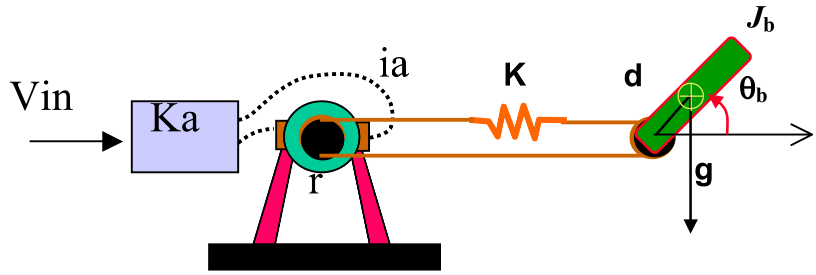


1(L+D) Il sistema in figura è composto da un **motore in c.c. controllato in corrente** (inerzia ***Jm*** ed attrito ***Dm***), un amplificatore di corrente di costante ***Ka***, una trasmissione elastica di costante (elastica) ***K***, e un braccio di massa ***M*** ed inerzia ***J***. Il centro di massa del braccio si trova ad una distanza ***d*** dall'asse di rotazione e le puleggie hanno un raggio pari ad ***r***. Dopo avere scritto le equazioni linearizzate del sistema intorno al punto $\theta_b=0$, si ricavi lo schema a blocchi del sistema linearizzato.

2a(L) Sia dato un processo **P(s)** descrivibile mediante la funzione di trasferimento:

$$P(s)=\frac{2*(s+1)(100-s)}{(s+5)(s+40)}$$

Sintetizzare un sistema di controllo a controreazione tale che il guadagno a ciclo chiuso sia pari a **2,** l'errore a regime per ingresso a rampa **u(t)=0.1t** sia minore o uguale a **0.04** e l'errore di riproduzione di una sinusoide del tipo **sin(ωt)** sia minore di **0.2** almeno fino a **4** radianti al secondo (il valore di ***Kc*** deve essere tale da soddisfare tutte le precedenti specifiche). Inoltre, l'omega di attraversamento ed il margine di fase della funzione a ciclo aperto soddisfino le: $\omega_t<100$ rad/sec e $m_\phi>30°$.

2b(L) Calcolare, utilizzando la carta di Nichols, la banda passante a **–3dB** e l'effettivo modulo alla risonanza della funzione a ciclo chiuso.

2c(L) Tracciare il diagramma di Nyquist della funzione compensata e determinare il periodo della oscillazione che si innesca quando in catena diretta si introduce un relè ideale.

3(D) Tracciare i diagrammi di Bode e di Nyquist di **G(s)=15*P(s)/s** (vedi esercizio 2a). Il sistema è stabile a ciclo chiuso? Verificarlo anche con il criterio di Routh.

4(D) Relativamente alla **G(s)** del precedente esercizio, calcolare con il 1° metodo di Ziegler e Nichols i coefficienti di un controllore a controreazione PD e, una volta tracciato anche il diagramma di bode del controllore, sommare i due diagrammi e determinare i nuovi margini di stabilità del sistema a controreazione risultante.

5(L) Scrivere l'equazione alle differenze del controllore **C(s)** determinato nell'esercizio 2a discretizzandolo con il metodo delle differenze all'indietro usando un tempo di campionamento **Tc** pari a **0.0001** sec.

6(L) Dato il sistema:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

determinare l'uscita per t=4sec determinata dalla applicazione di un gradino unitario a partire da condizioni iniziali $\mathbf{x_0}$**=(2 0)**.

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Elettronica/Meccanica	**Laurea/ Diploma/Nuovo Ordinamento**	**Iscritto al ………. anno**

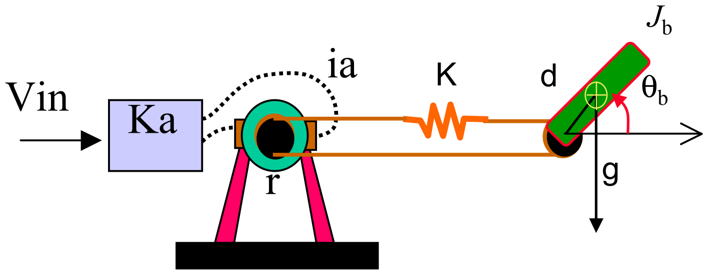
Equazioni del sistema:

