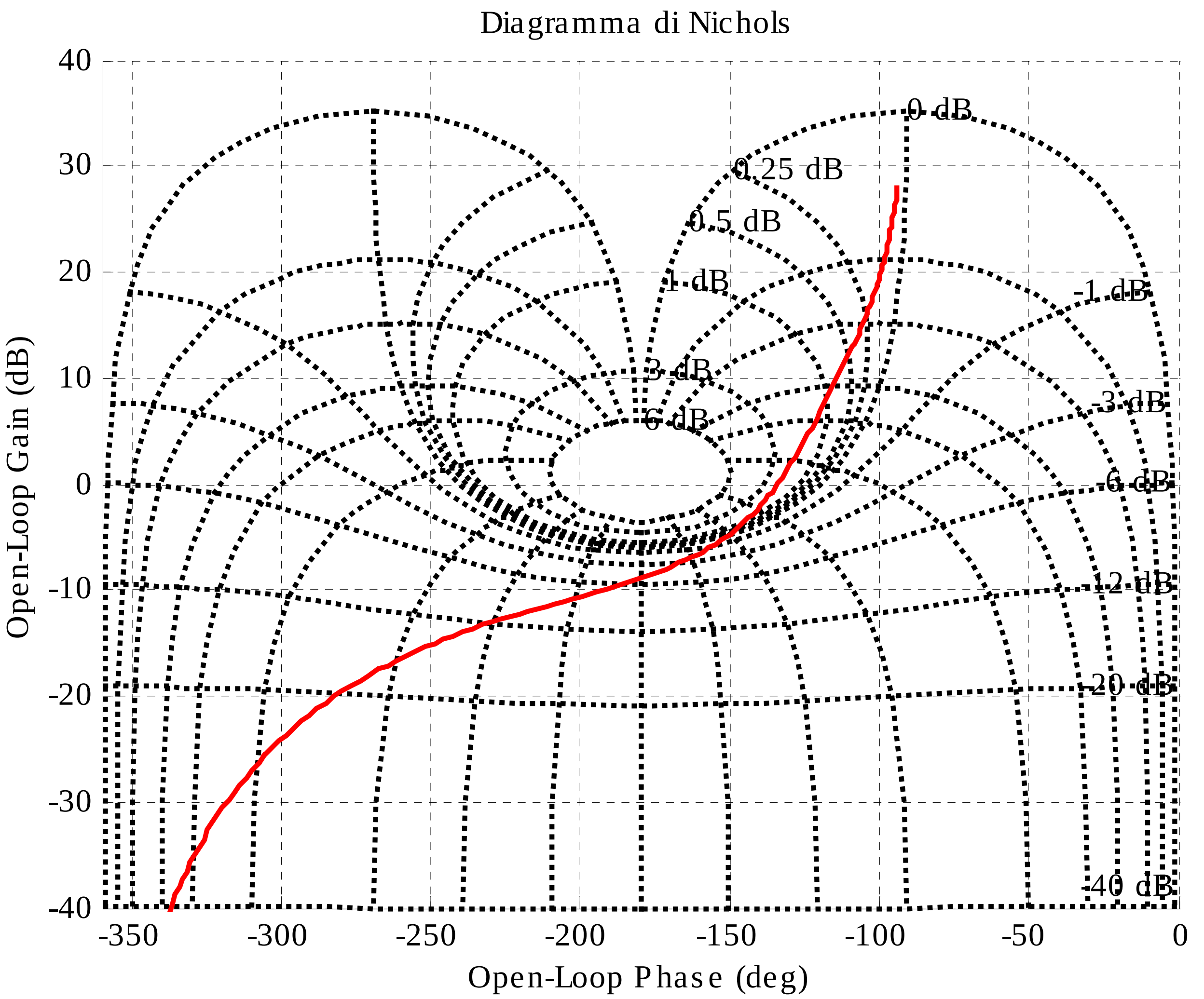
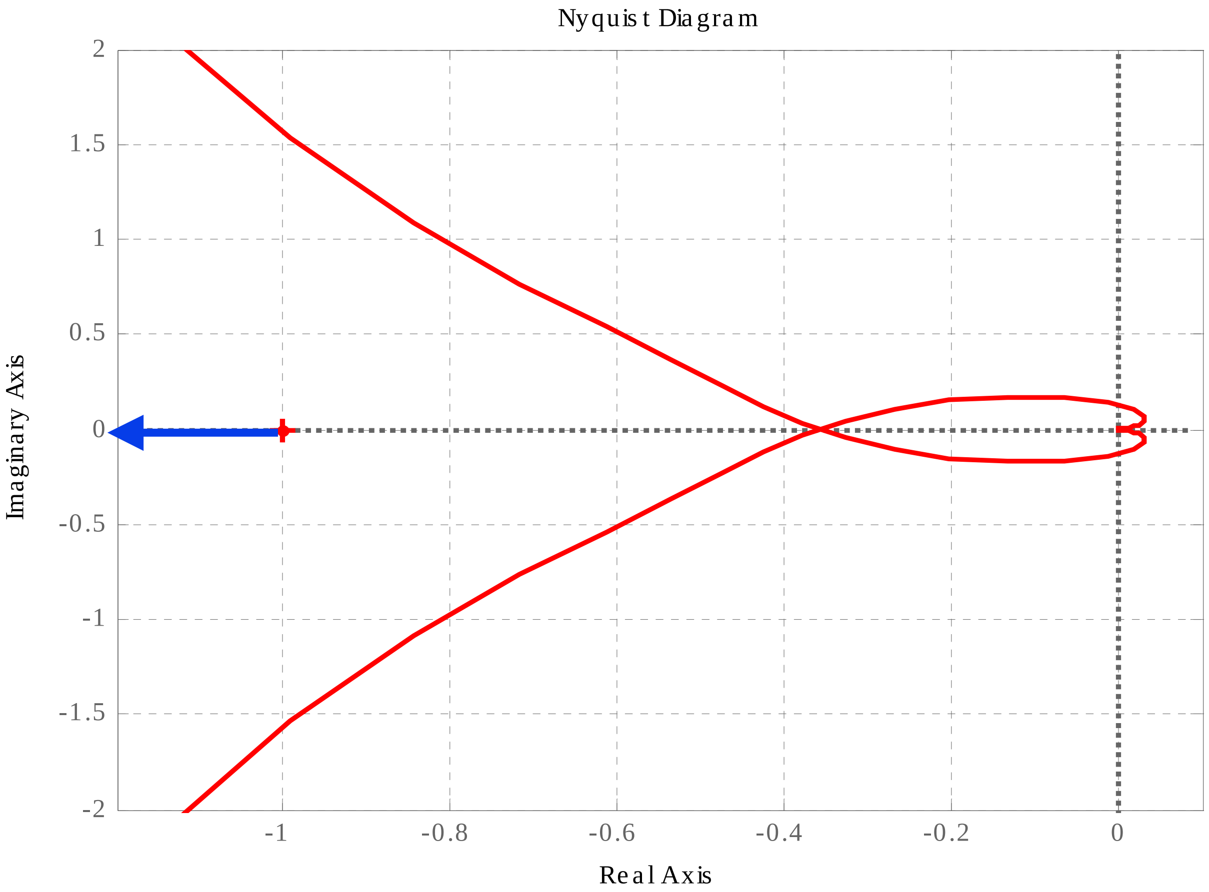


Diagramma di Nichols
0 dB
0.25 dB
0.5 dB
1 dB
3 dB
6 dB
-1 dB
-3 dB
-6 dB
-12 dB
-20 dB
-40 dB
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
Open-Loop Gain (dB)
-350
-300
-250
-200
-150
-100
-50
0
Open-Loop Phase (deg)



Poiché il diagramma di Nyquist non interseca la funzione descrittiva della saturazione (-inf, -1), il sistema non si porterà sul ciclo limite.

Moltiplicando il guadagno in catena diretta per 10, il punto a –180° si porterà in –3.6. In quel punto sussistono le condizioni per un innesco di un ciclo limite di pulsazione pari a 60 rad/sec e di ampiezza x tale che F(x)=1/3.6=0.27

Per cominciare discretizziamo il sistema G(s)con il metodo delle differenze all'indietro:

s=$\dfrac{1-z^{-1}}{T_c}$

$$G(z)=\frac{1}{\dfrac{1-z^{-1}}{T_c}+2}=\frac{zT_c}{(1+2T_c)z-1}$$

la funzione a ciclo chiuso desiderata è

$$W(z)=z^{-2}$$

per cui, visto che G(s) ha poli e zeri dentro il cerchio unitario, il regolatore può essere scritto come

$$R(z)=\frac{1}{G(z)}\frac{W(z)}{1-W(z)}=\frac{(2T_c+1)z-1}{zT_c}\frac{1}{z^2-1}$$

Per calcolare il segnale c scriviamo la seguente funzione di trasferimento:

$$\frac{\mathrm{C(z)}}{\mathrm{U(z)}}=\frac{R(z)}{1+R(z)G(z)}=\frac{W(z)}{G(z)}=\frac{(2T_c+1)z-1}{z^3T_c}$$

$$C(z)z^3=\frac{U(z)(2T_c+1)z}{T_c}-\frac{U(z)}{T_c}$$

da cui l'equazione alle differenze:

$$c_k=\frac{(2T_c+1)}{T_c}u_{k-2}-\frac{1}{T_c}u_{k-3}$$

con $u_k=\{1,1,1,1,...\}$ otteniamo la sequenza

$$c_k=\{0,0,2+1/T_c,2,2,2,...\}=\{0,0,12,2,2,2,...\}$$

$$A_1 = [-3]; = B_1 = [1]; C_1 = [1], A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}; = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C_2 = \begin{bmatrix} a & 0 \end{bmatrix}$$

Ponendo l'ingresso del secondo sistema pari all'uscita del primo si ottiene il nuovo sistema

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice di osservabilità è data da:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & \text{a} & 1 \\ 1 & 2 & \text{a-1} \\ \text{a-4} & \text{2a-2} & \text{3-a} \end{bmatrix}$$

che con $a = 3$, il valore di a per cui si ha una cancellazione tra i due sistemi, diventa:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

il cui rango vale 2, pari alla dimensione del sottospazio osservabile. Usando la matrice di trasformazione:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

quindi avremo nella parte non osservabile l'autovalore -3 già stabile.

