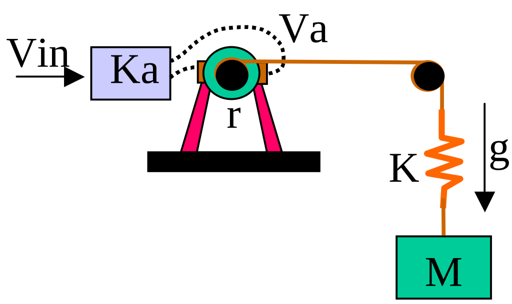
1) Il sistema in figura è composto da un motore in c.c. controllato in tensione (inerzia ***Jm*** ed attrito ***Dm***), un amplificatore di tensione di costante Ka, una molla di costante elastica ***K***, e una massa ***M***. Si ricavi lo schema a blocchi del sistema supponendo che il disturbo dovuto alla forza di gravità sia applicato all'istante zero e che il raggio della puleggia (di massa trascurabile) collegata all'asse del motore sia pari ad ***r***. Si ricavi, infine, il valore di ***Vin*** che mantiene ferma la massa ***M***.



2a) Sia dato un processo **P(s)** descrivibile mediante la funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{250(s+500)}{(s^2+40s+2500)}$$

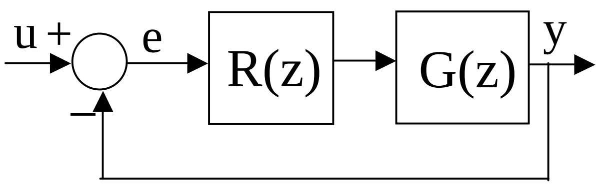
Sintetizzare un sistema di controllo a controreazione tale che il guadagno a ciclo chiuso sia pari a **4** e l'errore a regime per ingresso a rampa **u(t)=1.2t** sia minore di **0.1**. Inoltre, l'omega di attraversamento ed il margine di fase della funzione a ciclo aperto soddisfino le: $10<\omega_t<40$ rad/sec ed mϕ tale da avere un modulo alla risonanza minore di 1.4.

2b) Per un ingresso del tipo **2sin(ωt)**, fino a quale pulsazione l'errore di riproduzione risulterà inferiore a **0.1**? Determinare, infine, utilizzando la carta di Nichols, la banda passante (in Hz) e l'effettivo modulo alla risonanza della funzione a ciclo chiuso.

2c) Tracciare il diagramma di Nyquist della funzione compensata e si supponga di inserire una saturazione unitaria. Si innesca un ciclo limite? E aumentando il guadagno in catena diretta? Se si, qual è il guadagno minimo da inserire e a quale pulsazione si avrà l'oscillazione?

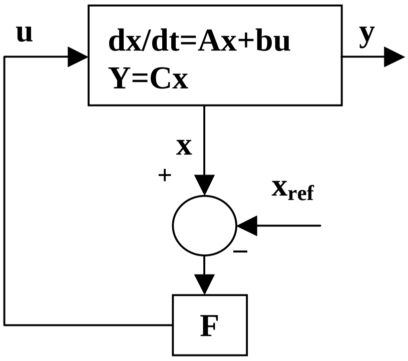
---

3) Dato il sistema discreto in figura con **G(z)** ottenuta dalla discretizzazione esatta di **G(s)=10/(s+10)** e **Tc=0.1**sec, determinare il controllore **R(z)** che assicuri una funzione di trasferimento a ciclo chiuso **W(z)** tale che in risposta ad un gradino unitario produca la sequenza **{y$_k$}={0, 1/2, 1, 1, ...}**. Quindi, supponendo di applicare un segnale a rampa all'ingresso **u** a quale valore tende l'errore **e**?