$C_m = K_a K_m V_{in}$

$C_e = K(\theta_m - \theta_b)r$

$J_m \ddot{\theta}_m + D_m \dot{\theta}_m = C_m - C_e$

$J_b \ddot{\theta}_b = C_e - dMg\cos(\theta_b)$



Linearizzando intorno a $\theta_b = 0$

$C_{m,0} = K_a K_m V_{in,0}$

$C_{m,0} = C_{e,0}$

$C_{e,0} = dMg$

da cui

$$V_{in,0} = \frac{dMg}{K_a K_m}$$

a questo punto la parte lineare del sistema si può scrivere:

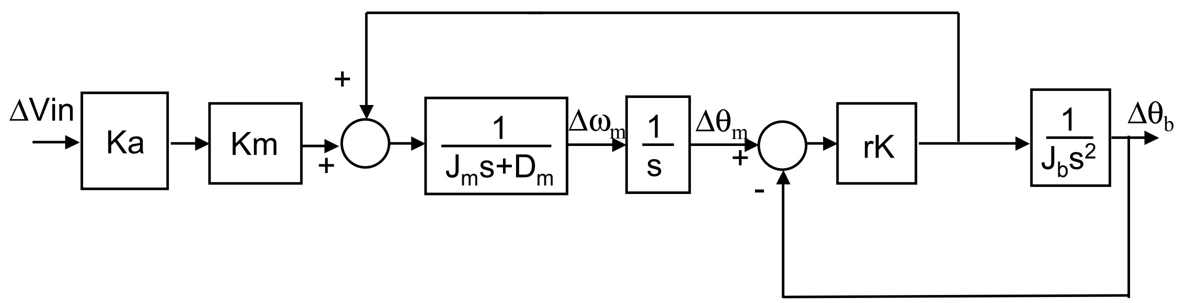
$\Delta C_m = K_a K_m \Delta V_{in}$

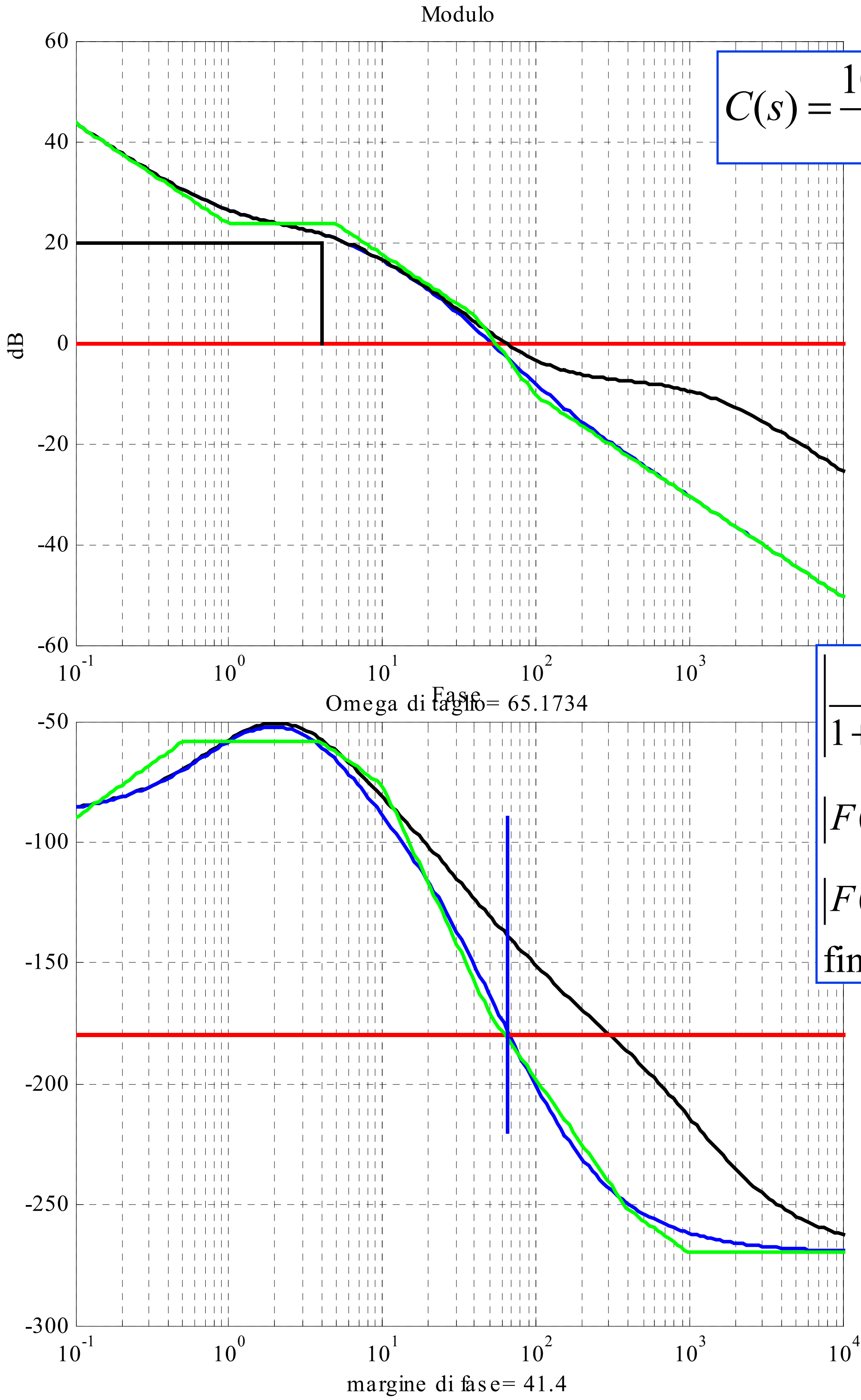
$\Delta C_e = K(\Delta\theta_m - \Delta\theta_b)r$

