F d'A

Esame di Fondamenti di Automatica

Corsi di Laurea in Elettronica, Meccanica ed Informatica

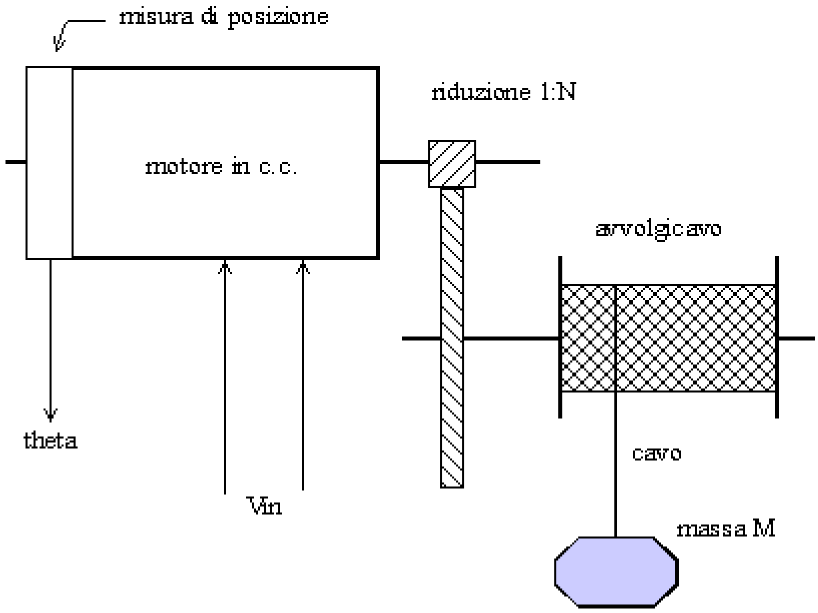
7 novembre 2000

1) Si deve controllare la quota **h** della massa **M** col sistema raffigurato. Si determinino:

a) la funzione di trasferimento tra **Vin** e **theta** e quella tra **theta** e quota della massa **M**

b) la velocità di caduta a regime della massa quando **Vin=0** (alimentazione in corto)

La massa è soggetta alla gravità e si possono trascurate gli attriti e le inerzie delle ruote dentate.



2a) Sia dato un processo **P(s)** descrivibile mediante la funzione di trasferimento:

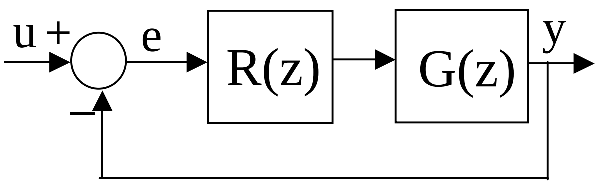
$$P(s) = \frac{200(s+50)}{(s+10)(s+200)} e^{-0.02s}$$

Sintetizzare un sistema di controllo a controreazione tale che il guadagno a ciclo chiuso sia pari a **4** e l'errore a regime per ingresso a rampa **u(t)=2.1t** sia minore di **0.224**. Inoltre, l'omega di attraversamento ed il margine di fase della funzione a ciclo aperto soddisfino le: ω_t>20 rad/sec ed mϕ tale da avere un modulo alla risonanza minore di 2dB.

2b) Per un ingresso del tipo **sin(ωt)**, fino a quale pulsazione l'errore di riproduzione risulterà inferiore a **0.1**? Determinare, infine, utilizzando la carta di Nichols, la banda passante (in Hz) e l'effettivo modulo alla risonanza della funzione a ciclo chiuso.

2c) Tracciare il diagramma di Nyquist della funzione compensata.