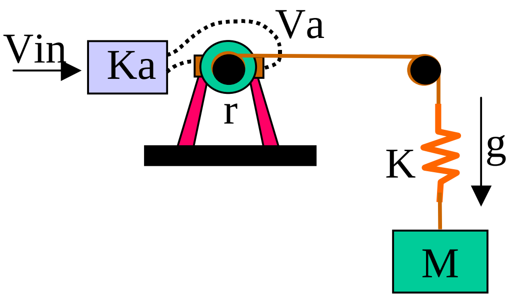


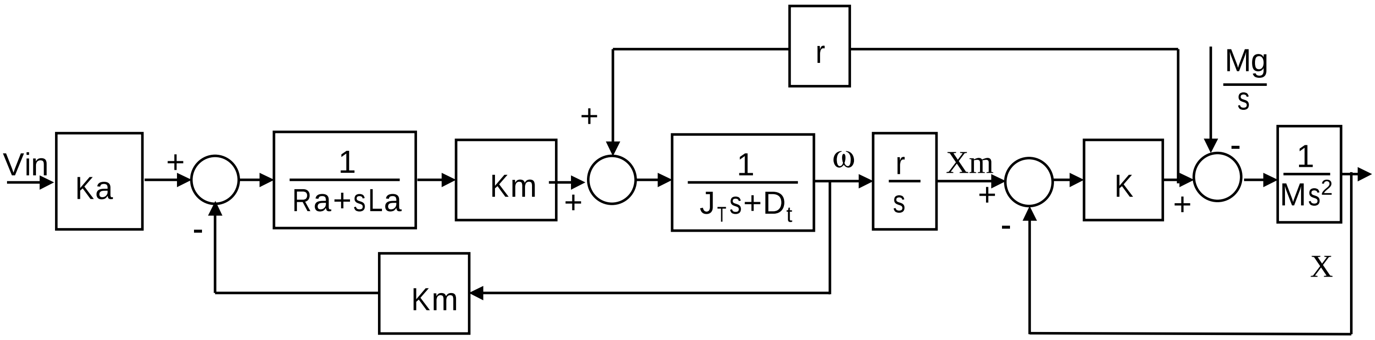
---

4) Dato il sistema di controllo riportato in figura, con $A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$, determinare a quale sottospazio di $\mathfrak{R}^2$ deve appartenere $\mathbf{x_{ref}}$ per avere errore nullo a regime. Supposto che appartenga a detto sottospazio determinare la matrice F in modo da assegnare gli autovalori (-1,-1).



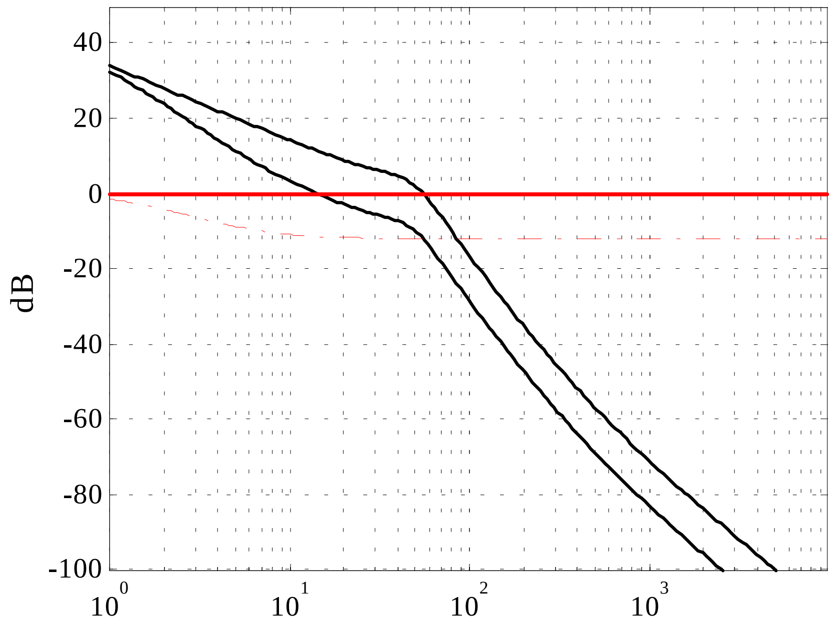
Nome ……………………… Cognome ……..………………… Matricola …..………..……………..