$J_m \Delta\ddot{\theta}_m + D_m \Delta\dot{\theta}_m = \Delta C_m - \Delta C_e$

$J_b \Delta\ddot{\theta}_b = \Delta C_e$

che da origine al seguente schema a blocchi:





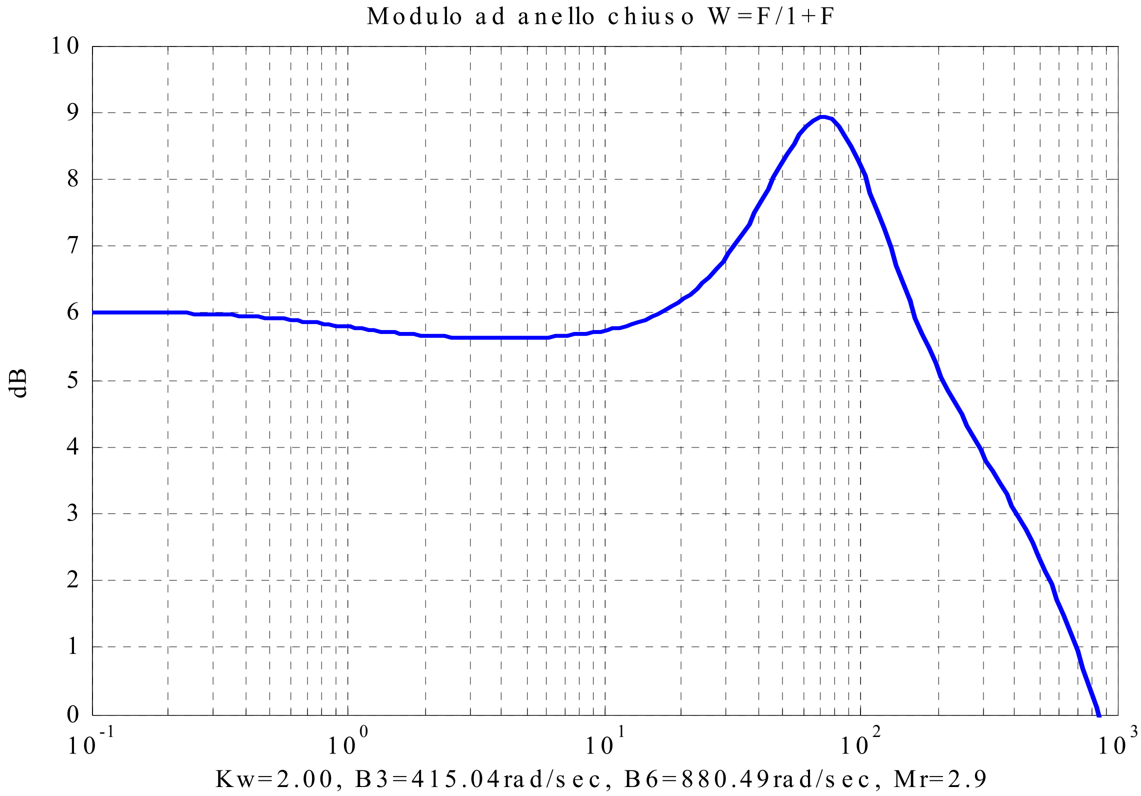
$$C(s) = \frac{10*3}{s} \; \frac{0.014s+1}{0.014/18s+1}$$