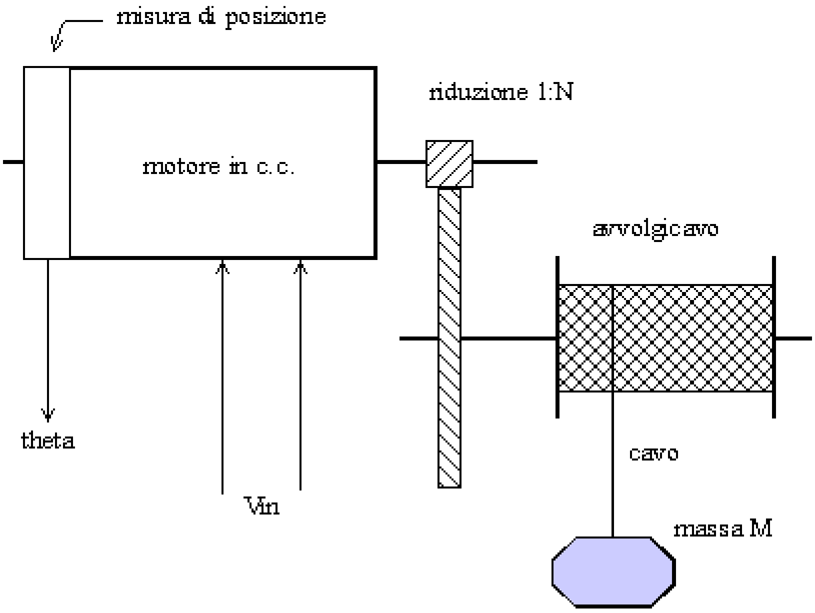
3) Dato il sistema discreto in figura con **G(z)** ottenuta dalla discretizzazione con le differenze all'indietro di **G(s)=1/(s+10)** e **Tc=0.2**sec, determinare il controllore **R(z)** che assicuri una funzione di trasferimento a ciclo chiuso **W(z)** tale che in risposta ad un gradino unitario produca la sequenza **{y$_k$}={0, 1/2, 1, 1, ...}**. Quindi, supponendo di applicare un segnale a rampa all'ingresso **u** a quale valore tende l'errore **e**?

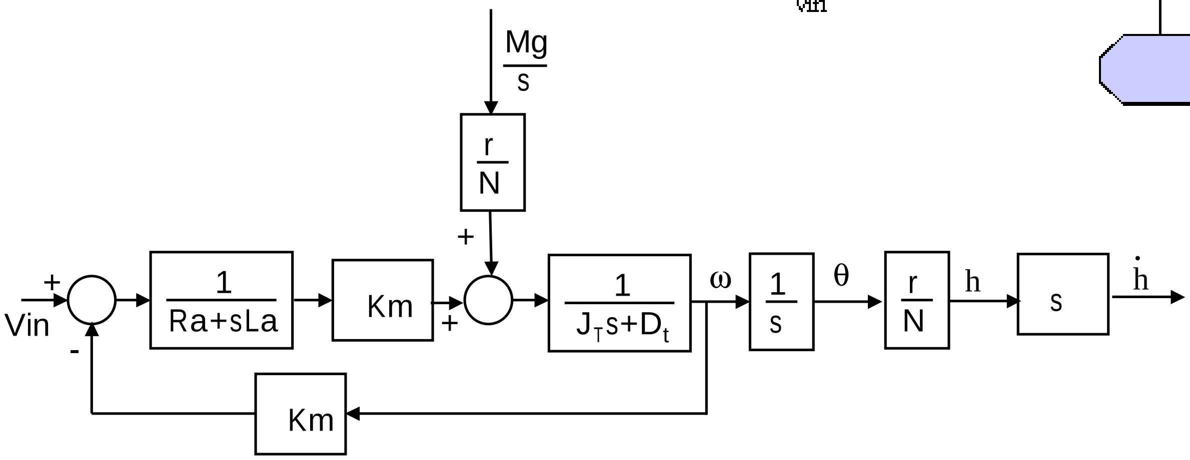


4) Calcolare uscita y(t) con t=2 sec, u(t)=0 ed x_0=(1, -1) del seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 + 2u \\ y = x_1 - x_2 \end{cases}$$

Nome ……….......…… Cognome ……..……....… Matricola …..………..…......... Ele☐ Mec☐Inf☐





L'inerzia totale J_t vista dal motore vale:

$$J_t = J_{motore} + M\, r^2/N^2$$

Mentre l'attrito complessivo Dt è dato da

$$D_t = D_{motore} + D_{carico}/N^2$$

La funzione di trasferimento tra V_{in} e θ si calcola mettendo a zero il contributo della forza peso:

$$\theta/Vin = K_m / \{[\,(R_a+sL_a)\,(J_t s+D_t) + K_m^2\,]\, s\}$$

La funzione di trasferimento tra q e la quota della massa M è semplicemente

$$r/N$$

Per calcolare la velocità di caduta a regime dobbiamo calcolare la funzione di trasferimento tra la forza peso P(s)=Mg/s e dh/dt con V_{in}=0:

