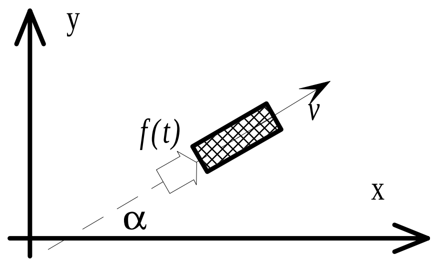
Esame di Fondamenti di Automatica
Corsi di Laurea in Elettronica e in Meccanica
26 giugno 2000

1) Un carrello che si muove nel piano può essere spesso modellato come un uniciclo, un “veicolo” con il solo vincolo di traslare lungo la tangente al proprio asse. Le equazioni semplificate sono allora:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \sin\alpha \\ \dot{y} = v \cos\alpha \\ M\dot{v} = f(t) - Dv \\ \dot{\alpha} = \omega(t) \end{cases}$$



e la figura illustra le principali variabili: *x* e *y* sono le proiezioni del centro sugli assi, *v* è la velocità, controllata tramite l’ingresso *f(t),* α è l’angolo, controllato tramite $\omega(t)$ che si assume essere un altro ingresso che può essere imposto tramite un attuatore istantaneo. Le equazioni mostrano diverse non linearità: derivare le equazioni linearizzate intorno a $\alpha=\alpha_0$, $v=v_0$, considerando gli ingressi predetti e le uscite *x* e *y*.

2a) Sia dato un processo **P(s)** descrivibile mediante la funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{400(50-s)}{(s+20)(s+200)}$$

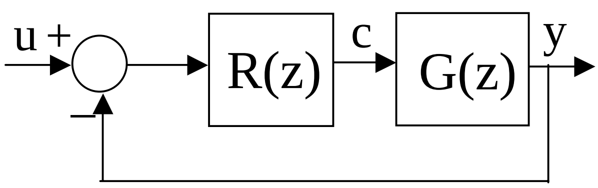
Sintetizzare un sistema di controllo a controreazione tale che il guadagno a ciclo chiuso sia pari a **1** e l'errore a regime per ingresso a rampa **u(t)=4t** sia minore di **0.16**. Inoltre, l'omega di attraversamento ed il margine di fase della funzione a ciclo aperto soddisfino le: $\omega_t \geq 20$ rad/sec e $m\phi \geq 40°$.

2b) Per un ingresso del tipo **sin(ωt)**, fino a quale pulsazione l'errore di riproduzione risulterà inferiore a **0.01**? Determinare, infine, utilizzando la carta di Nichols, la banda passante (in Hz) ed il modulo alla risonanza della funzione a ciclo chiuso.

2c) Tracciare il diagramma di Nyquist della funzione compensata e si supponga di inserire una saturazione unitaria. Si innesca un ciclo limite? E aumentando il guadagno in catena diretta? Se si, qual è il guadagno minimo da inserire e a quale pulsazione si avrà l’oscillazione?

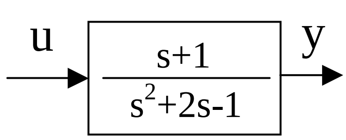
---

3) Dato il sistema discreto in figura con **G(z) =1/(1-z^{-1}/2)** e **Tc=0.1**sec, determinare il controllore **R(z)** che assicuri una funzione di trasferimento a ciclo chiuso **W(z)** tale che in risposta ad un gradino unitario produca la sequenza **{y$_k$}={1/2, 1, 1, 1, ...}**. Quindi, supponendo di applicare un segnale a rampa all’ingresso **u** determinare i primi **4** campioni del segnale **c**.



---

4) Determinare una realizzazione nello spazio di stato del sistema in figura e progettare un sistema di controllo con osservatore in grado di assegnare gli autovalori (-2,-2) allo stato del sistema e gli autovalori (-3,-3) allo stato del sistema di errore.



Nome ……………………… Cognome ……..………………… Matricola …..………..…………..