Per calcolare il valore di **Vin** che bilanci esattamente la forza peso si può pensare che per questo particolare valore la velocità di rotazione del motore sia 0 → **ω=0**. Questo implicherà che la **f.c.e.m.** nel primo ramo di controreazione sarà nulla.
Inoltre, a regime, il blocco dovuto al circuito di armatura si semplificherà in **1/Ra.**
Per di più la massa **M** sarà immobile e la coppia resistente che tornerà al motore sarà costituita dalla forza peso **M g** moltiplicata per **r**.
A questo punto la coppia generata dal motore dovrà essere pari alla coppia resistente:
Vin 1/Ra Km = M g r
Da cui
Vin = M g r Ra / Km

Moduli di Processo modificato, Rete e Catena diretta



Omega di taglio del processo modificato= 14.6497

$$C(s)=\frac{4}{s}\frac{0.7s+1}{(0.7/4)s+1}$$

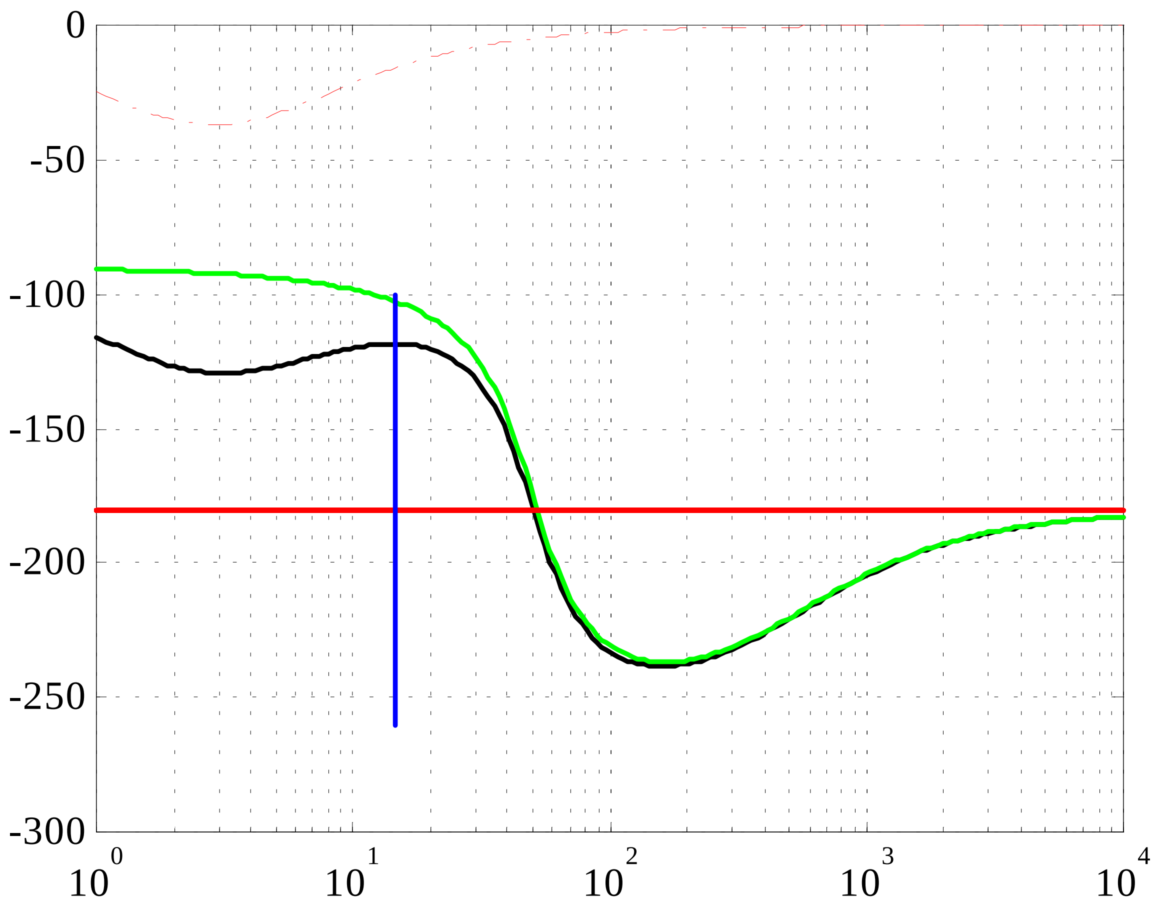
$$\left|\frac{K_d}{1+F(j\omega)}\right|a<e$$