Per vedere se possiamo stabilizzare la parte rimanente basta scrivere

la funzione di trasferimento che, per $a = 3$, vale

$$\text{F(s)}=\frac{1}{(s-1)(s+2)} = \frac{1}{s^2+s-2}$$

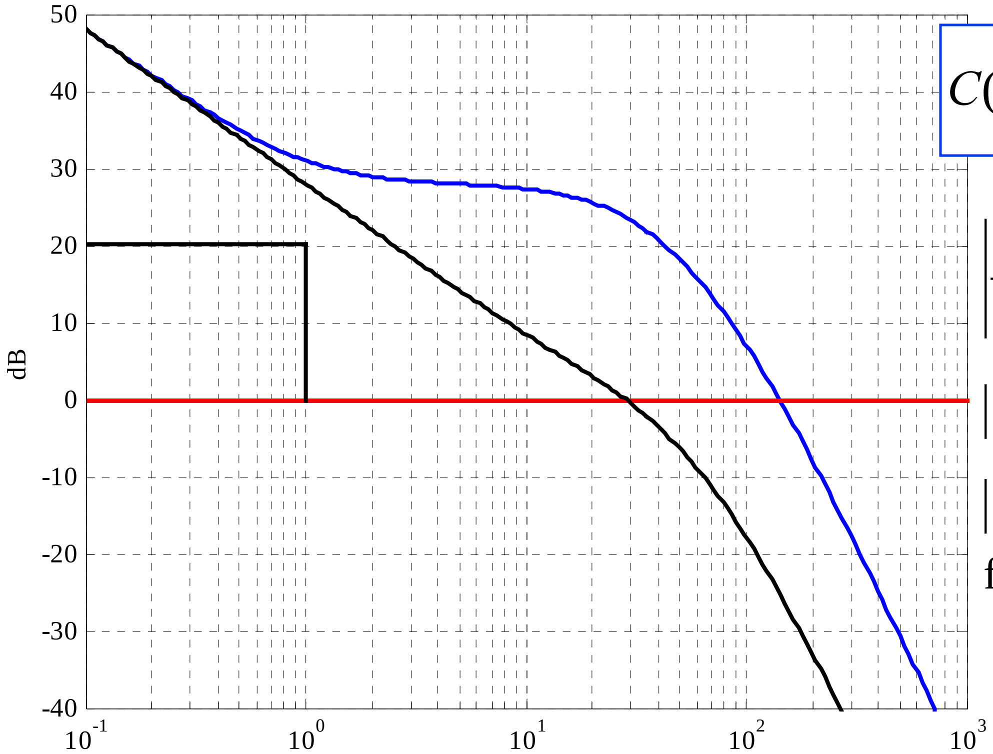
A questo punto basta applicare Routh al sistema con controreazione unitaria che ha k*F(s) in catena diretta.

Al denominatore della funzione di trasferimento si avrà:

$$\text{s}^2 + s + -2 + k$$

che, ovviamente, si stabilizza con $k > 2$.

Modulo



Omega di taglio= 29.6730

$$C(s) = \frac{10}{s}\frac{1/18s+1}{s+1}$$

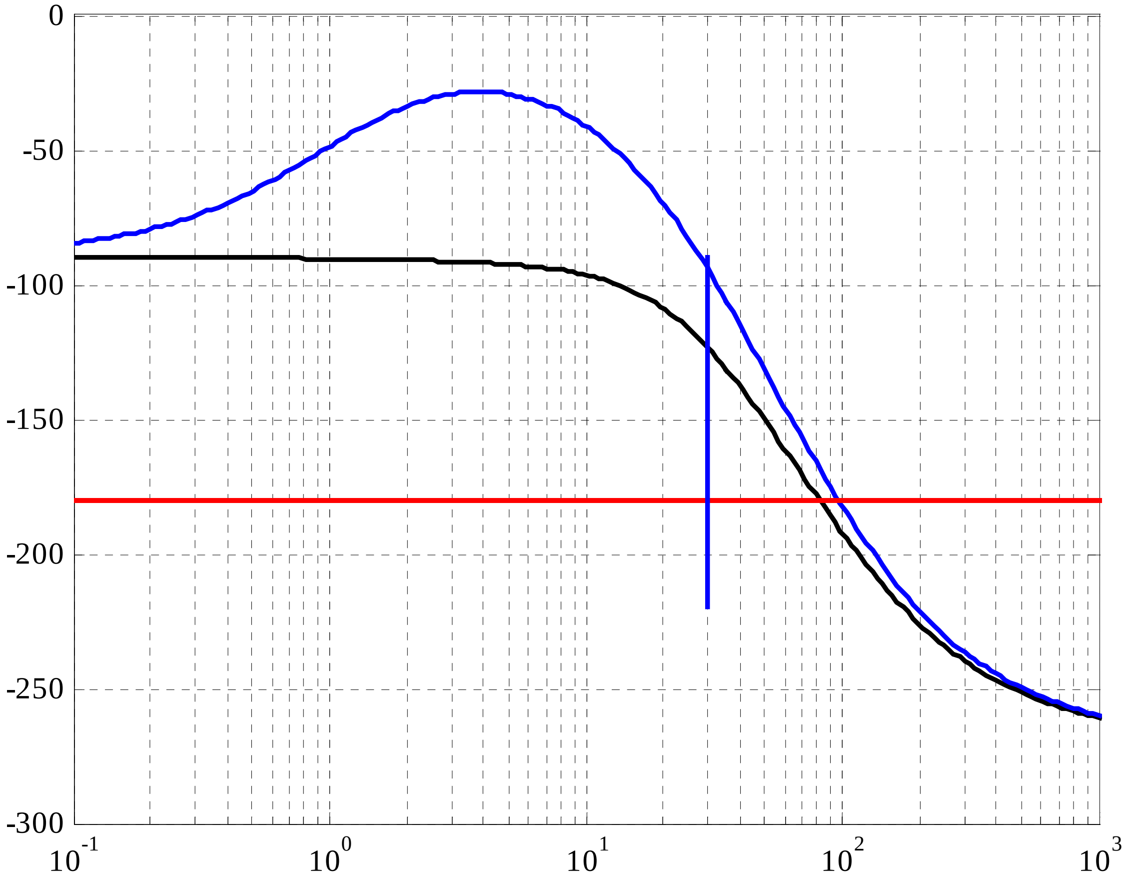
$$\left|\frac{K_d}{1+\quad(\omega)}\right| <$$

$$|\quad(\omega)| > \frac{K_d}{\quad} = \frac{4}{0.4}$$

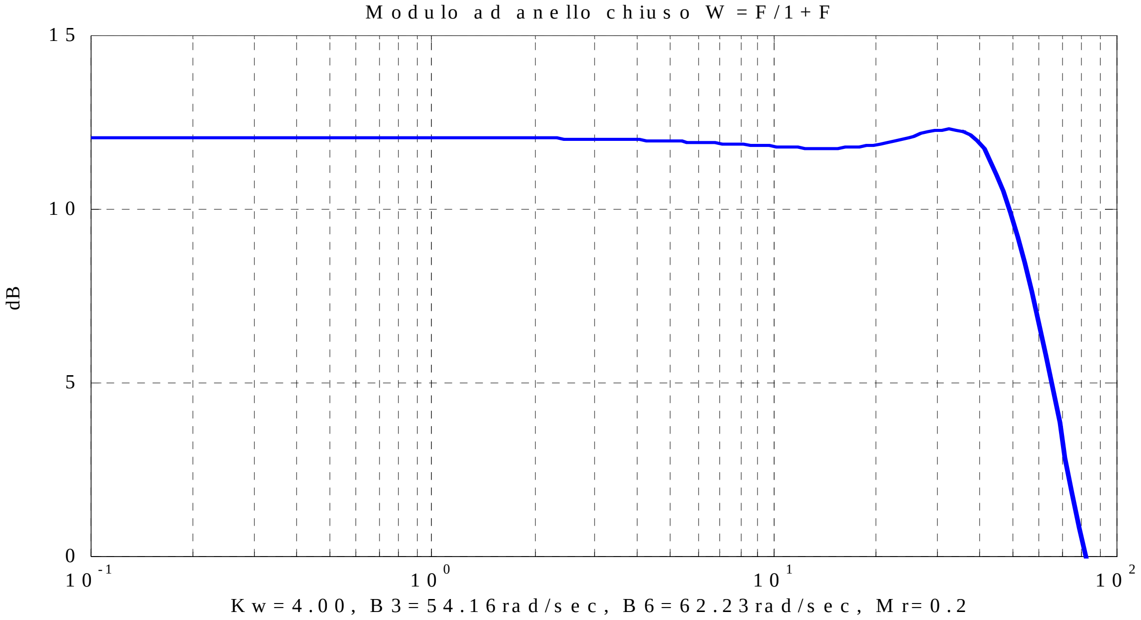
$$|\quad(\omega)| > 10 = 20d$$

fino a $\omega < 1$ rad/sec

Fase



margine di fase= 56.9


Modulo ad anello chiuso W = F/1+F
15
10
5
0
dB
10^-1
10^0
10^1
10^2
Kw=4.00, B3=54.16rad/sec, B6=62.23rad/sec, Mr=0.2