Esame di Fondamenti di Automatica
Corsi di Diploma in Ingegneria Elettronica
26 giugno 2000

1a) Sia dato un processo **P(s)** descrivibile mediante la funzione di trasferimento

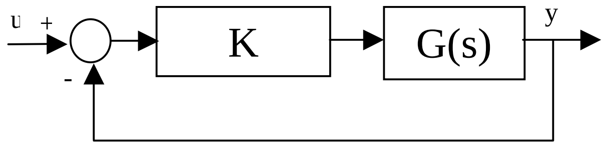
$$P(s) = \frac{400(50-s)}{(s+20)(s+200)}$$

Tracciare i diagrammi di Bode e di Nyquist e determinare i margini di stabilità a ciclo chiuso.

1b) Per un ingresso del tipo **sin(ωt)**, fino a quale pulsazione l'errore di riproduzione risulterà inferiore a **0.01**?

---

2) Dedurre, mediante il **criterio di Routh** ,per quali valori di **K** il sistema a ciclo chiuso raffigurato con **G(s)=1/[s(s+3)(s+2)]** risulta stabile.



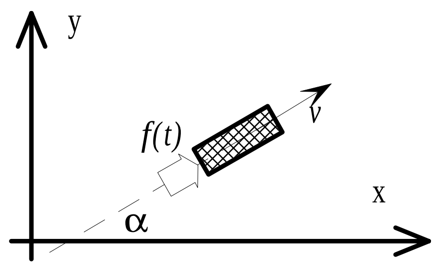
---

3) Dato il sistema **G(s)=1/[(s+3)(s+1)]** ricavare, tramite la Trasformata di Laplace, la risposta **y(t)** ad un ingresso **u(t)** a gradino unitario. Determinarne, quindi, il limite per **t** tendente all'infinito.

---

4) Un carrello che si muove nel piano può essere spesso modellato come un uniciclo, un "veicolo" con il solo vincolo di traslare lungo la tangente al proprio asse. Le equazioni semplificate sono allora:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \sin\alpha \\ \dot{y} = v \cos\alpha \\ M\dot{v} = f(t) - Dv \\ \dot{\alpha} = \omega(t) \end{cases}$$



e la figura illustra le principali variabili: *x* e *y* sono le proiezioni del centro sugli assi, *v* è la velocità, controllata tramite l'ingresso *f(t),* α è l'angolo, controllato tramite ω(t) che si assume essere un altro ingresso che può essere imposto tramite un attuatore istantaneo. Le equazioni mostrano diverse non linearità: derivare le equazioni linearizzate intorno a $\alpha=\alpha_0$, $v=v_0$, considerando gli ingressi predetti e le uscite *x* e *y*.

Nome ……………………… Cognome ……..………………… Matricola …..………..…………..

$$\begin{cases} \dot{x} = v\sin\alpha \\ \dot{y} = v\cos\alpha \\ M\dot{v} = f(t) - Dv \\ \dot{\alpha} = \omega(t) \end{cases}$$

All'equilibrio con v diverso da 0 anche $\dot{x}$ e $\dot{y}$ sono diverse da 0:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = v_0\sin\alpha_0 \\ \dot{y}_0 = v_0\cos\alpha_0 \\ 0 = f_0 - Dv_0 \\ 0 = \omega_0 \end{cases}$$

perciò, i due ingressi varranno:

$f_0 = Dv_0$

$\omega_0 = 0$

e le velocità cartesiane andranno espresse come

$\dot{x} = \dot{x}_0 + \Delta\dot{x}$

$\dot{y} = \dot{y}_0 + \Delta\dot{y}$

La linerizzazione dei due termini con seno e coseno varrà:

$v\sin\alpha = v_0\sin\alpha_0 + v_0\cos\alpha_0\Delta\alpha + \sin\alpha_0\Delta v$

$v\cos\alpha = v_0\cos\alpha_0 - v_0\sin\alpha_0\Delta\alpha + \cos\alpha_0\Delta v$