$$|F(j\omega)|>\frac{K_d a}{e}=\frac{4*2}{0.1}$$

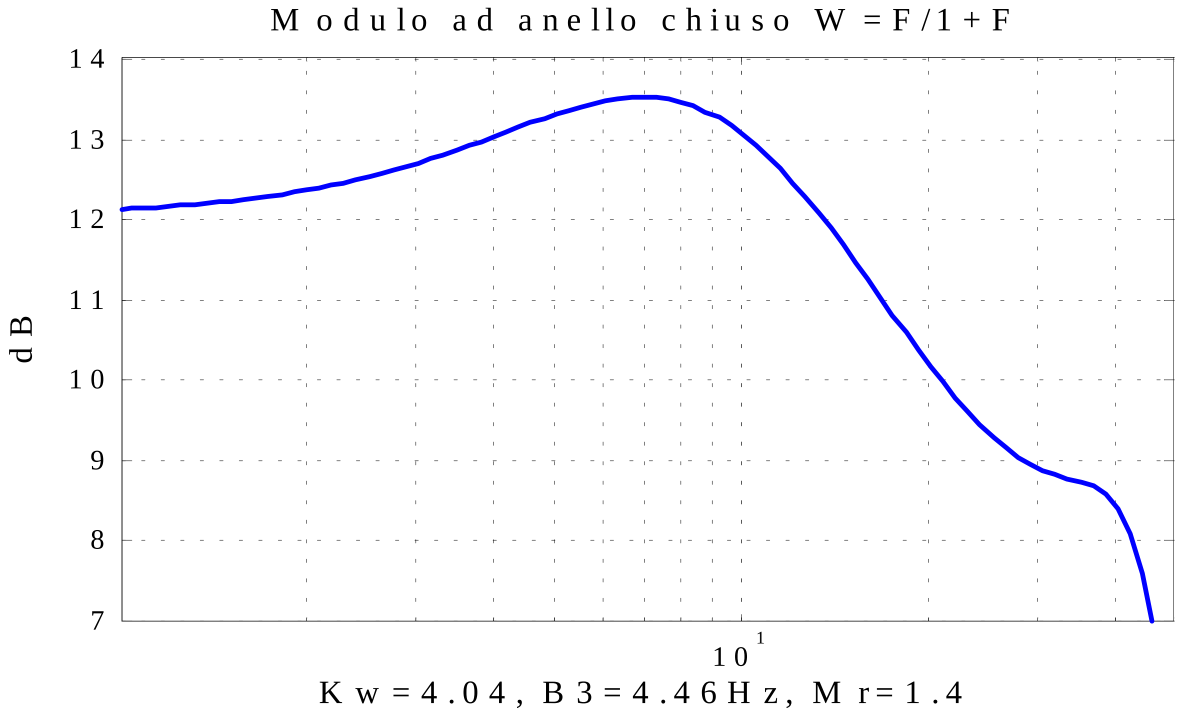
$$|F(j\omega)|>80=38dB$$

$$\omega<1 \text{ rad/sec}$$

Fasi di Processo modificato, Rete e Catena diretta



margine di fase processo modificato= 61.6


Modulo ad anello chiuso W=F/1+F
14
13
12
11
10
9
8
7
dB
10^1
Kw=4.04, B3=4.46Hz, Mr=1.4