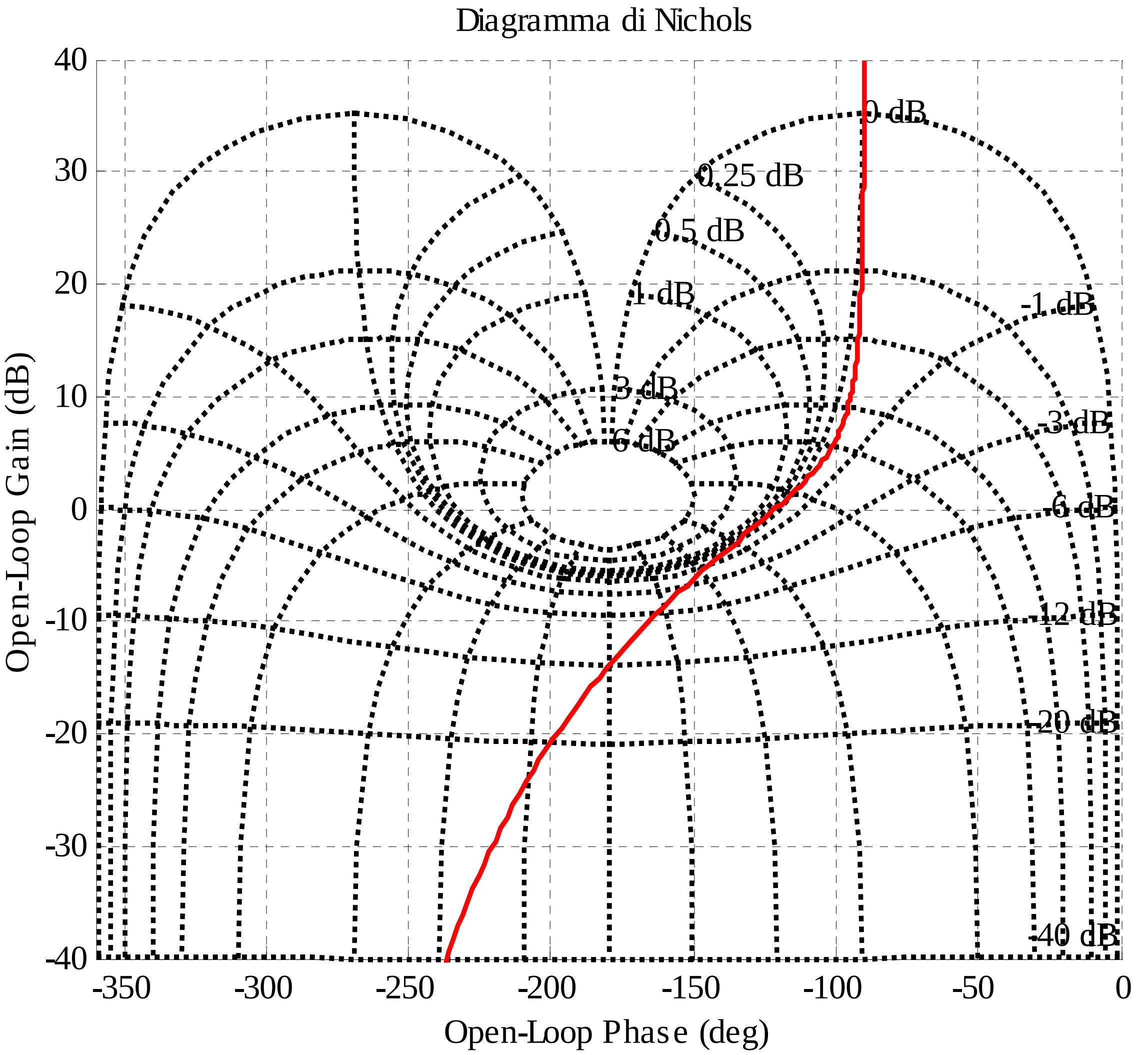
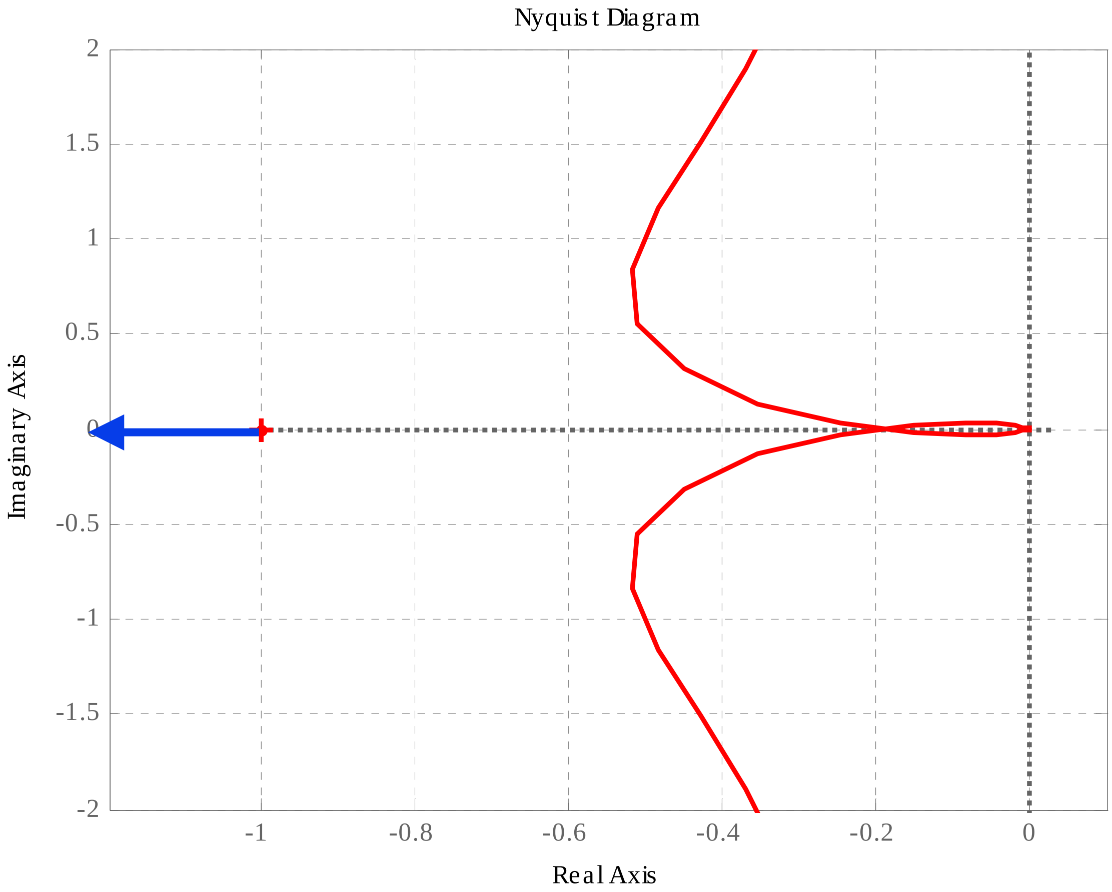


Diagramma di Nichols
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
Open-Loop Gain (dB)
0 dB
0.25 dB
0.5 dB
1 dB
3 dB
6 dB
-1 dB
-3 dB
-6 dB
-12 dB
-20 dB
-40 dB
-350
-300
-250
-200
-150
-100
-50
0
Open-Loop Phase (deg)



Poiché il diagramma di Nyquist non interseca la funzione descrittiva della saturazione (-inf, -1), il sistema non si porterà sul ciclo limite.

Moltiplicando il guadagno in catena diretta per 10, il punto a –180° si porterà in –1.9. In quel punto sussistono le condizioni per un innesco di un ciclo limite di pulsazione pari a 100 rad/sec e di ampiezza x tale che F(x)=1/1.9=0.52

Per cominciare discretizziamo il sistema G(s) con il metodo di Tustin:

s=$\frac{2}{T_c}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

$$G(z)=\frac{1}{\frac{2}{T_c}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+2}=\frac{T_c+T_c z^{-1}}{(2+2T_c)+(2T_c-2)z^{-1}}=\frac{T_c+T_c z}{(2+2T_c)z+(2T_c-2)}$$

per calcolare la W(z) scriviamo l'ingresso $U(z)$ e l'uscita $Y(z)$:

$$(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$Y(z)=\frac{0.2}{z}+\frac{0.4}{z^2}+\frac{0.6}{z^3}\frac{z}{z-1}$$

la funzione a ciclo chiuso sarà

$$(z)=\frac{Y(z)}{(z)}=\frac{0.2z^2+0.2z+0.2}{z^3}$$

per cui, visto che G(z) ha poli e zeri dentro il cerchio unitario, il regolatore può essere scritto come

$$R(z)=\frac{1}{G(z)}\frac{(z)}{1-W(z)}=\frac{2(z^3(T_c+1)+2T_c z^2+2T_c z+T_c-1)}{T_c(z+1)(5z^3-z^2-z-1)}$$

Per calcolare il segnale c scriviamo la sefuente funzione di trasferimento:

$$\frac{\mathrm{C(z)}}{\mathrm{U(z)}}=\frac{R(z)}{1+R(z)G(z)}=\frac{W(z)}{G(z)}=\frac{2(T_c+1)z^3+4T_c z^2+4T_c z+2(T_c-1)}{5T_c z^4+5T_c z^3}$$

$$C(z)5T_c z^4+C(z)5T_c z^3=U(z)2(T_c+1)z^3+U(z)4T_c z^2+U(z)4T_c z+U(z)2(T_c-1)$$

da cui l'equazione alle differenze:

$$c_k=-c_{k-1}+4.4u_{k-1}+0.8u_{k-2}+0.8u_{k-3}-3.6u_{k-4}$$

con $u_k=\{0,1,2,3,...\}$ otteniamo la sequenza

$$c_k=\{0,4.4,9.6,11.2,12,20.8,...\}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}; = B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \end{bmatrix}, A_2 = [-3]; = B_2 = [1]; C_2 = [1]$$

Ponendo l'ingresso del secondo sistema pari all'uscita del primo si ottiene il nuovo sistema

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ a & 1 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice di controllabilità è data da:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & a-4 \end{bmatrix}, \det(R) = -a + 3$$

che con $a = 3$, il valore di a per cui si ha una cancellazione tra i due sistemi, si annulla.

Con $a = 3$ il rango vale 2, pari alla dimensione del sottospazio controllabile. Usando la matrice di trasformazione:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

quindi avremo nella parte non controllabile l'autovalore -3 già stabile.

Per determinare la matrice di controreazione dallo stato che sposta gli altri autovalori in, per esempio, (-2,-2) scriviamo il polinomio caratteristico desiderato:

$$\mathrm{P}^*(\lambda) = (\lambda + 2)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4$$

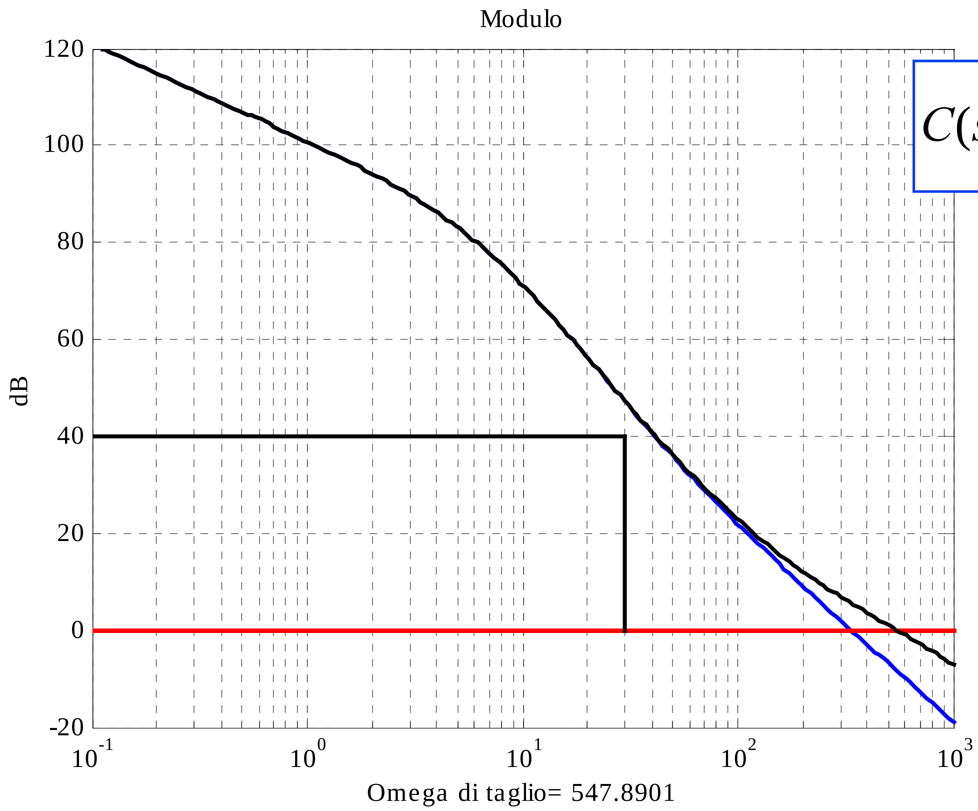
e calcoliamo il vettore $\tilde{\gamma}$ relativo al sottospazio controllabile:

$$\tilde{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 & \tilde{A}_{11}\tilde{b}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \tilde{\mathrm{R}}^{-1}$$

$$\tilde{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{F}_1 = -\tilde{\gamma}\mathrm{P}^*(\tilde{A}_{11}) = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} \tilde{F}_1 & 0 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$



