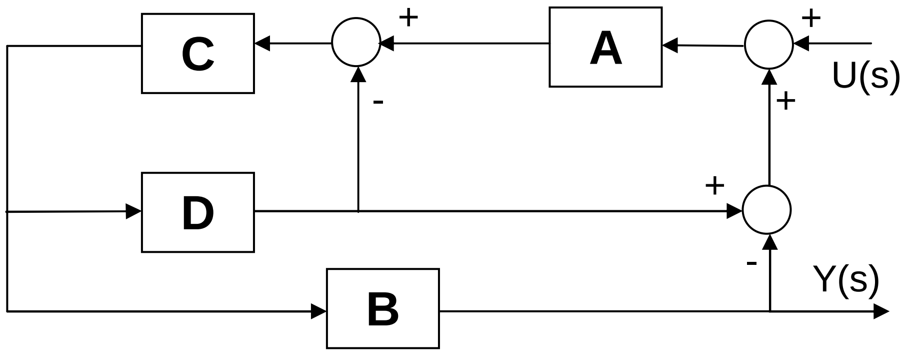
Esame di Fondamenti di Automatica

Corso di Laurea Vecchio Ordinamento in Ingegneria Elettronica

11 febbraio 2003 - Compito **A**

Cognome:	**Nome**	**Matricola:**	**E-mail:**

1. Ricavare la funzione di trasferimento tra **u** ed **y** nel seguente schema a blocchi:



2. Dato il sistema **G(s)=1/(s^2+4s+13)** ricavare, tramite la Trasformata di Laplace, la risposta **y(t)** ad un ingresso **u(t) = δ_{-1}(t-1).** Determinare il limite per **t** tendente all'infinito di **y(t).**

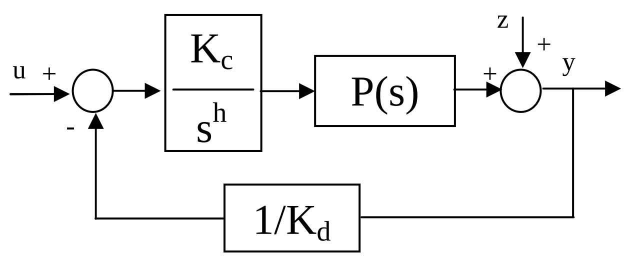
3. Data la funzione a ciclo aperto **F(s) = K / (4s^4+s^3+2s^2+s+1),** calcolare, tramite il criterio di Routh, per quali valori di **K** il ciclo chiuso ha radici a parte reale minore di **-1**. Supporre la controreazione unitaria.

4. Sia dato un processo **P(s)** descrivibile mediante la funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{(s/0.3+1)}{(s/2+1)(s/10+1)(1-s/30)}$$

Sintetizzare il sistema di controllo in figura (determinare **h** e **K$_c$**) in modo tale che:

- il guadagno a ciclo chiuso sia uguale a **3**
- l'errore per ingresso a rampa **u(t)=0.1t** sia minore o uguale a **0.09**



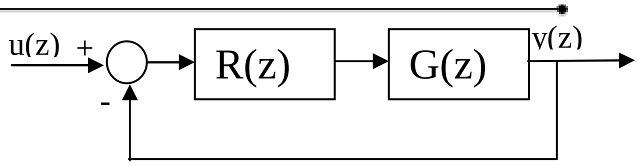
Scelto il valore **minimo** di **K$_c$** compatibile con le specifiche, tracciare i diagrammi di **BODE** e **NYQUIST** della funzione a ciclo aperto, e determinare su questi la pulsazione di attraversamento (**ω_t**) e, in caso di sistema stabile a ciclo chiuso, i margini di stabilità (**m$_\phi$** e **m$_g$**).