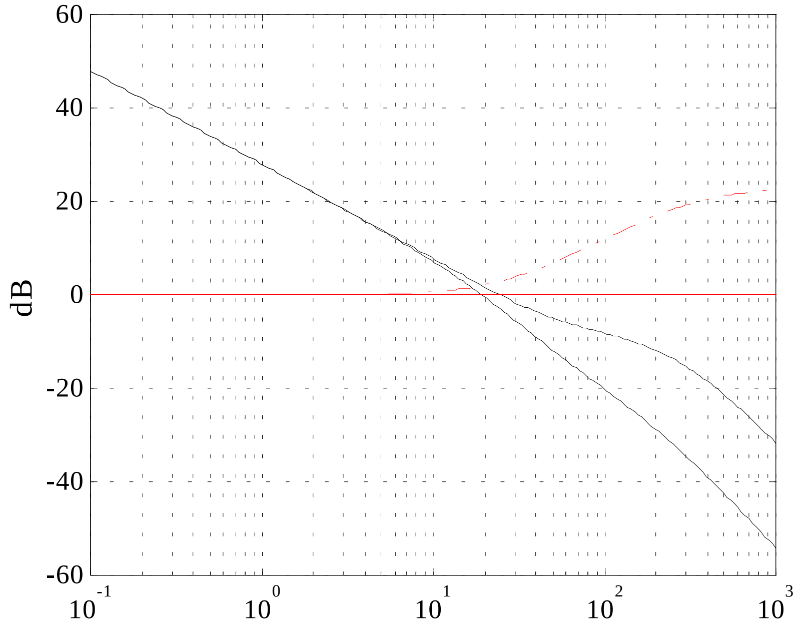
Quindi le equazioni linearizzate saranno:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 + \Delta\dot{x} = v_0\sin\alpha_0 + v_0\cos\alpha_0\Delta\alpha + \sin\alpha_0\Delta v \\ \dot{y}_0 + \Delta\dot{y} = v_0\cos\alpha_0 - v_0\sin\alpha_0\Delta\alpha + \cos\alpha_0\Delta v \\ M\Delta\dot{v} = f_0 + \Delta f - Dv_0 - D\Delta v \\ \Delta\dot{\alpha} = \omega_0 + \Delta\omega \end{cases}$$

e, semplificando:

$$\begin{cases} \Delta\dot{x} = v_0\cos\alpha_0\Delta\alpha + \sin\alpha_0\Delta v \\ \Delta\dot{y} = -v_0\sin\alpha_0\Delta\alpha + \cos\alpha_0\Delta v \\ M\Delta\dot{v} = \Delta f - D\Delta v \\ \Delta\dot{\alpha} = \Delta\omega \end{cases}$$