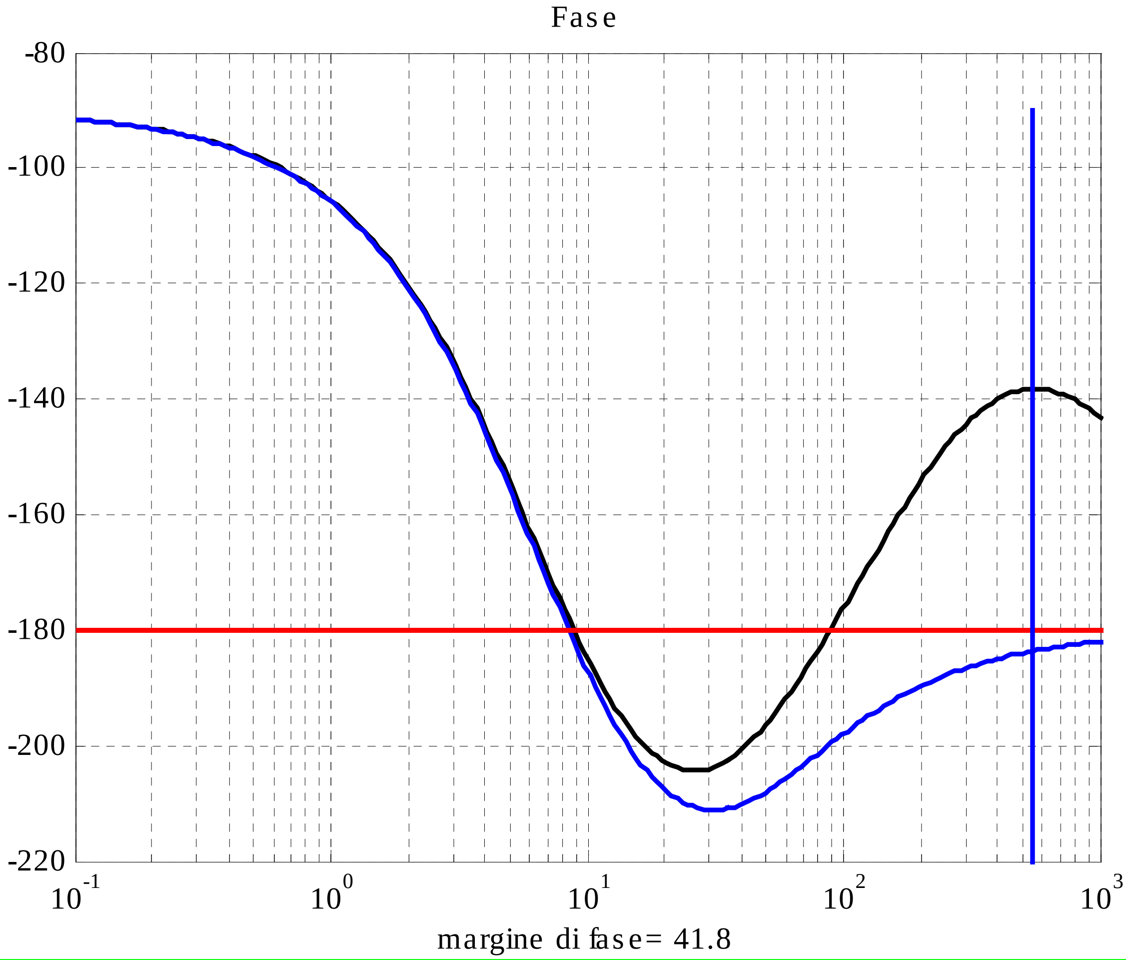
$$C(s)=\frac{45}{s}\frac{0.005s+1}{0.005/6s+1}$$

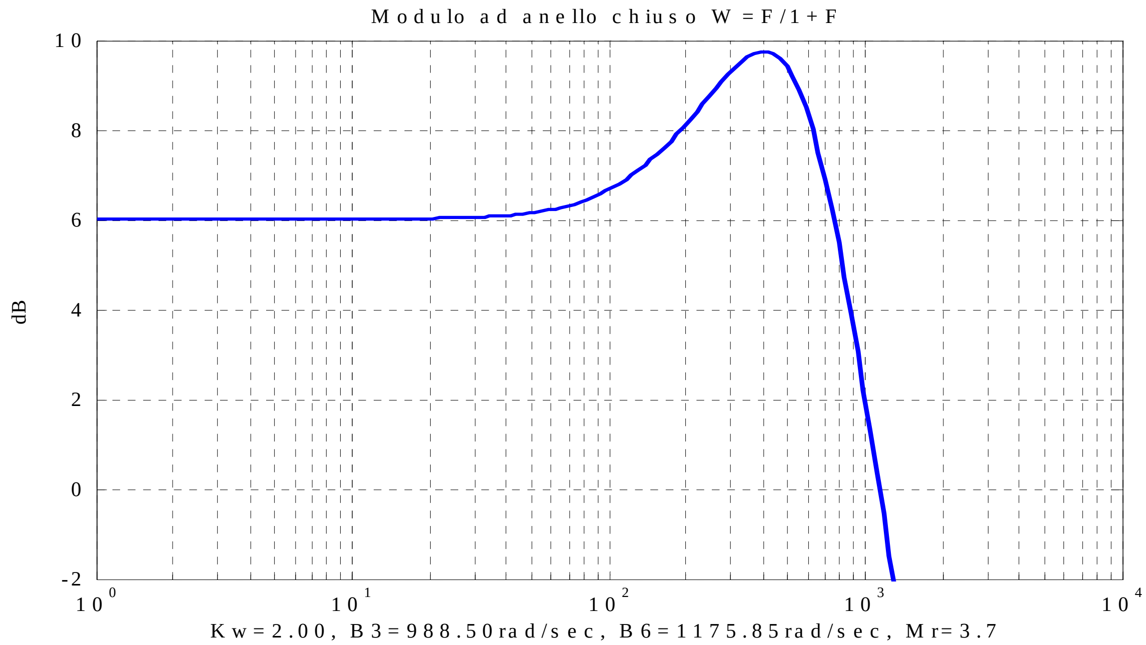
$$\left|\frac{K_d}{1+F(j\omega)}\right|<e$$

$$|F(j\omega)|>\frac{K_d}{e}=\frac{2}{0.02}$$

$$|F(j\omega)|>100=40dB$$

fino a $\omega<30$ rad/sec




Modulo ad anello chiuso W = F/1+F
dB
10
8
6
4
2
0
-2
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4
Kw=2.00, B3=988.50rad/sec, B6=1175.85rad/sec, Mr=3.7

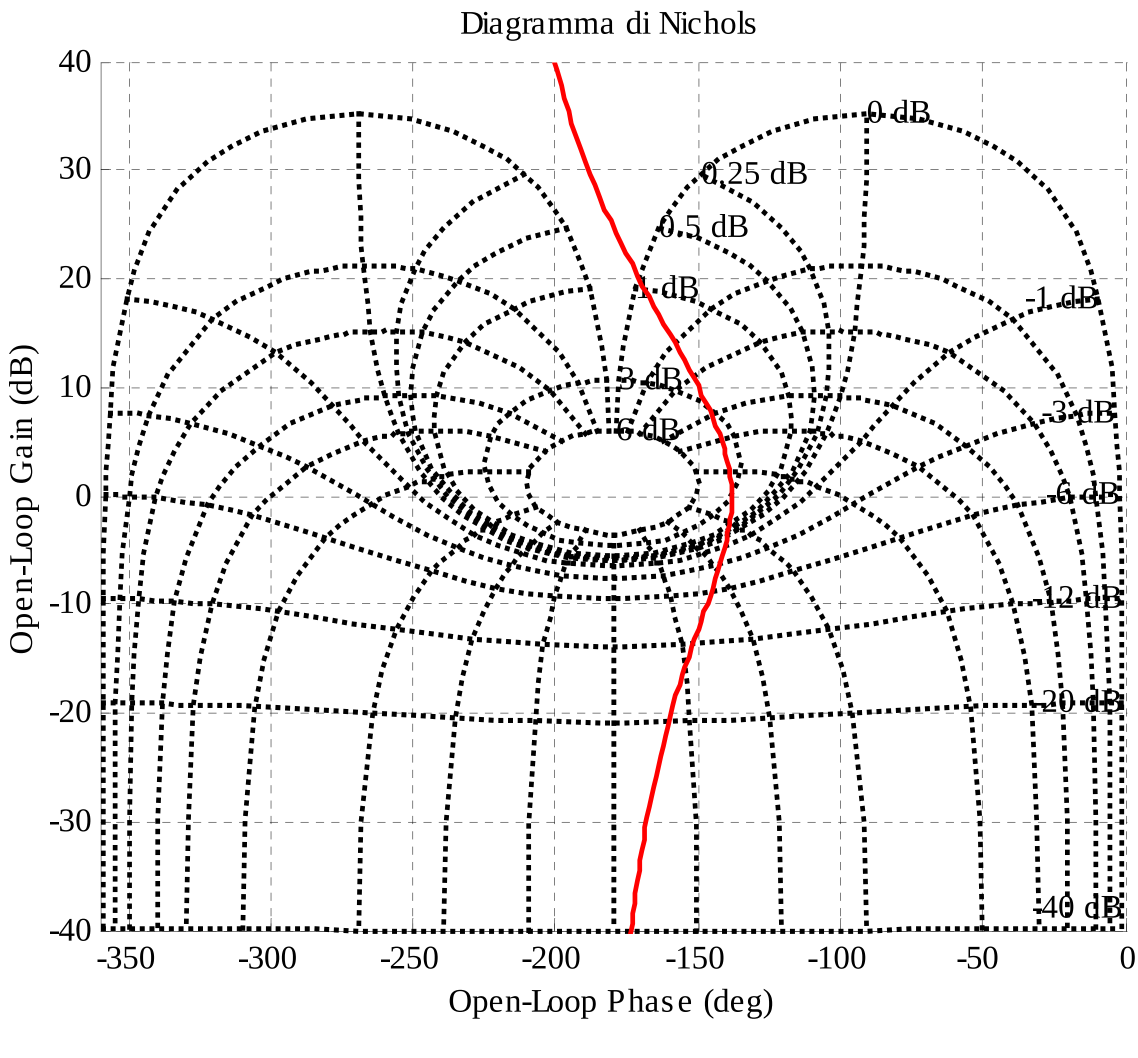


Diagramma di Nichols
Open-Loop Gain (dB)
Open-Loop Phase (deg)
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-350
-300
-250
-200
-150
-100
-50
0
0 dB
0.25 dB
0.5 dB
1 dB
3 dB
6 dB
-1 dB
-3 dB
-6 dB
-12 dB
-20 dB
-40 dB