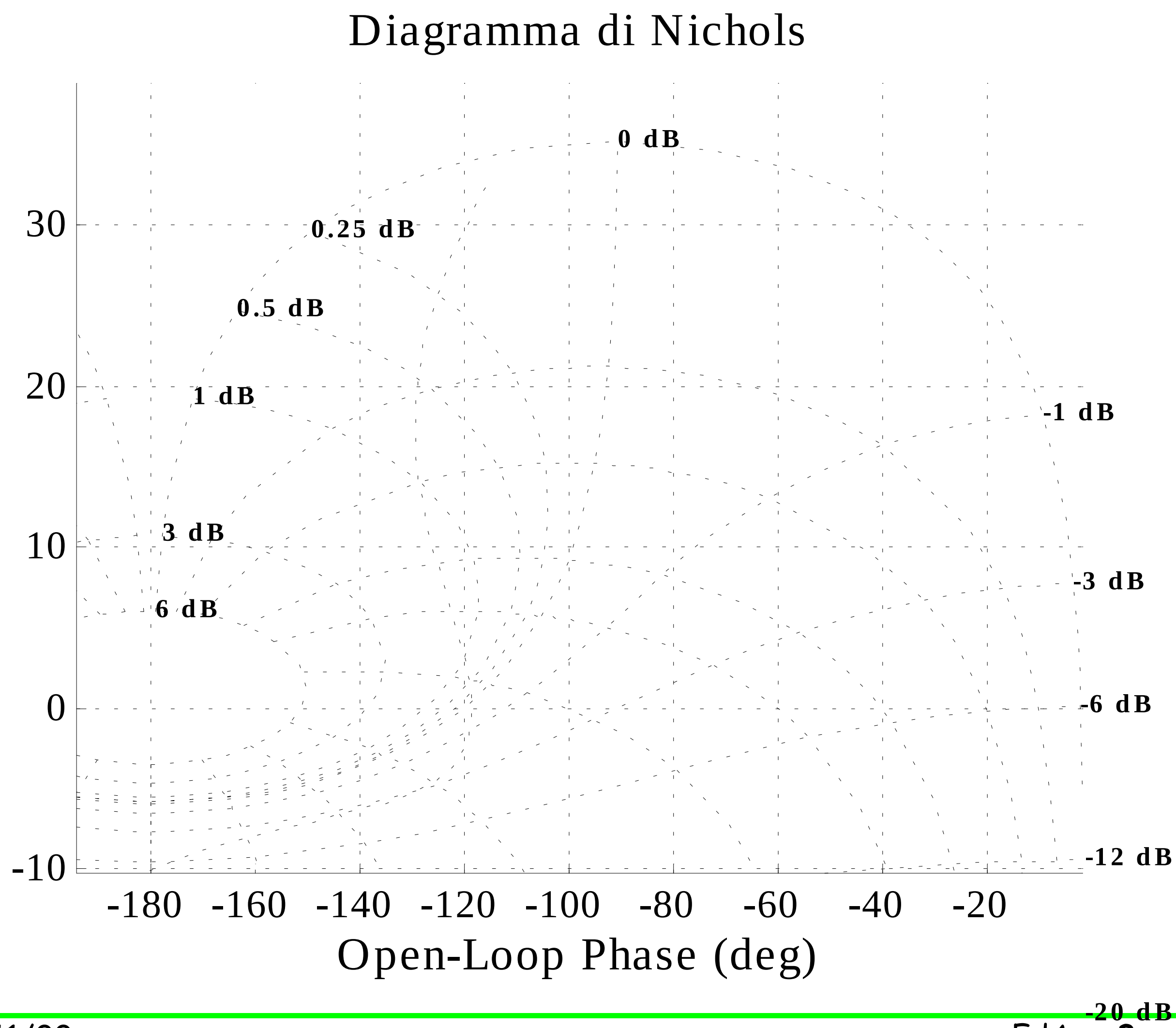