Moduli di Processo modificato, Rete e Catena diretta



Omega di taglio del processo modificato= 24.6581

$$C(s)=\frac{5}{s}\frac{0.04s+1}{0.04/14s+1}$$

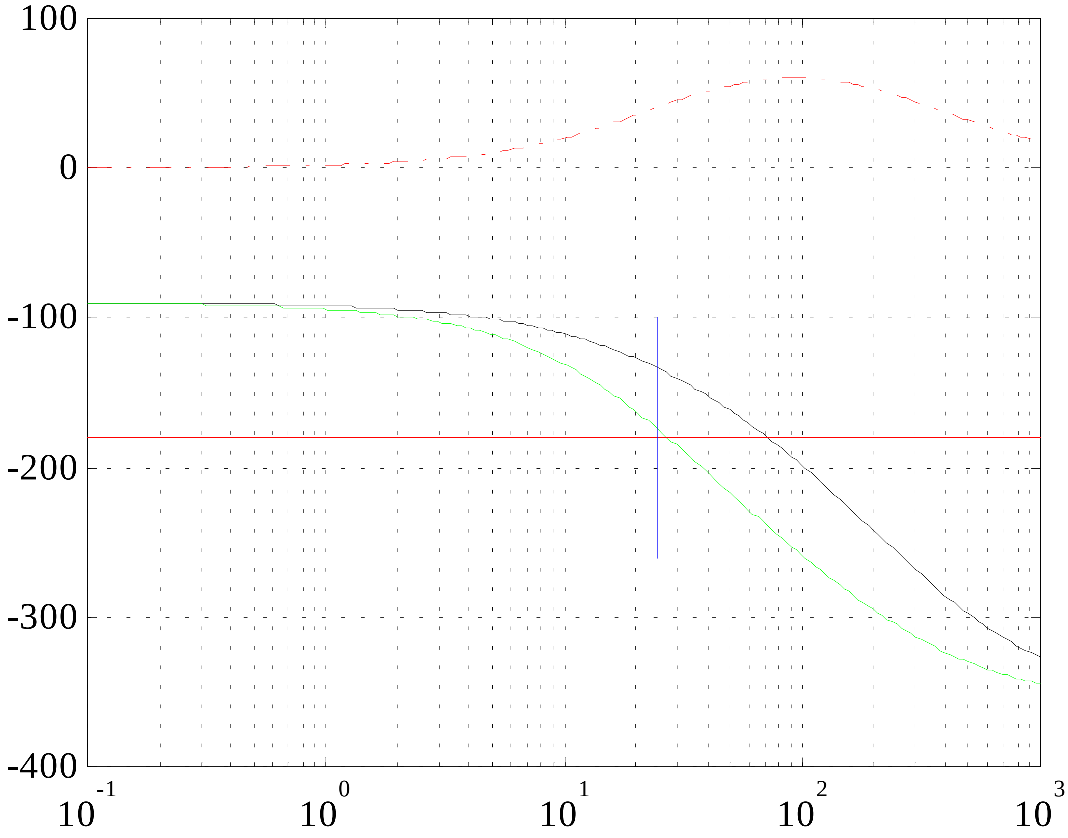
$$\left|\frac{K_d}{1+F(j\omega)}\right|<e$$