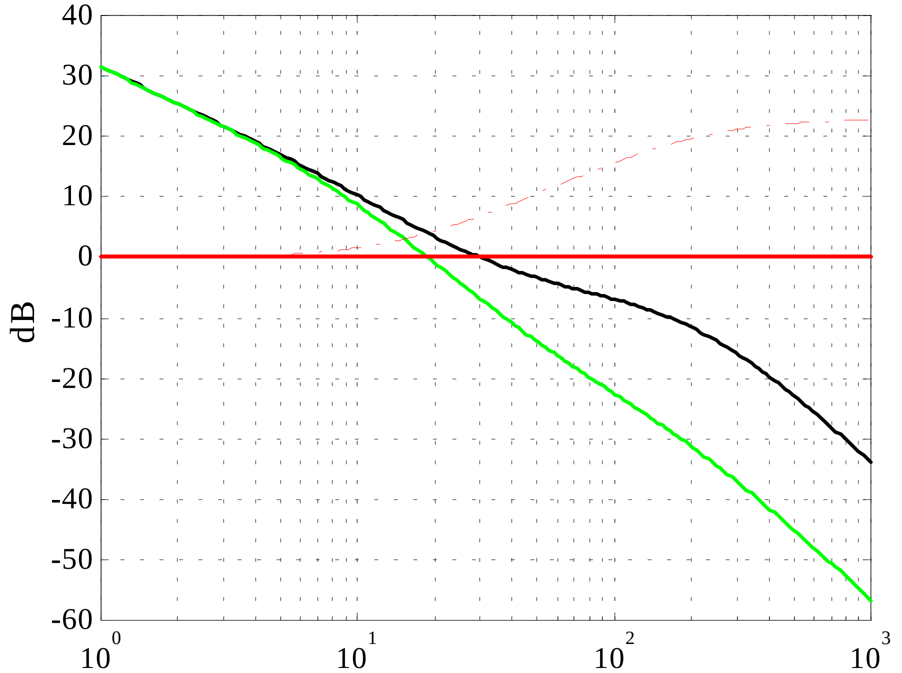
$$sH(s)/P(S)= (R_a+sL_a)\ \ / \ [(R_a+sL_a)\,(J_t s+D_t) + K_m^2\,]$$

A questo punto basta sostituire P(s) ed applicare il teorema del valore finale

$$sH(s)= (R_a+sL_a)\ \ / \ [(R_a+sL_a)\,(J_t s+D_t) + K_m^2\,]\ Mg/s$$

$$dh/dt(\infty)=\lim_{s\to 0} s\ (R_a+sL_a)\ \ / \ [(R_a+sL_a)\,(J_t s+D_t) + K_m^2\,]\ Mg/s= R_a\ Mg / (R_a\ J_t + K_m^2)$$