5. Dato il sistema dinamico descritto dalla terna di matrici

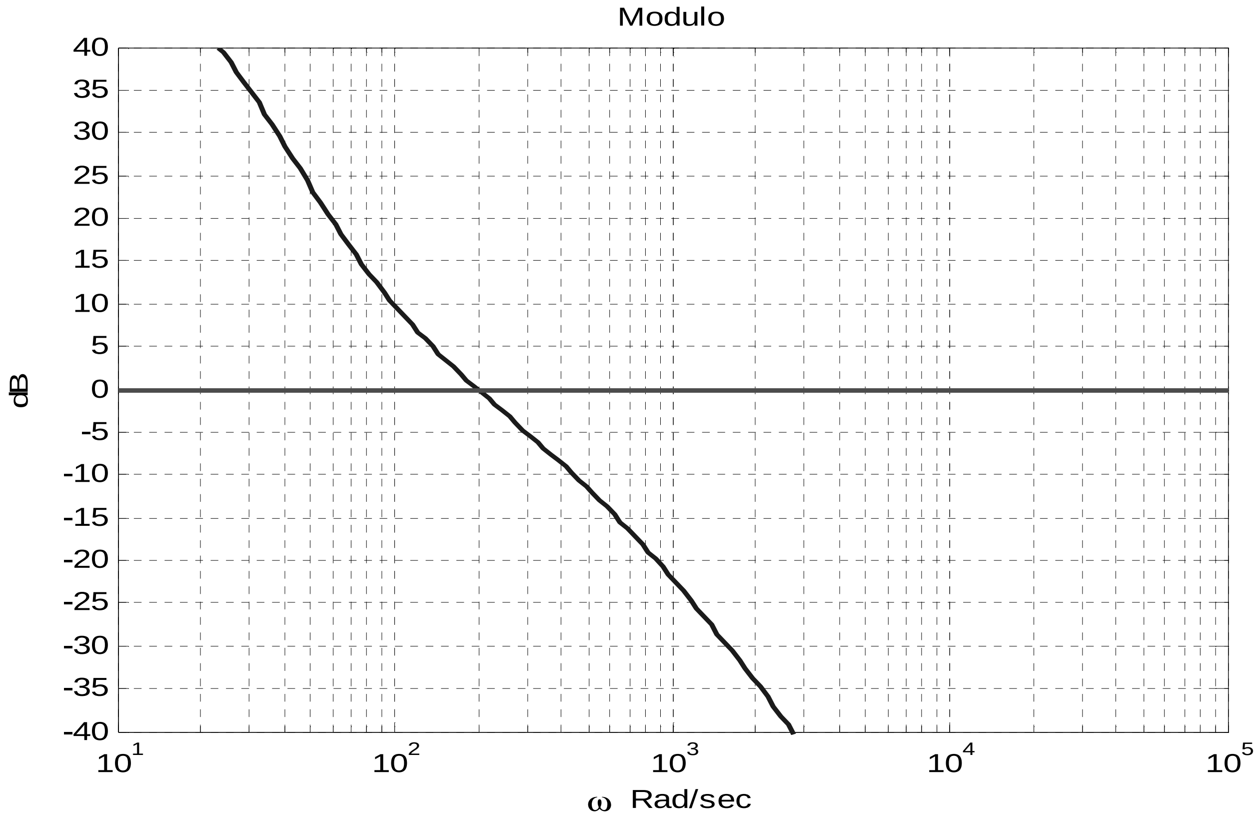
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

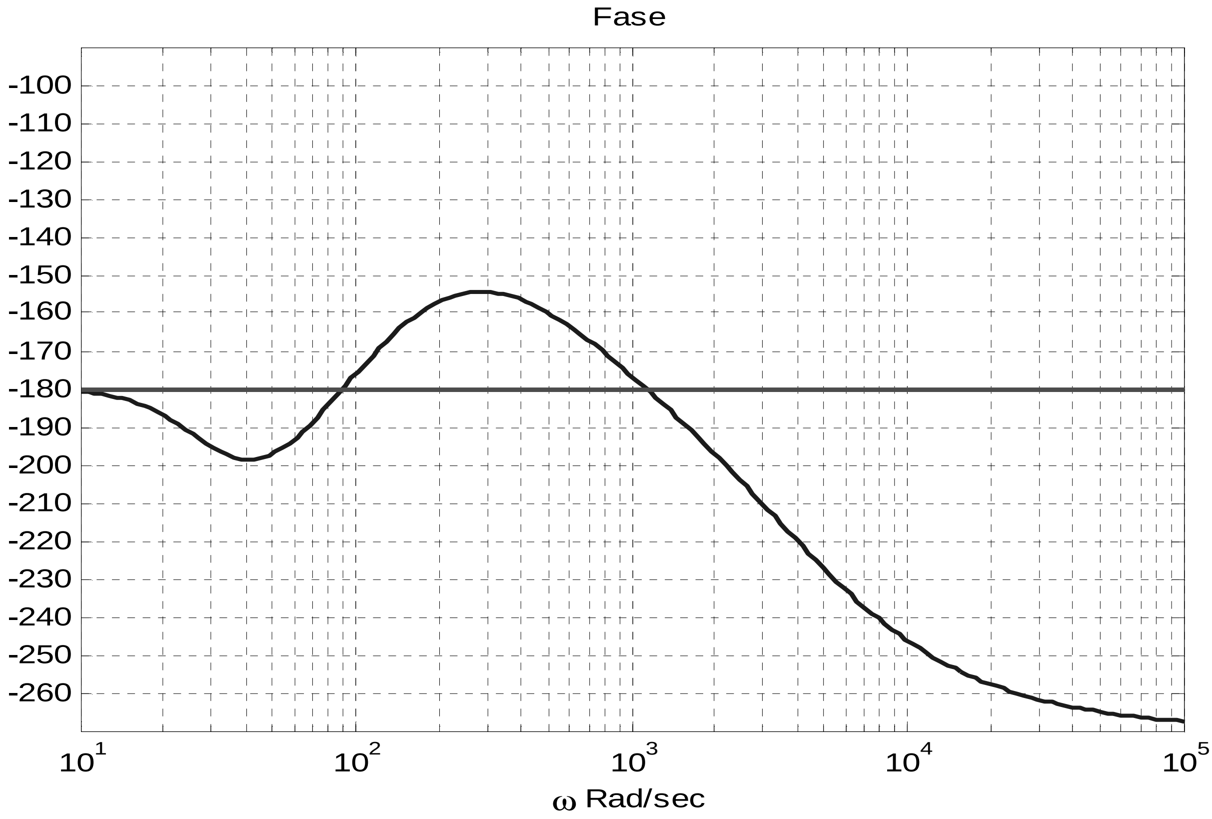
Determinare controllabilità ed osservabilità delle sue dinamiche, ricavare la sua funzione di trasferimento ed individuare uno schema di controllo con reazione statica dall'uscita tale da stabilizzare, se possibile, il sistema a ciclo chiuso.