$$\left|F(j\omega)\right|>\frac{K_d}{e}$$

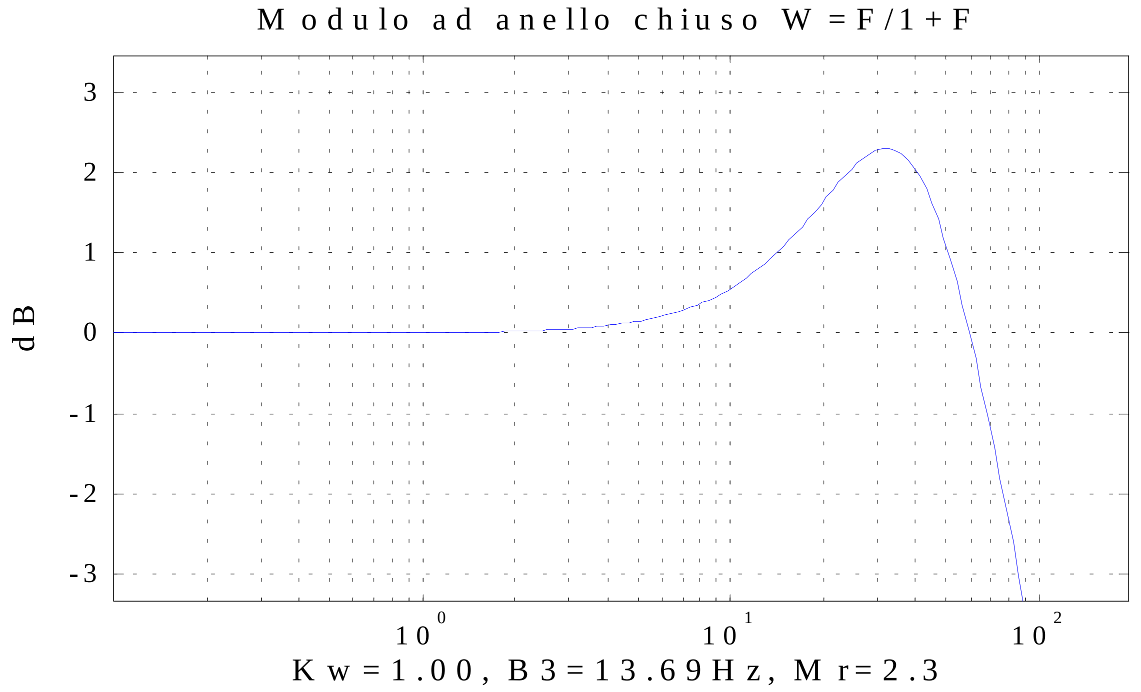
$$\left|F(j\omega)\right|>100=40dB$$

$$\omega<0.25 \text{ rad/sec}$$

Fasi di Processo modificato, Rete e Catena diretta



margine di fase processo modificato= 46.3


Modulo ad anello chiuso W = F/1+F
3
2
1
0
-1
-2
-3
dB
10^0
10^1
10^2
Kw = 1.00, B3 = 13.69Hz, Mr = 2.3