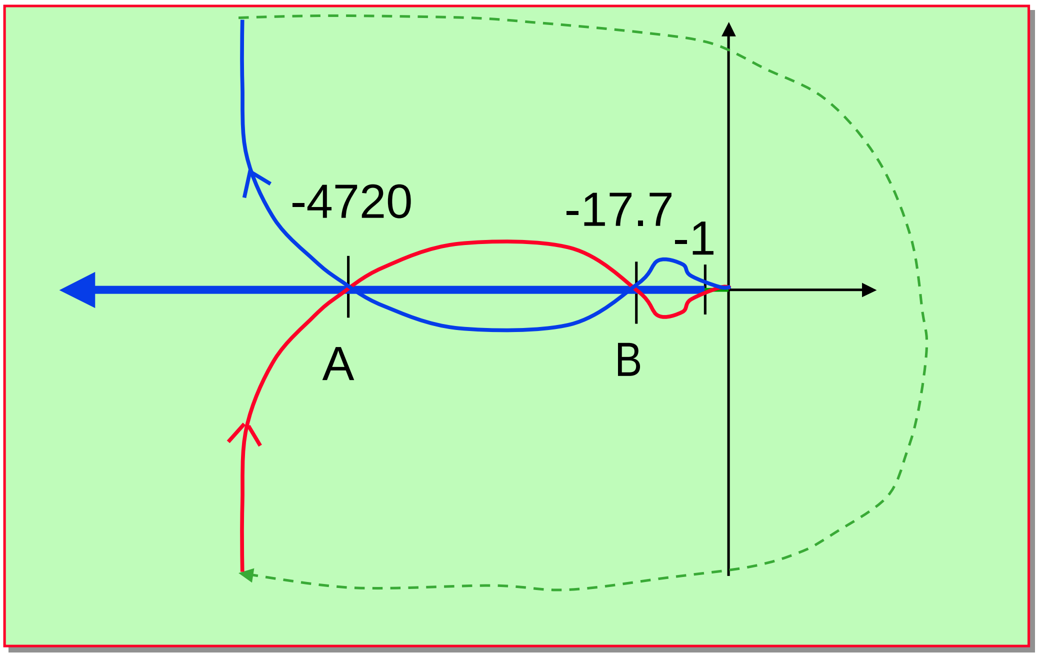


Diagramma di Nyquist

Il diagramma di Nyquist interseca la funzione descrittiva della saturazione (-inf, -1) in due punti (A, B): sussistono le condizioni analitiche per l'instaurarsi di un ciclo limite in due punti.

Nel punto A abbiamo una pulsazione pari a 9 rad/sec e un'ampiezza x tale che F(x)=1/4720.

Nel punto B abbiamo una pulsazione pari a 90 rad/sec e un'ampiezza x tale che F(x)=1/17.7=0.0565

Per cominciare discretizziamo il sistema G(s) con il metodo delle differenze all'indietro:

$$s=\frac{1-z^{-1}}{T_c}$$

$$G(z)=\frac{\dfrac{1-z^{-1}}{T_c}+1}{\dfrac{1-z^{-1}}{T_c}+3}=\frac{(1+T_c)z+1}{(1+3T_c)z+1}$$

per calcolare la W(z) scriviamo l'ingresso $U(z)$e l'uscita $Y(z)$

$$U(z)=1$$

$$Y(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{0.3}{z^3}$$

la funzione a ciclo chiuso sarà

$$W(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{z^2+z+0.3}{z^3}$$

per cui, visto che G(z) ha poli e zeri dentro il cerchio unitario, il regolatore può essere scritto come

$$R(z)=\frac{1}{G(z)}\frac{W(z)}{1-W(z)}=\frac{(10z^2+10z+3)(z(3T_c+1)-1)}{(10z^3-10z^2-10z-3)(z(T_c+1)-1)}$$

$$A_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix};=B_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix};C_1=\begin{bmatrix}2 & 0\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}-2\end{bmatrix};=B_2=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix};C_2=\begin{bmatrix}-1\end{bmatrix}$$

Ponendo l'ingresso del secondo sistema pari all'uscita del primo si ottiene il nuovo sistema

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

La matrice di controllabilità è data da:

$$R=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

il cui rango vale 2, pari alla dimensione del sottospazio controllabile. Usando la matrice di trasformazione:

$$T=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix},T^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix},\tilde{B}=T^{-1}B=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\tilde{C}=CT=\begin{bmatrix}0 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

quindi avremo nella parte controllabile gli autovalori 1 e -2 e nella parte non controllabile l'autovalore -2 .

La funzione di trasferimento si può calcolare utilizzando il sottospazio controllabile:

$$F(s)=\tilde{C}(sI-\tilde{A})^{-1}\tilde{B}=-\frac{2}{(s-1)(s+2)}$$

La matrice di osservabilità è data da:

$$O=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ 4 & -2 & -4\end{bmatrix}$$

il cui rango vale 3 da cui la completa osservabilità del sistema.

A questo punto basta applicare Routh al sistema con controreazione unitaria che ha k*F(s) in catena diretta.

Al denominatore della funzione di trasferimento si avrà:

(s-1)(s+2)-2*k=0

$s^2+s-2-2k=0$

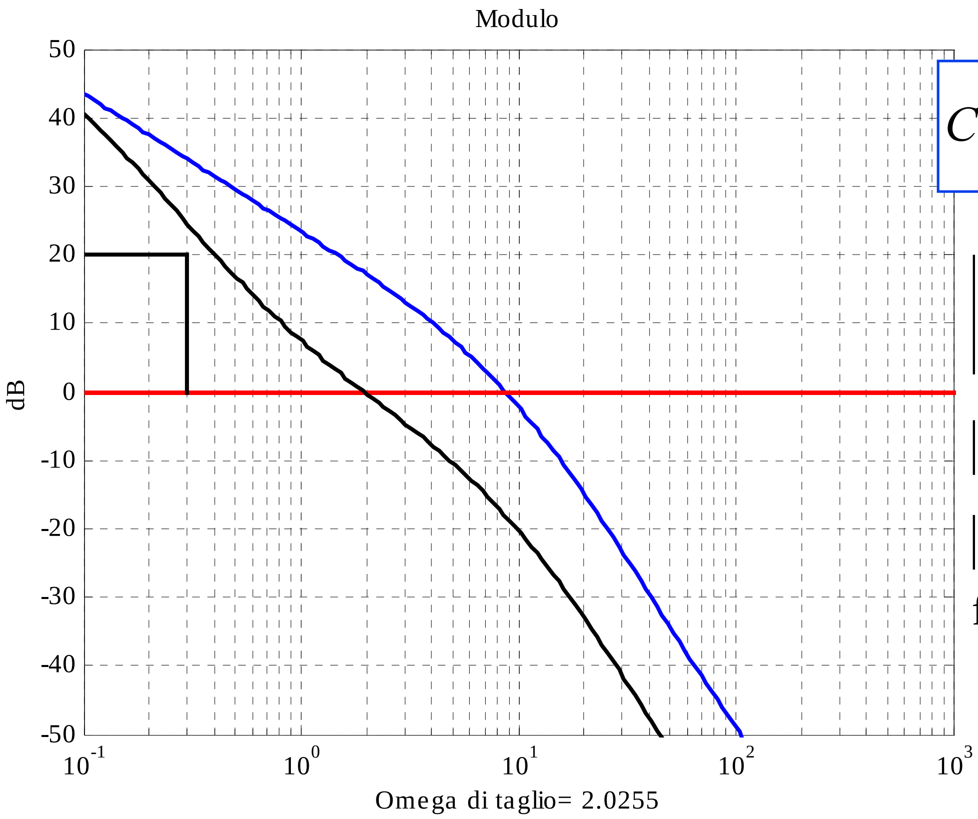
con un cambiamento di variabile $s=\sigma-1$

$(\sigma-1)^2+(\sigma-1)-2-2k=0$

$(\sigma^2-2\sigma+1)+\sigma-1-2-2k=0$

$\sigma^2-\sigma-2-2k=0$

da cui si deduce che non esiste un k in grado di porre tutti gli autovalori a parte reale minore di -1.



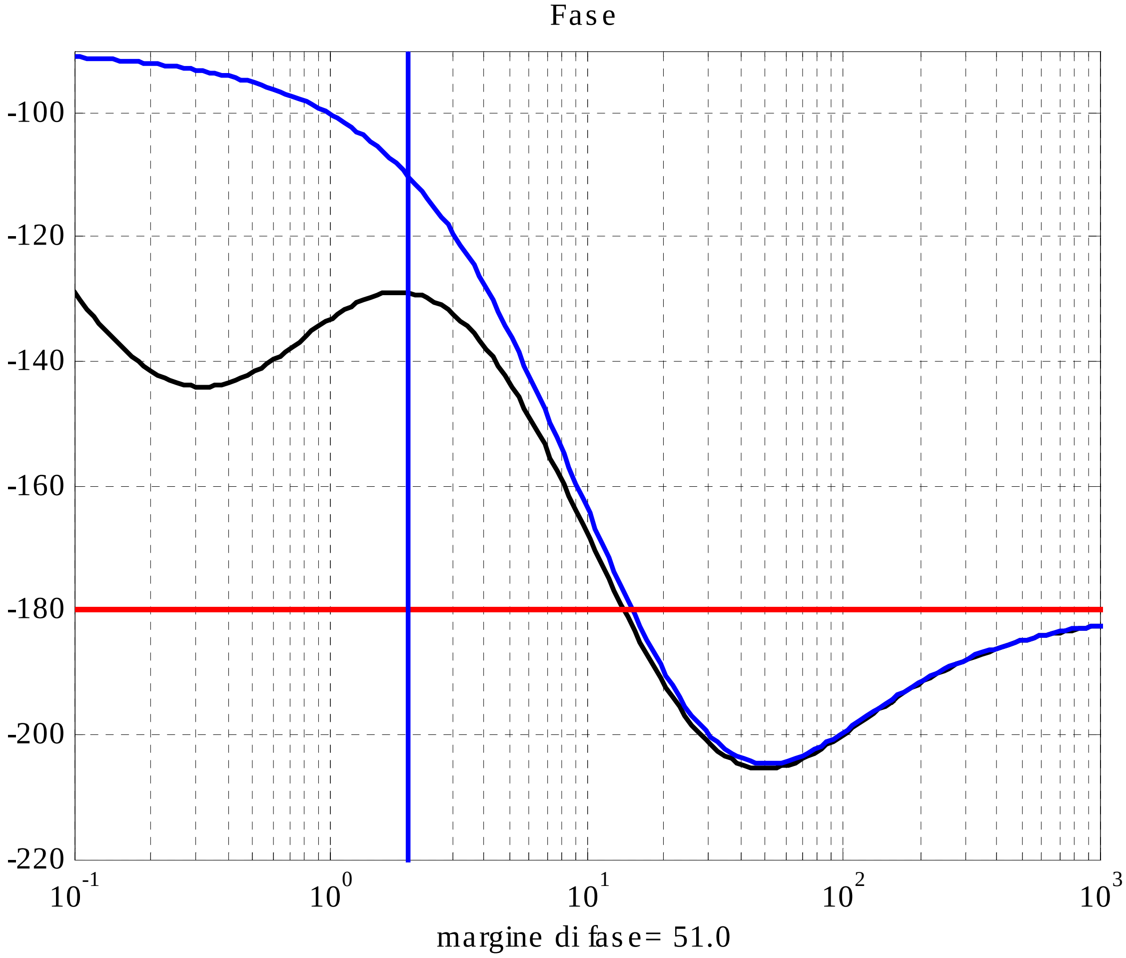
$$C(s) = \frac{12}{s}\frac{10/8s+1}{10s+1}$$