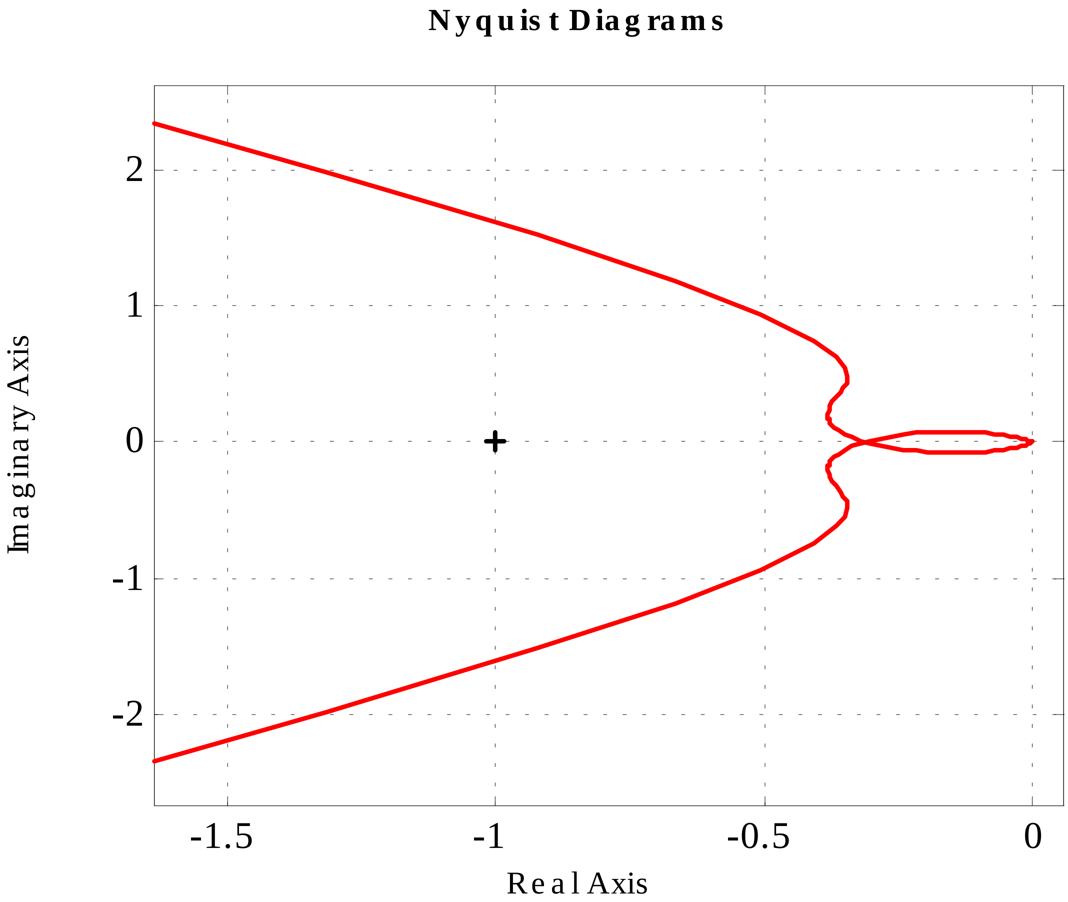