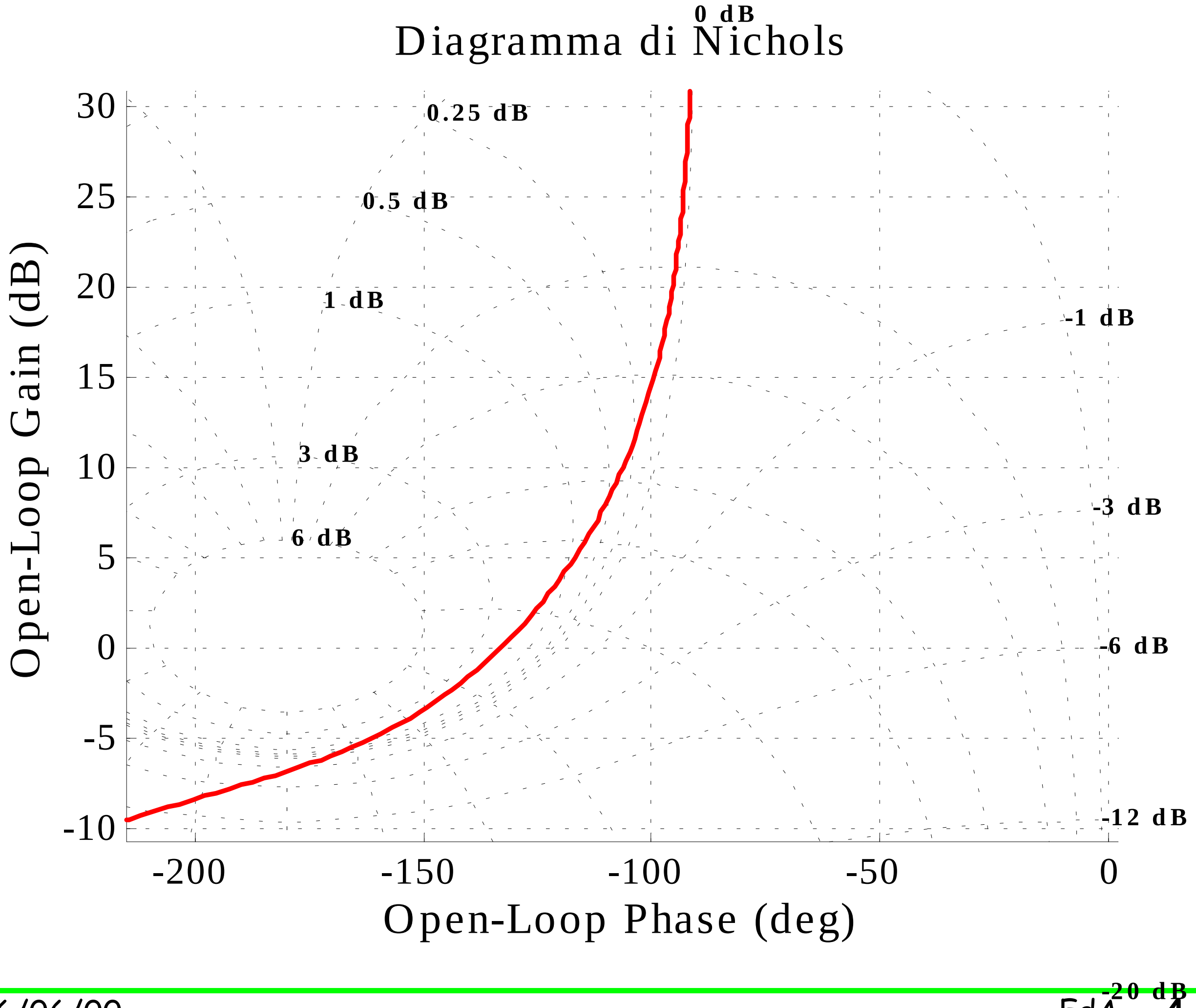
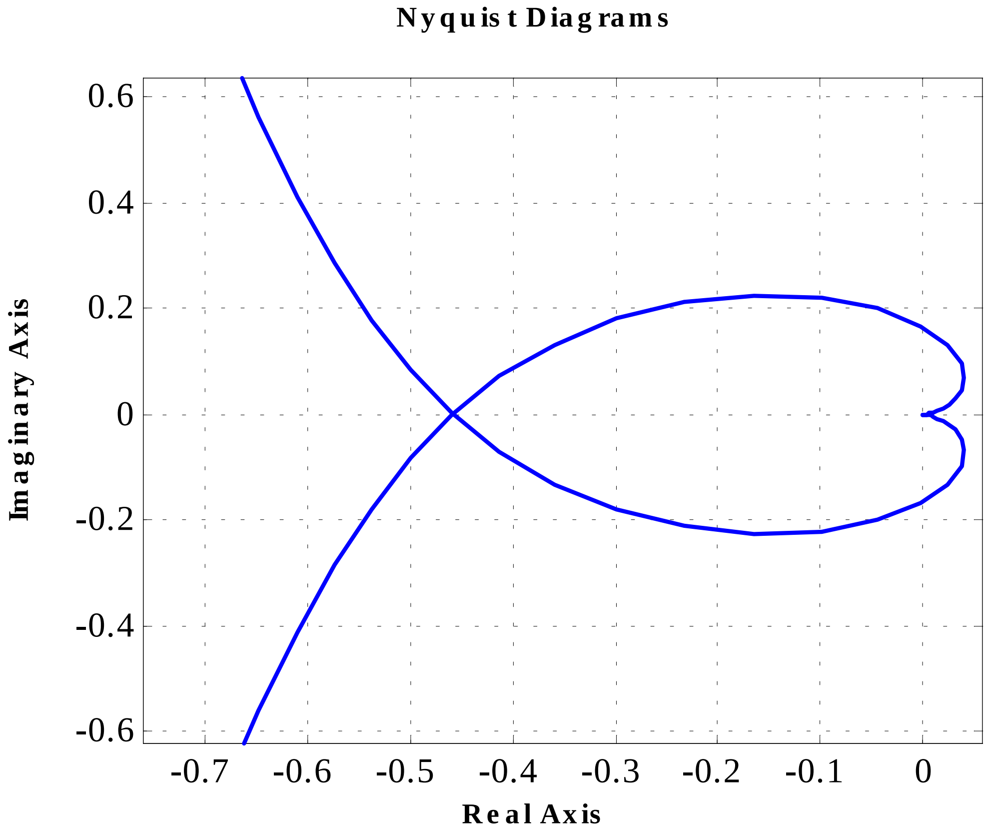