Moduli di Processo modificato, Rete e Catena diretta



Omega di taglio del processo modificato= 31.0787

$$C(s) = \frac{30}{s}\frac{0.066s+1}{(0.066/14)s+1}$$

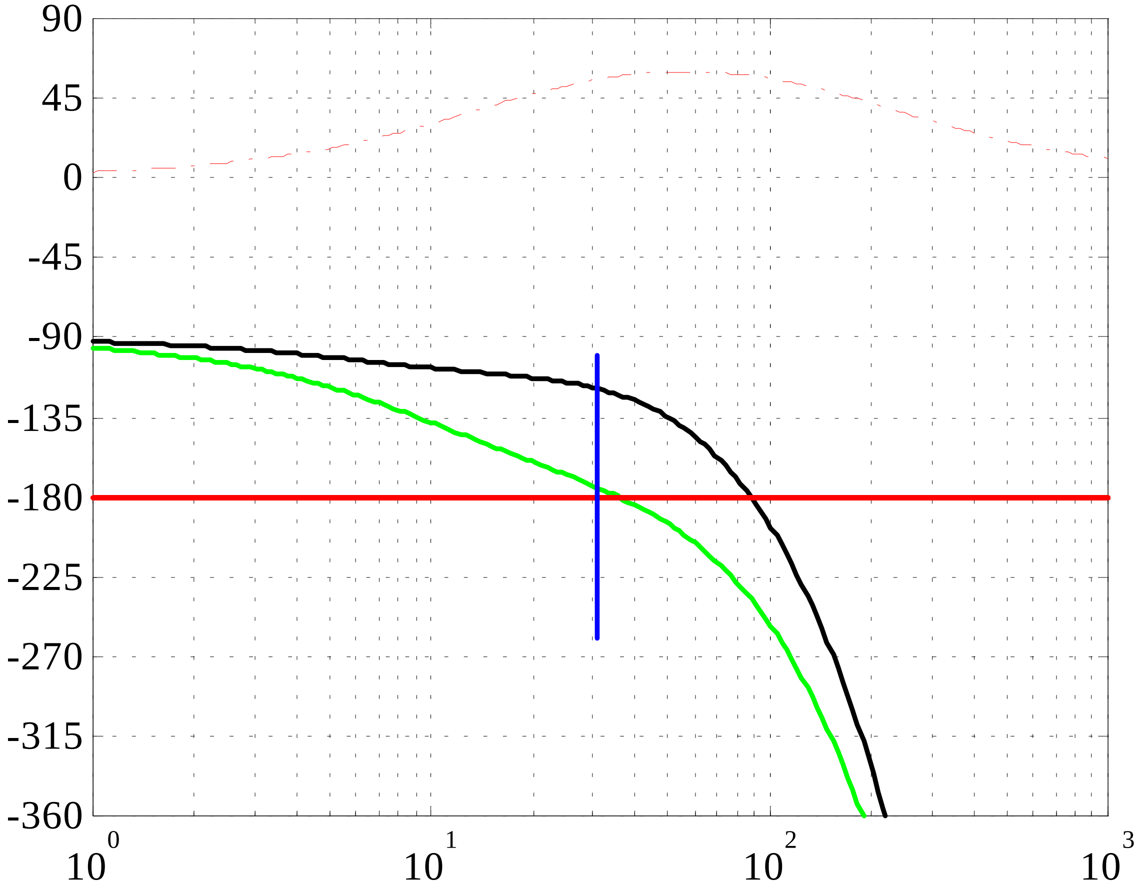
$$\left|\frac{K_d}{1+F(j\omega)}\right| a < e$$