$$\left| \frac{K_d}{1+F(j\omega)} \right| < e$$

$$\left| F(j\omega) \right| > \frac{K_d}{e} = \frac{2}{0.2}$$

$$\left| F(j\omega) \right| > 10 = 20dB$$

fino a $\omega < 4$ rad/sec


Modulo ad anello chiuso W=F/1+F
dB
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Kw=2.00, B3=415.04rad/sec, B6=880.49rad/sec, Mr=2.9

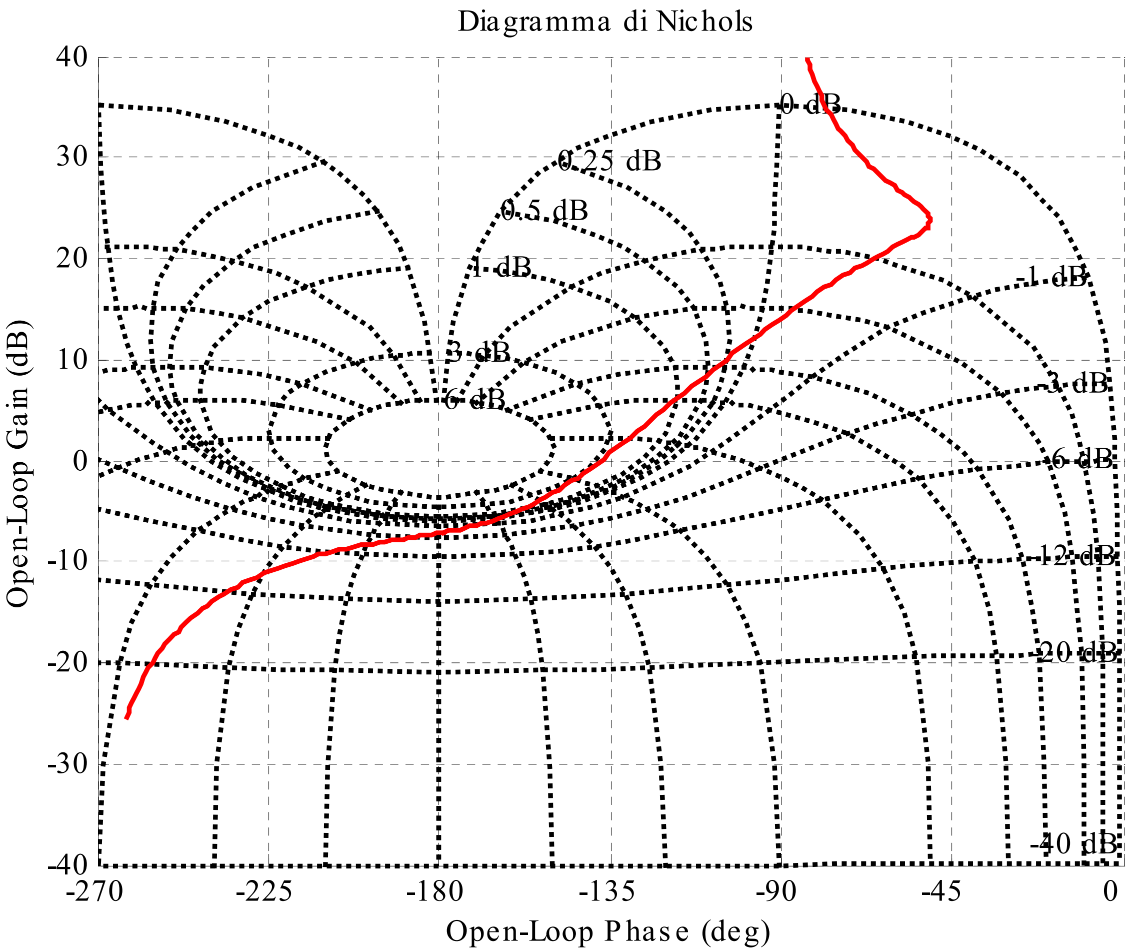
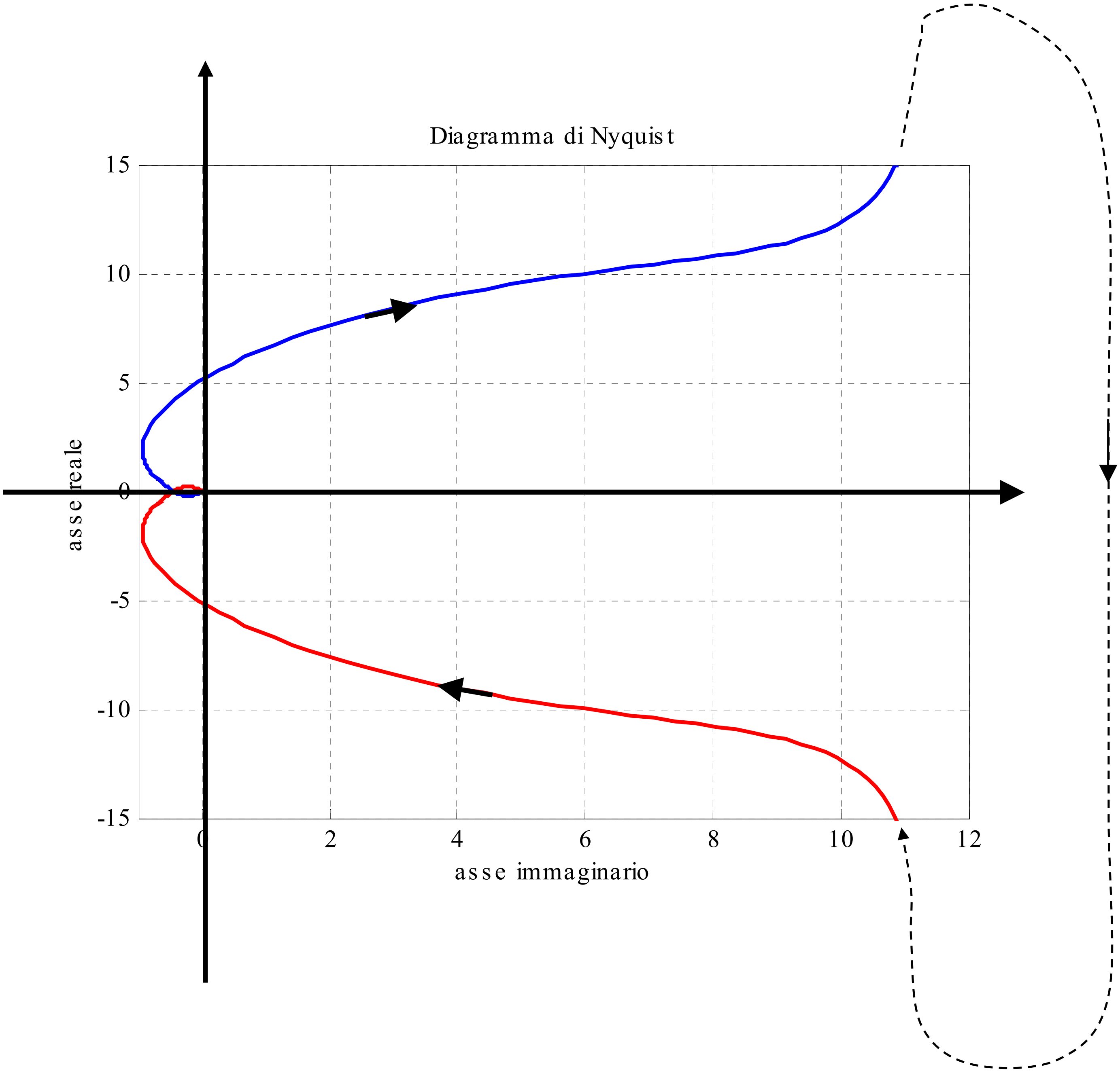
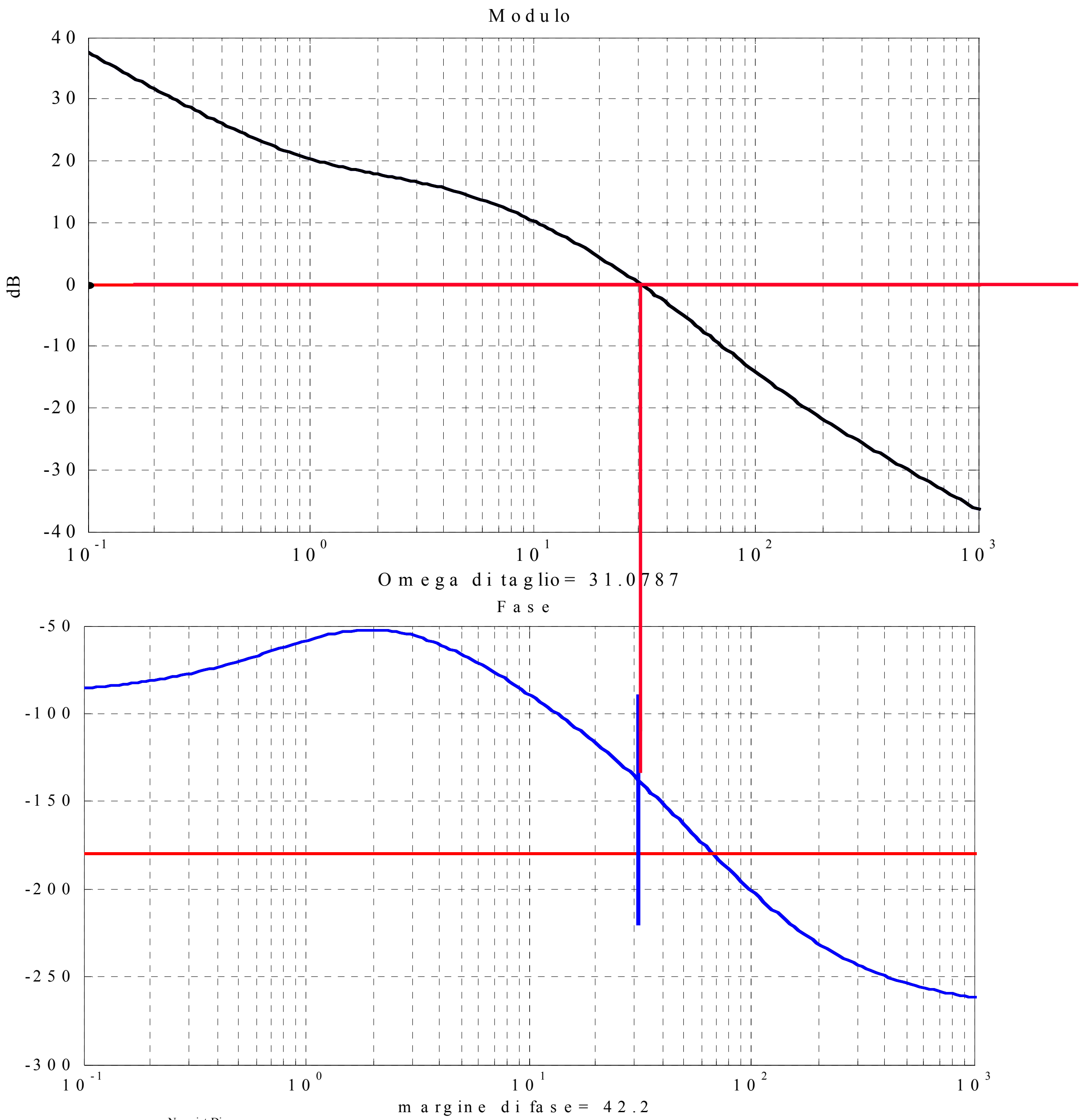