Diagramma di Nichols
0 dB
0.25 dB
0.5 dB
1 dB
3 dB
6 dB
-1 dB
-3 dB
-6 dB
-12 dB
-20 dB
30
20
10
0
-10
-180
-160
-140
-120
-100
-80
-60
-40
-20
Open-Loop Phase (deg)



Poiché il diagramma di Nyquist non interseca la funzione descrittiva della saturazione (-inf, -1), il sistema non si porterà sul ciclo limite. Tuttavia moltiplicando il guadagno in catena diretta per un valore maggiore di 3.2 il diagramma si porterà sul punto (–1,0) dando origine ad una oscillazione permanente alla pulsazione ω=50rad/sec. L'ampiezza della stessa dipenderà dal guadagno utilizzato.

Per cominciare discretizziamo la G(s) con il metodo indicato:

$G(z)=R/(1-\beta z^{-1})$ con $R=10$ e $\beta=e^{-10Tc}$

Per cui: $G(z)=10/(1-\beta z^{-1})$

Per calcolare il regolatore in grado di assegnare il comportamento richiesto bisogna adesso determinare quale sia la funzione di trasferimento a ciclo chiuso W(z) in risposta ad un gradino unitario fornisce la sequenza indicata. La y(z) che si ottiene dalla trasformata Z della sequenza si può calcolare sommando un contributo di ampiezza 1/2 all'instate k=1 alla trasformata del gradino traslato di due campioni:

$Y(z)=1/2\ z^{-1} +z/(z-1)\ z^{-2}$

La trasformata dell'ingresso vale

$U(z)=z/(z-1)$

Per cui la W(Z) rimane definita come

$W(z)=Y(z)/U(z)=1/2(z+1)/z^2$

A questo punto, dovendo essere

$W(z)=R(z)G(z)/(1+R(z)G(z))$

Si otiene

$R(z)=1/G(z)\ W(z)/(1-W(z))=1/10(z-\beta)(z+1)/[z(2z^2-z-1)]$

La G(z) di partenza non conteneva poli o zeri al di fuori del cerchio unitario quindi la cancellazione è consentita..

Per calcolare l'andamento dell'errore si deve calcolare la funzione di trasferimento tra **u** ed **e**:

$We(z)=E(z)/U(z)=1/(1+R(z)G(z))=1/2\ (2z^2-z-1)/z^2$

da cui si ricava l'espressione di E(z) imponendo per U(z) la rampa unitaria:

$E(z) = We(z)\ \ 0.1\ z/(z-1)^2 = 1/20\ (2z^2-z-1)/[z(z-1)^2]$

E, applicando il teorema del valore finale per la trasformata Z:

$e(inf)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})E(z)=0.15$

A ciclo chiuso l'equazione che si ottiene è la seguente:
$\mathbf{dx/dt=(A+bF)x-bFx_{ref}}$
All'equilibrio $\mathbf{dx/dt=0}$ la soluzione $\mathbf{x}$ soddisferà la seguente equazione:
$\mathbf{Ax+bFx-bFx_{ref}=0}$.
Affinchè si possa avere errore nullo per $\mathbf{t}\rightarrow$inf, ovvero $\mathbf{x=x_{ref}}$, $\mathbf{x_{ref}}$ dovrà appartenere al nucleo della matrice $\mathbf{A}$: $\mathbf{Ax_{ref}=0}$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da cui si evince che $\mathbf{x_{ref}}$ deve appartenere al sottospazio descritto per esempio dal vettore:

$$\mathbf{x_{ref}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

A questo punto, supposto che $\mathbf{x_{ref}}$ appartenga a questo sottospazio si può procedere con la normale assegnazione degli autovalori dallo stato che prevede solo di verificare la raggiungibilità del sistema:
La matrice di raggiungibilità vale:

$$R=[b \;\; Ab]=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ed il suo determinante vale 2$\Rightarrow$ ha rango pieno $\Rightarrow$ il sistema è tutto raggiungibile.
La sua inversa vale:

$$R^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & ½ \end{bmatrix}$$

e l'ultima riga quindi
$\gamma=[\, 0 \;\; ½ \,]$.
Il polinomio caratteristico desiderato, visti gli autovalori desiderati, si può esprimere come
$P(\lambda)=(\lambda+1)^2$
e la matrice F risulterà pari a
$F = -\gamma\, P(A) = [\, -7 \;\; -4 \,]$.