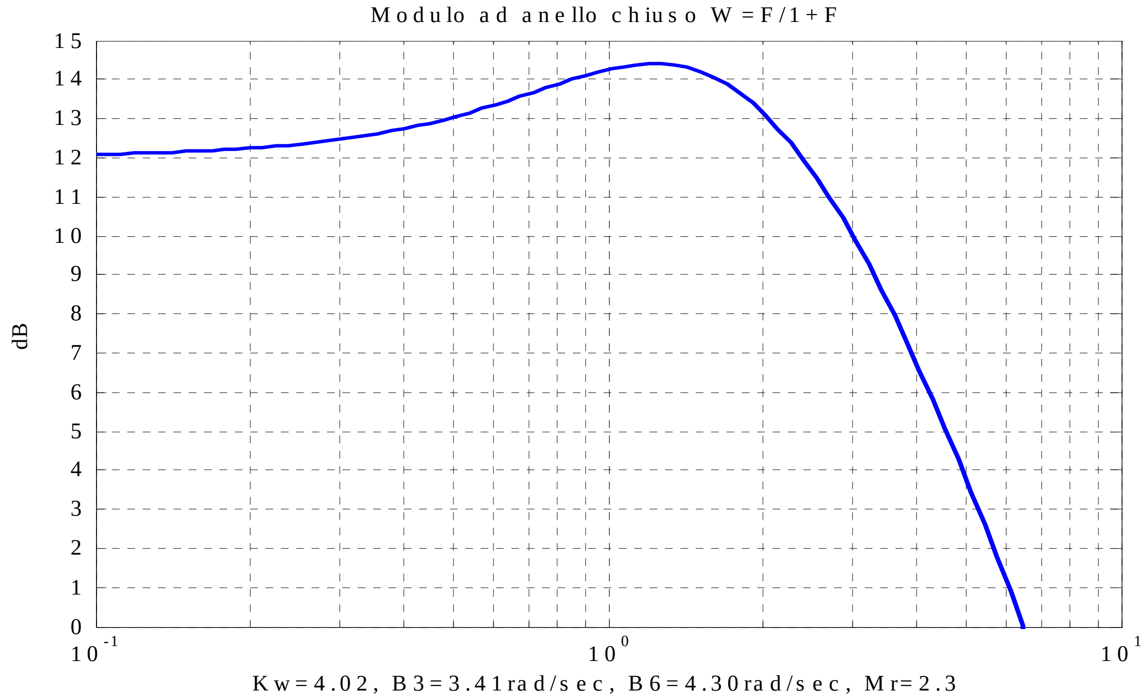
$$\left|\frac{K_d}{1+F(j\omega)}\right| < e$$

$$|F(j\omega)| > \frac{K_d}{e} = \frac{4}{0.4}$$

$$|F(j\omega)| > 10 = 20$$

fino a $\omega < 0.3$ rad/sec




Modulo ad anello chiuso W = F/1+F
dB
Kw=4.02, B3=3.41rad/sec, B6=4.30rad/sec, Mr=2.3

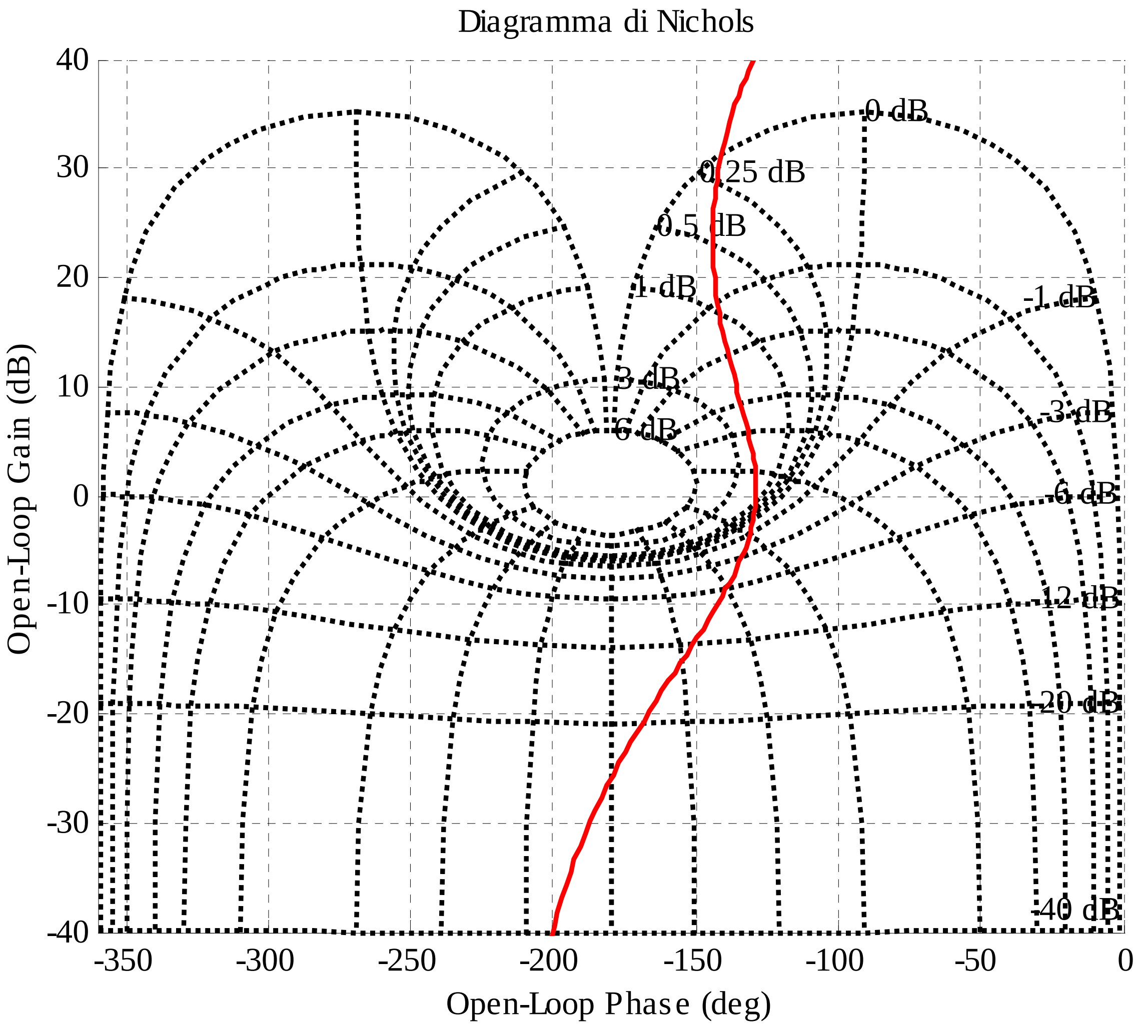
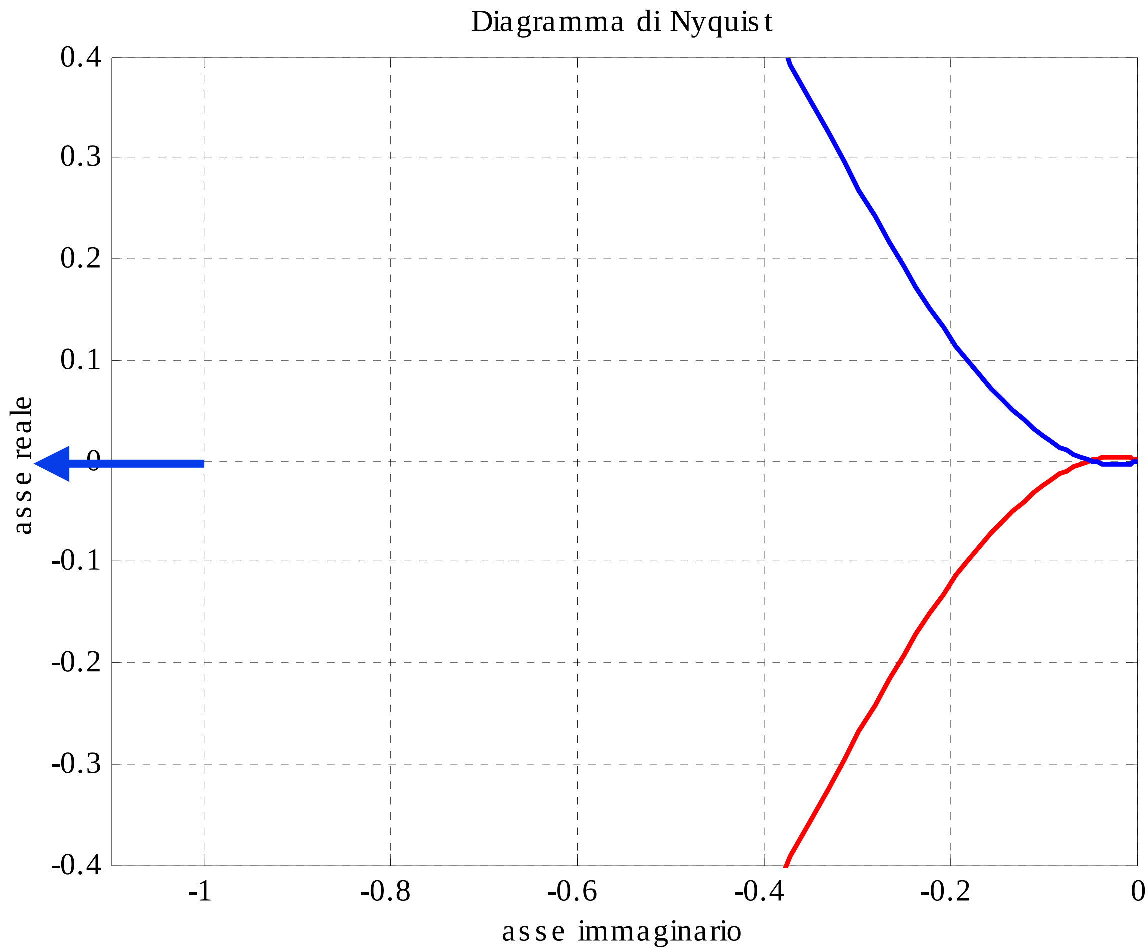


Diagramma di Nichols
Open-Loop Gain (dB)
Open-Loop Phase (deg)
0 dB
0.25 dB
0.5 dB
1 dB
3 dB
6 dB
-1 dB
-3 dB
-6 dB
-12 dB
-20 dB
-40 dB



Poiché il diagramma di Nyquist non interseca la funzione descrittiva della saturazione (-inf, -1), il sistema non si porterà sul ciclo limite.