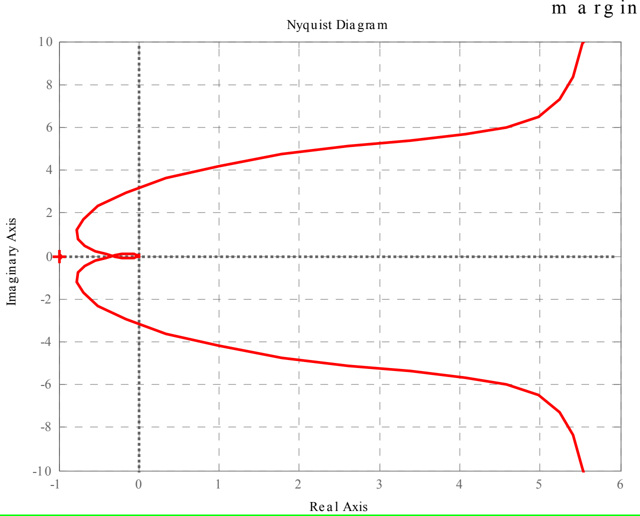
Diagramma di Nichols
Open-Loop Gain (dB)
Open-Loop Phase (deg)
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-270
-225
-180
-135
-90
-45
0
0 dB
0.25 dB
0.5 dB
1 dB
3 dB
6 dB
-1 dB
-3 dB
-6 dB
-12 dB
-20 dB
-40 dB