$$|F(j\omega)| > \frac{K_d a}{e} = \frac{4*1}{0.1}$$

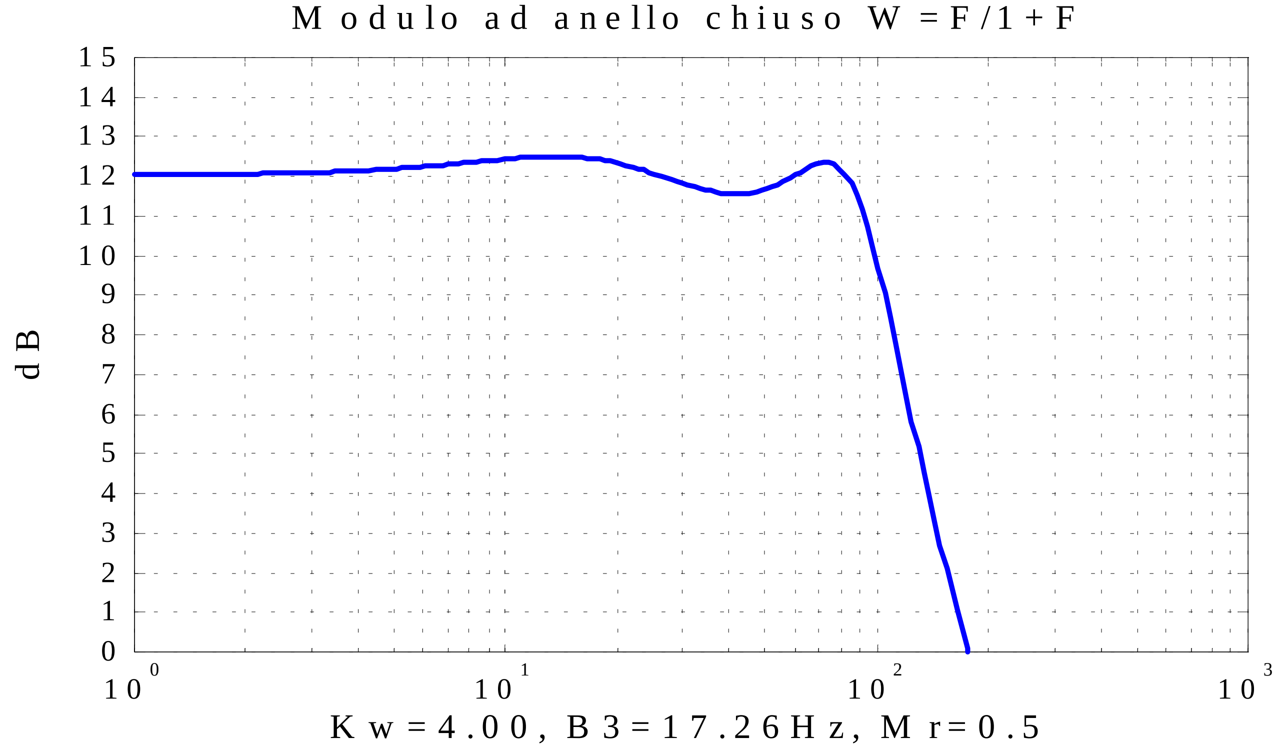
$$|F(j\omega)| > 40 = 32dB$$

$$\omega < 1 \text{ rad/sec}$$

Fasi di Processo modificato, Rete e Catena diretta



margine di fase processo modificato= 60.9


Modulo ad anello chiuso W=F/1+F
dB
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
10^0
10^1
10^2
10^3
Kw=4.00, B3=17.26Hz, Mr=0.5