Moltiplicando il guadagno in catena diretta per 30, il punto a –180° si porterà in –1.5. In quel punto sussistono le condizioni per un innesco di un ciclo limite di pulsazione pari a 14 rad/sec e di ampiezza x tale che F(x)=1/1.5=0.666

Per calcolare la W(z) scriviamo l'ingresso $U(z)$ e l'uscita $Y(z)$:

$$U(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}$$

$$Y(z)=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-\beta},\beta=e^{-2T_c}=0.8187$$

la funzione a ciclo chiuso sarà

$$W(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{(1-\beta)}{(z-\beta)}$$

il guadagno della W(z), calcolato per $z=1$, è già unitario e non deve essere corretto

per cui, visto che G(z) ha poli e zeri dentro il cerchio unitario, il regolatore può essere scritto come

$$R(z)=\frac{1}{G(z)}\frac{W(z)}{1-W(z)}=\frac{2z-1}{3z+1}\frac{1-\beta}{z-1}$$

Per calcolare il segnale y utilizziamo la $W(z)$:

$$\frac{\mathrm{Y(z)}}{\mathrm{U(z)}}=W(z)=\frac{(1-\beta)}{(z-\beta)}=\frac{0.1813}{z-0.8187}$$

$$Y(z)z-Y(z)0.8187=U(z)0.1813$$

da cui l'equazione alle differenze:

$$y_k=0.8187y_{k-1}+0.1813u_{k-1}$$

con $u_k=\{0,0.5,1,0,0,...\}$ otteniamo la sequenza

$$y_k=\{0,0,0.0906,0.2554,0.2091,0.1712,0.1401,0.1147,...\}$$

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 6 & 2\end{bmatrix};=b=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix};C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\dot{x}=Ax+bu$$

$$u=F(x-x_{ref})$$

$$e=(x-x_{ref})$$

$$x=e+x_{ref}$$

$$\dot{x}=Ax+bFe$$

$$\dot{e}=A(e+x_{ref})+bFe$$

$$\dot{e}=(A+bF)e+Ax_{ref}$$

all'equilibrio:

$$(A+bF)e+Ax_{ref}\ =0$$

che fornisce errore nullo se

$$\mathrm{Ax}_{\mathrm{ref}}\ =0$$

in questo caso abbiamo

$$\begin{bmatrix}3 & 1\\ 6 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

Per cui la condizione è soddisfatta.

Per determinare la matrice di controreazione dallo stato che sposta gli altri autovalori in, per esempio, (-2,-2) scriviamo il polinomio caratteristico desiderato:

$$\mathrm{P}^*(\lambda)=(\lambda+2)^2\ =\lambda^2+4\lambda+4$$

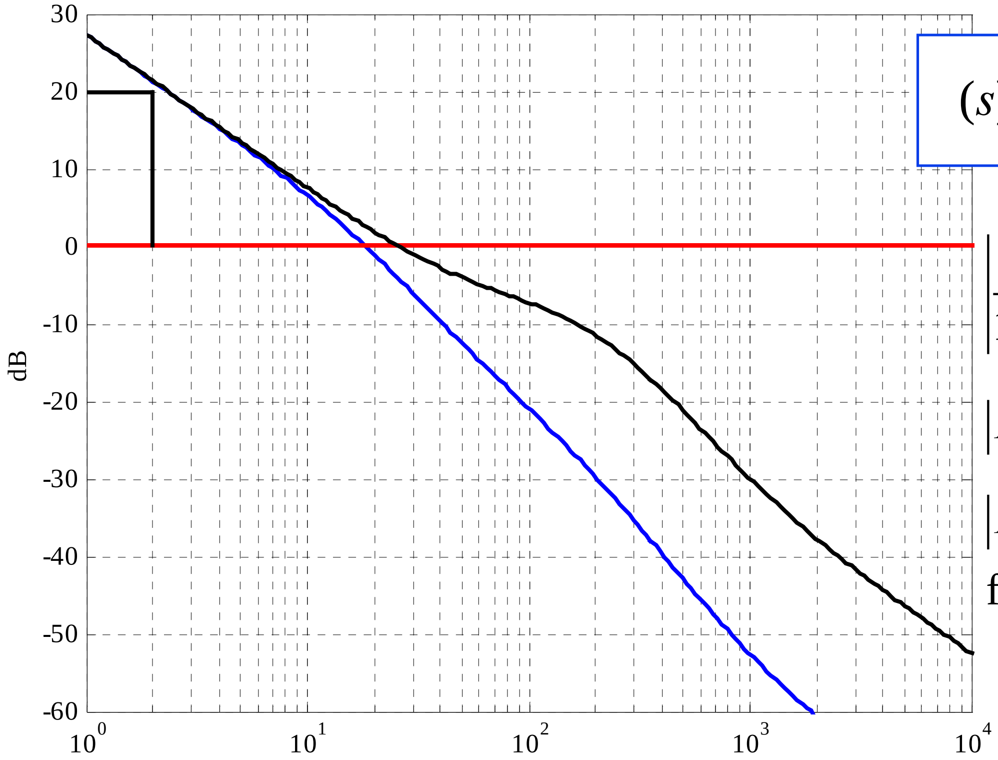
e calcoliamo il vettore γ

$$\mathrm{R}=\begin{bmatrix}b & Ab\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{bmatrix};\mathrm{R}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

$$\gamma=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

$$F=-\gamma\mathrm{P}^*(A)=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}31 & 9\\ 54 & 22\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{85}{6} & -\frac{31}{6}\end{bmatrix}$$

Modulo



Omega di taglio= 26.7384

$$(s) = \frac{7}{s}\,\frac{0.05s+1}{0.05/14s+1}$$

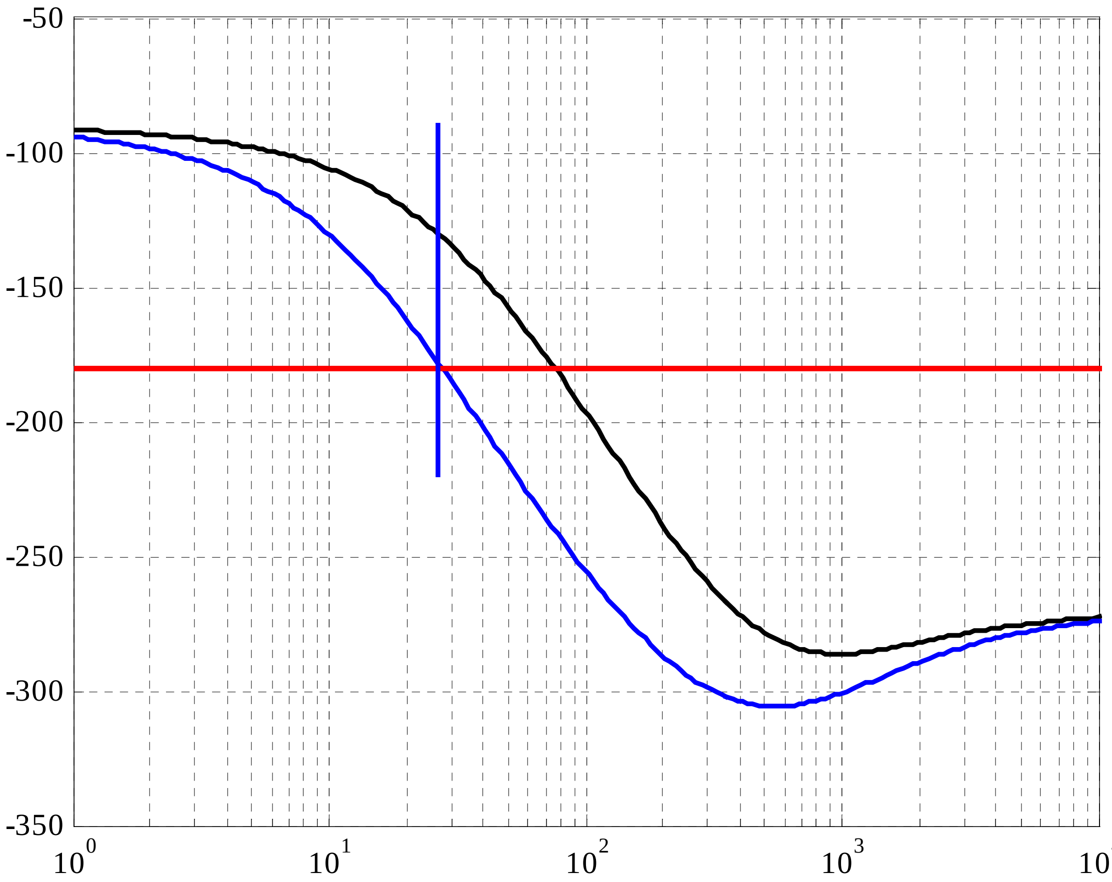
$$\left|\frac{K}{1+F(j\omega)}\right| < e$$

$$|F(j\omega)| > \frac{K}{e} = \frac{3}{0.3}$$

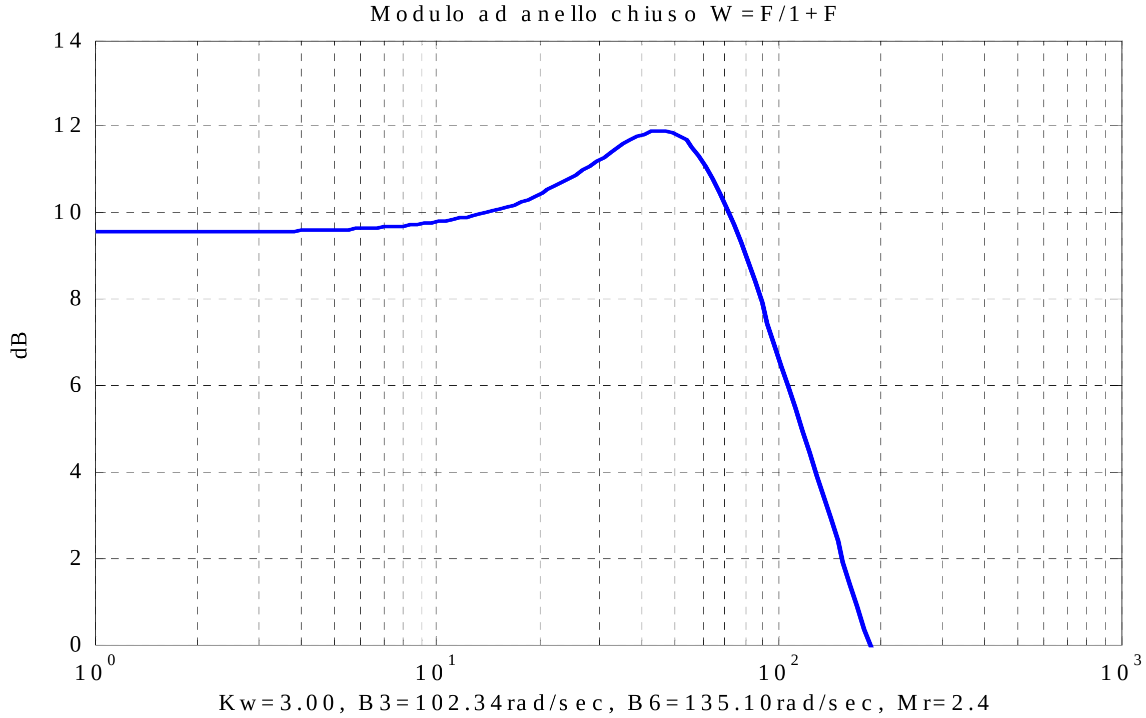
$$|F(j\omega)| > 10 = 20dB$$

fino a $\omega < 2$ rad/sec

Fase



margine di fase= 49.5


Modulo ad anello chiuso W=F/1+F
dB
Kw=3.00, B3=102.34rad/sec, B6=135.10rad/sec, Mr=2.4