L'oscillazione di innesca a 300 rad/sec (quando la fase vale –180°)

Bode/Nyquist Diploma





Il Sistema è stabile a ciclo chiuso in quanto non compie giri intorno al punto –1 e non possiede poli a parte reale positiva.

Per verificare la stabilità a cliclo chiuso con Routh bisogna calcolare la funzione di trasferimento a ciclo chiuso:

$$W(s) = \frac{15P(s)/s}{1+15P(s)/s} = -30\frac{(s-100)(s+1)}{s^3+15s^2+3170s+3000}$$

La tabella di Routh ci fornisce:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 3170 \\ 2 & 15 & 3000 \\ 1 & 1170 & \\ 0 & 3000 & \end{array}$$

Per cui, vista la assenza di variazioni di segno, concludiamo che il sistema a ciclo chiuso è asintoticamente stabile.

Per applicare il metodo di Ziegler-Nichols dobbiamo calcolare K_{pl} e T_l.

Dall'analisi del diagramma di Bode il margine di guadagno vale circa 3,

mentre la fase vale -180 in ω=67 rad/sec. Quindi $K_{pl} = 3, \quad T_l = 2\pi / \omega = 0.0938$

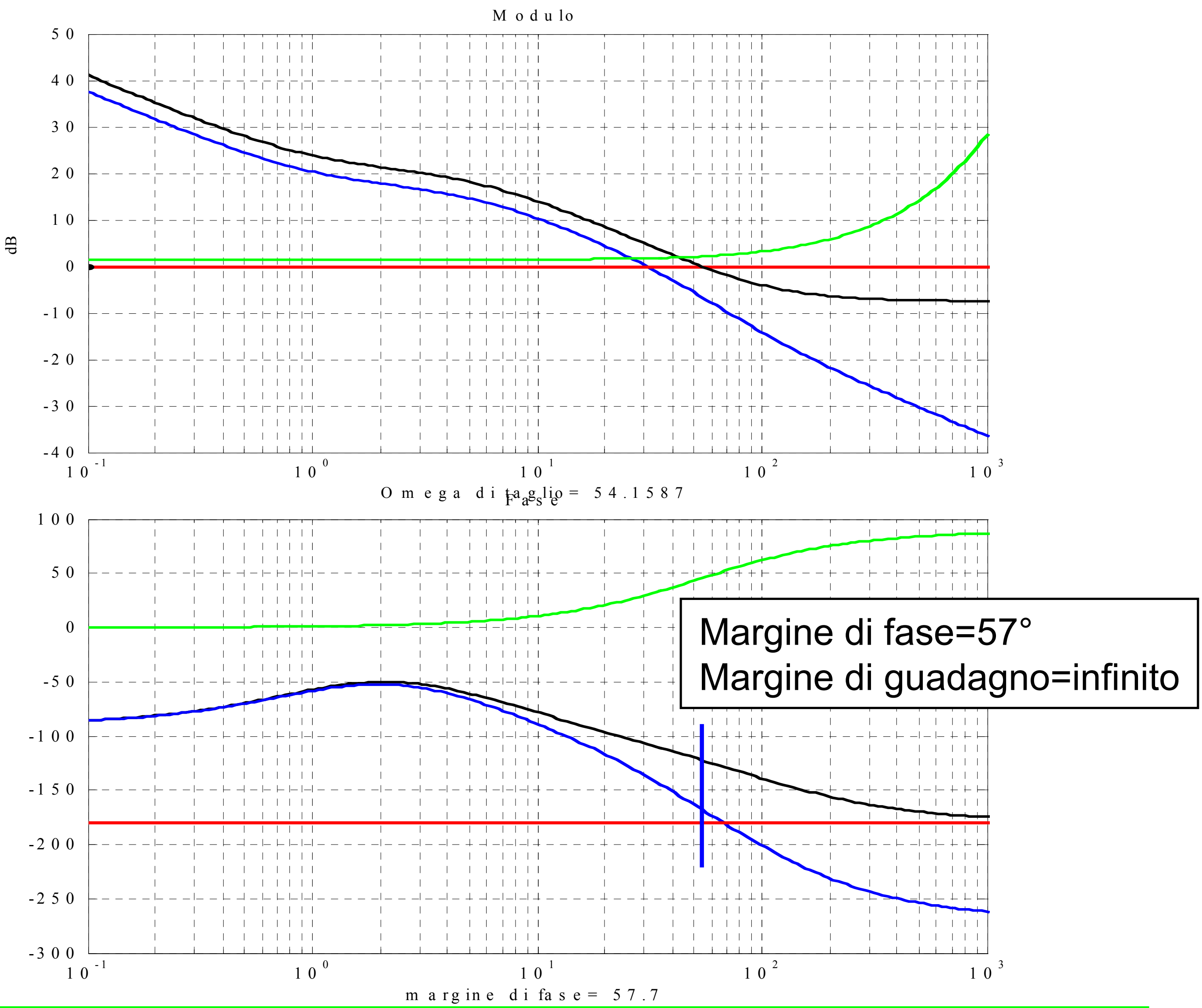
Dalla tabella di Ziegler-Nichols, relativamente al controllore