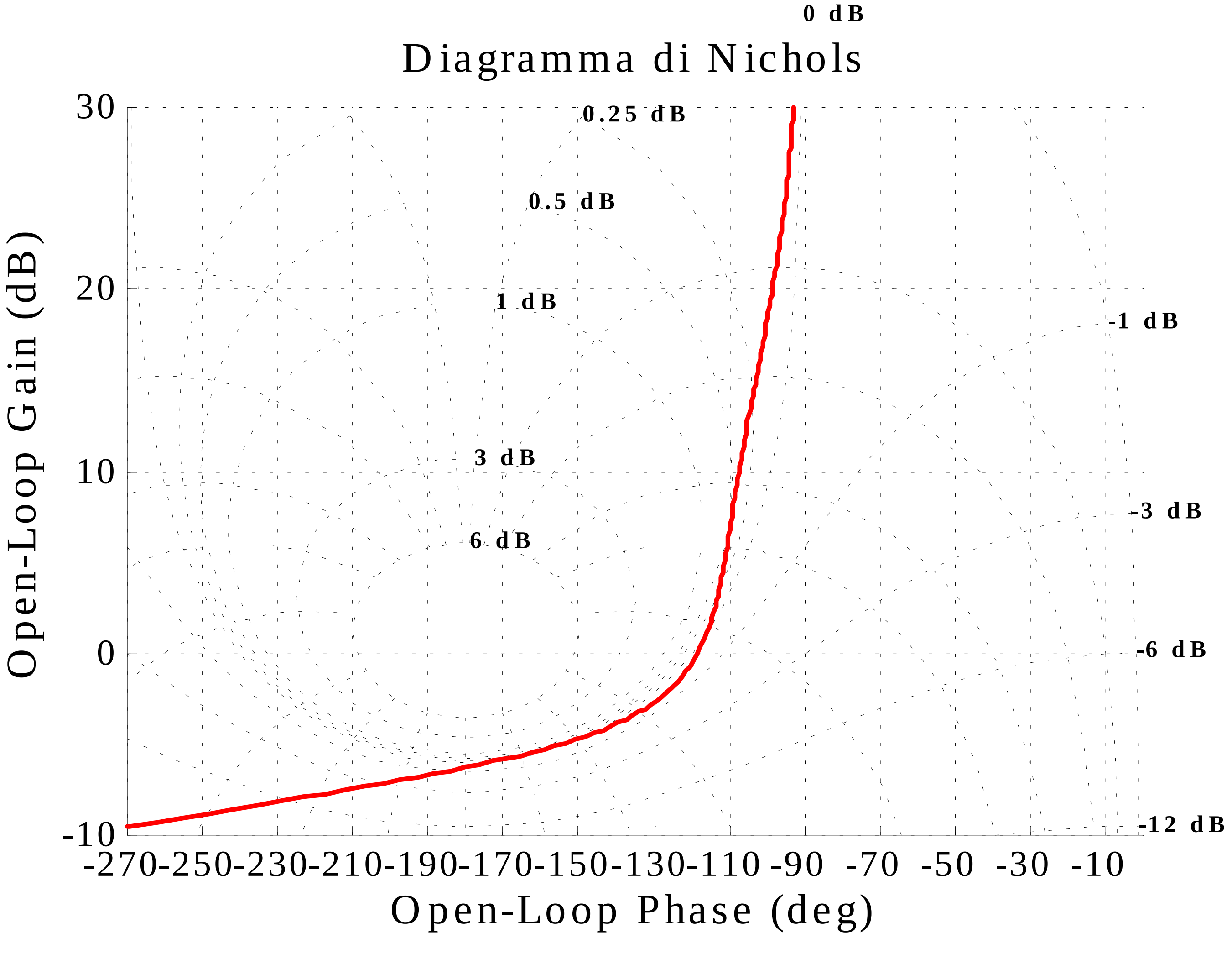
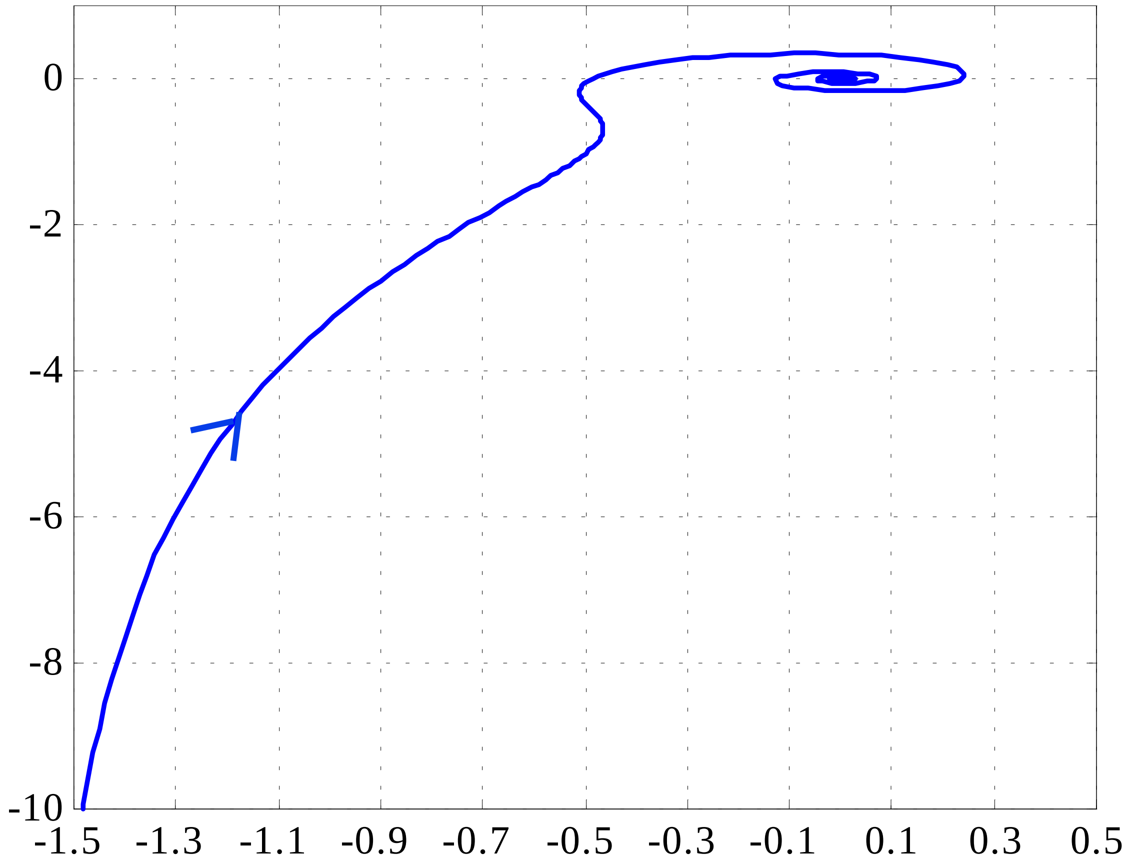