Diagramma di Nichols
0 dB
0.25 dB
0.5 dB
1 dB
3 dB
6 dB
-1 dB
-3 dB
-6 dB
-12 dB
-20 dB
30
25
20
15
10
5
0
-5
-10
Open-Loop Gain (dB)
-200
-150
-100
-50
0
Open-Loop Phase (deg)



Poiché il diagramma di Nyquist non interseca la funzione descrittiva della saturazione (-inf, -1), il sistema non si porterà sul ciclo limite. Tuttavia moltiplicando il guadagno in catena diretta per un valore maggiore di 2.17 il diagramma si porterà sul punto (–1,0) dando origine ad una oscillazione permanente alla pulsazione ω=71rad/sec. L'ampiezza della stessa dipenderà dal guadagno utilizzato.

Per calcolare il regolatore in grado di assegnare il comportamento richiesto bisogna innanzitutto determinare quale sia la funzione di trasferimento a ciclo chiuso W(z) in risposta ad un gradino unitario fornisce la sequenza indicata. La y(z) che si ottiene dalla trasformata Z della sequenza si può calcolare sommando un contributo di ampiezza 1/2 all'instate k=0 alla trasformata del gradino traslato di un campione:

$Y(z)=1/2+z/(z-1)\ z^{-1}$

La trasformata dell'ingresso vale

$U(z)=z/(z-1)$

Per cui la W(Z) rimane definita come

$W(z)=Y(z)/U(z)=1/2(z+1)/z$

A questo punto, dovendo essere

$W(z)=R(z)G(z)/(1+R(z)G(z))$

Si otiene

$R(z)=1/G(z)\ W(z)/(1-W(z))=1/2(2z-1)(z+1)/[z(z-1)]$

La G(z) di partenza non conteneva poli o zeri al di fuori del cerchio unitario quindi la cancellazione è consentita..

Per calcolare alcuni campioni di c si deve calcolare la funzione di trasferimento tra u e c:

$Wc(z)=C(z)/U(z)=R(z)/(1+R(z)G(z))=1/4\ (2z^2+z-1)/z^2$

da cui si ricava l'equazione alle difefrenze:

$C(z)\ 4z^2= U(z)\ (2z^2+z-1) \Rightarrow c_k=1/2u_k+1/4u_{k-1}-1/4u_{k-2}$

e supponendo che la rampa unitaria sia campionata con Tc=0.1 : $\{u_k\}=\{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, ...\}$

si ottiene

$\{c_k\}=\{0, 0.05, 0.125, 0.175, 0.225, ...\}$

La realizzazione più conveniente (tratandosi di un problema di assegnazione degli autovalori) è quella in forma compagna:

$A=\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix}$ $B=\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$ $C=\begin{matrix} 1 & 1 \end{matrix}$ $D=0$

Essendo la rappresentazione ottenuta a partire da una FdT non ci sono problemi di raggiungibilità o di controllabilità e l'osservatore può essere senza dubbio realizzato nella forma canonica:

$dz/dt=Fz+Bu+K_2y$
$u=v+K_1\, z$

con $F=A-K_2\, C$
Per determinare K1 e K2 dobbiamo scrivere i due polinomi caratteristici desiderati:
$P^*(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda+2)= \lambda^2+4\, \lambda+4$
$P_e^*(\lambda)=(\lambda+3)(\lambda+3)= \lambda^2+6\, \lambda+9$

Visto che le matrici A e B sono in forma compagna K_1 si determina immediatamente:
$K_1=[-1-4,\ \ 2-4]=[-5, -2]$
Invece per K2 bisogna calcolare la matrice di Osservabilità e prendere l'ultima colonna dell'inversa:

$O=\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \rightarrow O^{-1} = \begin{matrix} ½ & ½ \\ ½ & -½ \end{matrix}$

A questo punto K_2 si calcola come

```
K2=Pe(A)*|  1/2 |  =  | 10  4 | |1/2 | = | 3 |
         | -1/2 |     |  4  2 | |1/2 |   | 1 |
```