$$PID(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \right)$$

ed alla riga del PD, leggiamo: $\frac{K_p}{K_{pl}} = 0.5, \quad \frac{\tau_d}{T_l} = 0.2, \quad \tau_i = 0$

quindi $K_p = 0.5 K_{pl} = 1.5, \quad \tau_d = 0.2 T_l = 0.0188$

Il controllore risulta perciò: $PD(s) = 1.5(1 + 0.0188 s)$



$$C(s) = \frac{10*3}{s} \; \frac{0.014s+1}{0.014/18s+1}$$

Discretizziamo con il metodo delle differenze all'indietro e Tc=0.0001

$$s = \frac{1-z^{-1}}{T_c} = 10000(1-z^{-1})$$

$$C(z) = 1500000 \frac{z(141z-140)}{(z-1)(4388888888z-3888888888)} =$$

$$= K \frac{z(az-b)}{(z-1)(cz-d)} = \frac{V(z)}{E(z)}$$

da cui l'equazione alle differenze

$$\mathrm{E(z)(Kaz^2} - Kb) = V(z)(cz^2 - (c+d)z + d)$$

$$e_k Ka - e_{k-2} b = v_k c - v_{k-1}(c+d) + v_{k-2} d$$

$$e_k = \frac{b}{Ka} e_{k-2} + \frac{c}{Ka} v_k - \frac{c+d}{Ka} v_{k-1} + \frac{d}{Ka} v_{k-2}$$

$$e_k = 6.6194\text{e-}007 \; e_{k-2} + 20.7512 \; v_k - 39.1384 \; v_{k-1} + 18.3872 \; v_{k-2}$$

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

La soluzione completa può essere scritta, passando alla trasformata di Laplace, come:

$$Y(s)=C(sI-A)^{-1}X_0+C(sI-A)^{-1}BU(s)$$

con

$$X_0=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}, U(s)=\frac{1}{s}$$

Calcoliamo prima il termine $(sI-A)^{-1}$

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s+1 & 0\\ 1 & s+2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+2 & 0\\ -1 & s+1\end{bmatrix}$$

quindi

$$C(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$C(sI-A)^{-1}X_0=-2\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$C(sI-A)^{-1}BU(s)=-\frac{1}{(s+1)(s+2)s}$$

La soluzione si ottiene antitrasformando entrambe le espresisoni e calcolandole per $t=4$

$$y(t)=L^{-1}\left\{-2\frac{1}{(s+1)(s+2)}-\frac{1}{(s+1)(s+2)s}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{-2s-1}{(s+1)(s+2)s}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-2t}$$

$$y(t=4)=-0.5178$$