0 dB
Diagramma di Nichols
0.25 dB
0.5 dB
1 dB
-1 dB
3 dB
6 dB
-3 dB
-6 dB
-12 dB
-20 dB
Open-Loop Gain (dB)
30
20
10
0
-10
-270 -250 -230 -210 -190 -170 -150 -130 -110 -90 -70 -50 -30 -10
Open-Loop Phase (deg)

Diagramma di Nyquist



Per cominciare discretizziamo la G(s) con il metodo indicato:

$G(s)=1/(s+10)$, $Tc=0.2$, $s=(1-z^{-1})/Tc$

Per cui: $G(z)=1/(15 - 5 z^{-1})$

Per calcolare il regolatore in grado di assegnare il comportamento richiesto bisogna adesso determinare quale sia la funzione di trasferimento a ciclo chiuso W(z) in risposta ad un gradino unitario fornisce la sequenza indicata. La y(z) che si ottiene dalla trasformata Z della sequenza si può calcolare sommando un contributo di ampiezza 1/2 all'instate k=1 alla trasformata del gradino traslato di due campioni:

$Y(z)=1/2\ z^{-1} +z/(z-1)\ z^{-2}$

La trasformata dell'ingresso vale

$U(z)=z/(z-1)$

Per cui la W(Z) rimane definita come

$W(z)=Y(z)/U(z)=1/2(z+1)/z^2$

A questo punto, dovendo essere

$W(z)=R(z)G(z)/(1+R(z)G(z))$

Si otiene

$R(z)=1/G(z)\ W(z)/(1-W(z))=5\ (3z-1)(z+1) / [z\ (2z^2-z-1)]$

La G(z) di partenza non conteneva poli o zeri al di fuori del cerchio unitario quindi la cancellazione è consentita..

Per calcolare l'andamento dell'errore si deve calcolare la funzione di trasferimento tra **u** ed **e**:

$We(z)=E(z)/U(z)=1/(1+R(z)G(z))= 0.5\ (2z^2-z-1) / z^2$

da cui si ricava l'espressione di E(z) imponendo per U(z) la rampa unitaria:

$E(z) = We(z)\ 0.2\ z/(z-1)^2 = 0.1\ (2z^2-z-1) / [z(z-1)^2]$

E, applicando il teorema del valore finale per la trasformata Z:

$e(inf)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})E(z)=0.3$

La soluzione generica di un sistema di equazioni lineari e stazionarie è:

$$y(t) = C\, e^{At}x_0 + C\, \text{integrale}_0^t\{e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\}$$

Nel nostro caso **u(t)=0** e **t=2** sec, per cui si tratterà di valutare $\mathbf{e^{2A}}$.

Un metodo è quello di diagonalizzare, se possibile, la matrice A.

Per diagonalizzarla calcoliamo gli autovalori risolvendo l'equazione

$$\det(A-\lambda I)=0$$

Da questa otteniamo $\boldsymbol{\lambda_1=-1}$ e $\boldsymbol{\lambda_2=-2}$.

Poichè sono differenti sarà sicuramente possibile diagonalizzare la matrice A.

Calcoliamo il primo autovettore risolvendo il sistema:

$$(A-\lambda_1 I)v_1=0$$

da cui $\mathbf{v_1=(-2,\ 3)}$.

Calcoliamo il secondo autovettore risolvendo

$$(A-\lambda_2 I)v_2=0$$

da cui $\mathbf{v_2=(1,\ -1)}$.

La matrice diagonalizzata sarà data da $\boldsymbol{\Lambda=T^{-1}\, A\, T}$ che, senza alcun calcolo, si scriverà

$$\boldsymbol{\Lambda=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}}$$

A questo punto per calcolare $\mathbf{e^{2A}}$ si potrà applicare il noto risultato che ci fornisce

$$e^{At}=T\, e^{\Lambda t}\, T^{-1}$$

e quindi

$$\mathbf{e^{2A}=\begin{bmatrix}-0.2157 & -0.2340\\ 0.3511 & 0.3694\end{bmatrix}}$$

L'uscita, infine, sarà:

$$y(2)=C\, e^{2A}x_0= 0.0366$$