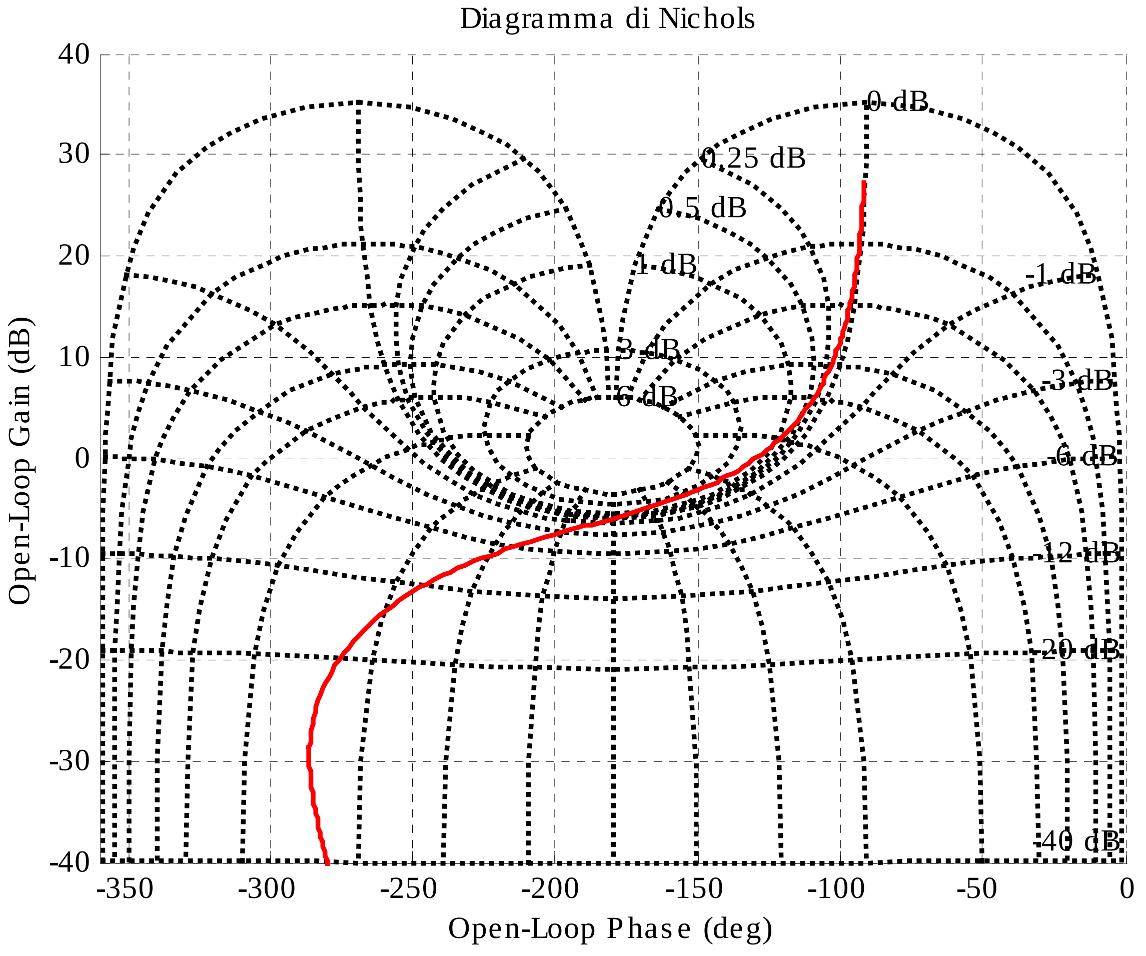
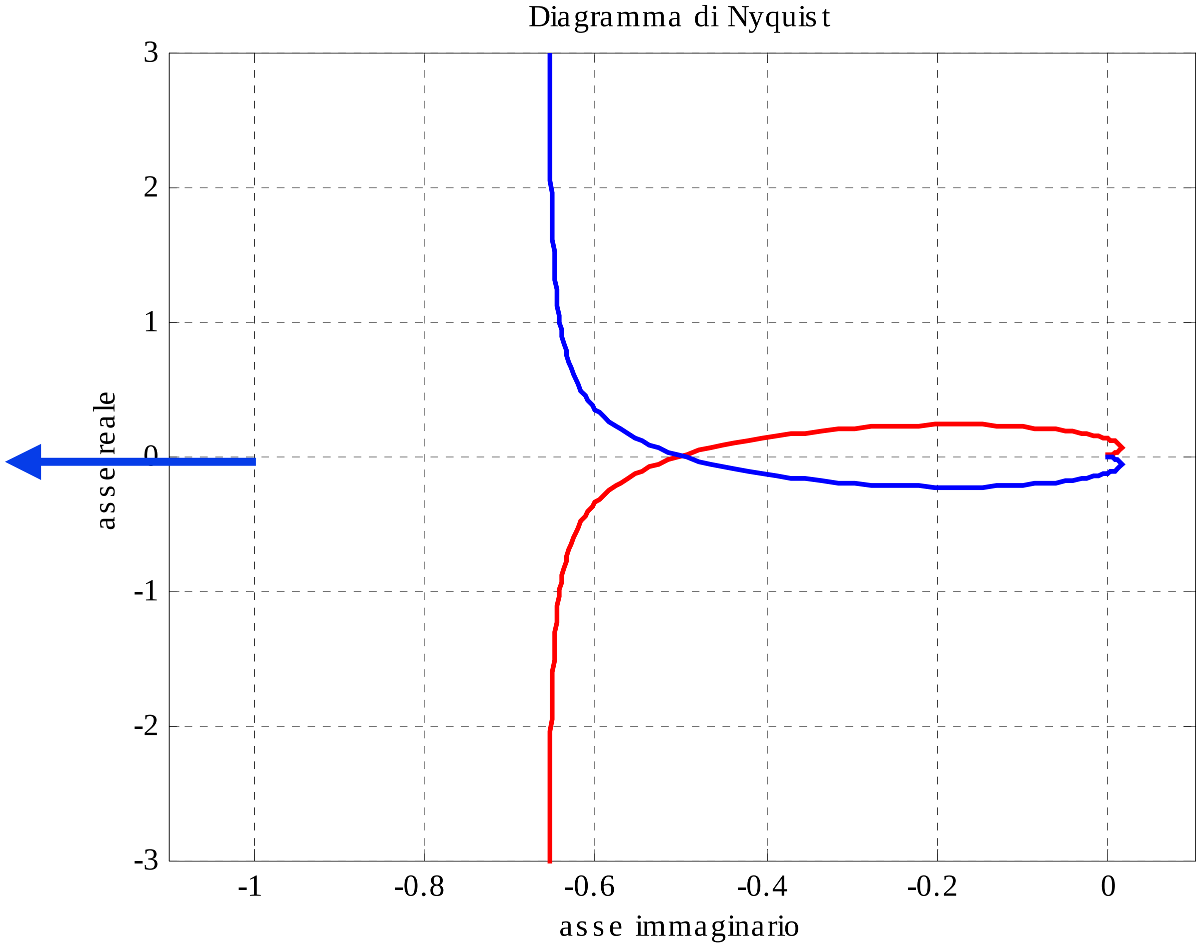


Diagramma di Nichols
Open-Loop Gain (dB)
Open-Loop Phase (deg)
0 dB
0.25 dB
0.5 dB
1 dB
3 dB
6 dB
-1 dB
-3 dB
-6 dB
-12 dB
-20 dB
-40 dB



Poiché il diagramma di Nyquist non interseca la funzione descrittiva della saturazione (-inf, -1), il sistema non si porterà sul ciclo limite.

Moltiplicando il guadagno in catena diretta per 10, il punto a –180° si porterà in –5. In quel punto sussistono le condizioni per un innesco di un ciclo limite di pulsazione pari a 80 rad/sec e di ampiezza x tale che F(x)=1/5=0.2

per calcolare la W(z) scriviamo l'ingresso $U(z)$e l'uscita $Y(z)$

$$U(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3}$$

la funzione a ciclo chiuso sarà

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^4 - 1}{z^4}$$

adesso, visto che G(z) ha poli e zeri dentro il cerchio unitario, il regolatore può essere scritto come

$$R(z) = \frac{1}{(z)} \frac{W(z)}{1 - W(z)} = \frac{(z^4 - 1)(2z^2 - 1)}{3z + 1}$$

Questo regolatore, tuttavia, non è causale. D'altro canto la G(z) aveva un grado relativo (ritardo) pari ad 1 mentre il tipo di risposta richiesto è senza ritardo, da cui l'impossibilità di ottenere un regolatore!

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; = b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

per la controllabilità:

$$\text{R}=\begin{bmatrix} 0 & \text{-8} \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \text{rango}(\quad) = 2$$

per l'osservabilità:

$$\text{O}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \text{-2} & \text{-2} \end{bmatrix}, \text{rango}(O) = 1$$

quindi c'è un autovalore osservabile ed uno non osservabile. Nel calcolo dell'evoluzione libera possiamo, pertanto, limitarci a considerare il sottospazio osservabile. Operiamo la trasformazione di Kalman $x = T\quad$ con:

$$\text{T}^{\text{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}=\text{T}^{\text{-1}}\quad T = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \text{T}^{\text{-1}} B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

poichè $\quad = T^{-1}\quad$, varrà:

$$_0 = T^{-1}\ _0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _{0,1} \\ z_{0,2} \end{bmatrix}$$

l'equazione del sottospazio osservabile è:

$\dot{z}_1 = -2z_1 + 2u$

$y = z_1$

la cui soluzione è data da

$z_1(t) = e^{-2t} z_{1,0}$

$y(t) = z_1(t) = e^{-2t} z_{1,0} = 2e^{-2t}$

e quindi in $\quad = 2$

$\quad(2) = 2e^{-4} = 0.0366$

Il problema può essere risolto anche nei due seguenti modi:

1) Diagonalizzando la matrice A calcolando autovalori ed autovettori

2) Valutando la seguente antritrasformata di Laplace:

$$\text{L}^{\text{-1}} \left\{ C(sI - A)^{-1} \right\}\Big|_{t=2} x_0$$