6. Dato il processo discreto **G(z)=(z+1)/((z+0.2)(z-0.3))**, determinare il controllore **R(z)** che assicuri una funzione di trasferimento a ciclo chiuso **W(z)** tale che, in risposta ad un gradino di ampiezza unitaria, fornisca in uscita la sequenza **{y$_k$}={0, 0, 0.25, 0.5, 0.5, …}.** Quindi, supposto di applicare quale ingresso la sequenza **{u$_k$}={1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, …}** si calcolino i primi **5** campioni dell'uscita



7. Dato il diagramma di **BODE** della funzione di trasferimento a ciclo aperto **F(s)** sotto riportata (non ci sono poli a parte reale positiva) determinare la rete compensatrice **R(s)** tale da assicurare ω_t**>200** rad/sec e m_ϕ>40°. Tracciare quindi il diagramma di **NICHOLS** della funzione compensata **F'(s)=F(s)R(s)** e determinare su di esso il modulo alla risonanza **Mr** e la banda passante a –3 Decibel.





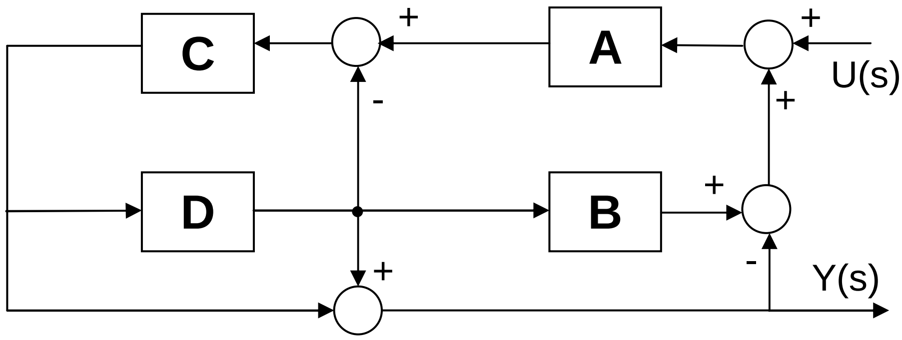
Esame di Fondamenti di Automatica

Corso di Laurea Vecchio Ordinamento in Ingegneria Elettronica

11 febbraio 2003 - Compito **B**

Cognome:	**Nome**	**Matricola:**	**E-mail:**

1. Ricavare la funzione di trasferimento tra **u** ed **y** nel seguente schema a blocchi:



2. Dato il sistema **G(s)=1/(s²+6s+18)** ricavare, tramite la Trasformata di Laplace, la risposta **y(t)** ad un ingresso **u(t) =** δ_{-1}**(t-2).** Determinare il limite per **t** tendente all'infinito di **y(t).**

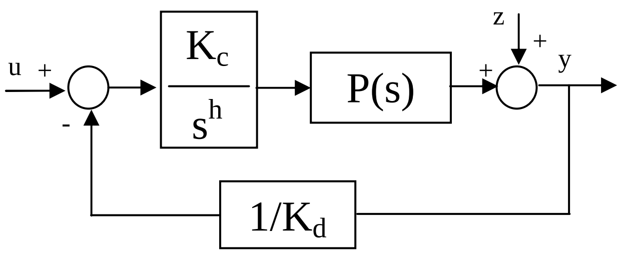
3. Data la funzione a ciclo aperto **F(s) = K / (5s⁴+s³+s²+s+1),** calcolare, tramite il criterio di Routh, per quali valori di **K** il ciclo chiuso ha radici a parte reale minore di **-1**. Supporre la controreazione unitaria.

4. Sia dato un processo **P(s)** descrivibile mediante la funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{(s/0.3+1)}{(s/2+1)(s/10+1)(1-s/30)}$$

Sintetizzare il sistema di controllo in figura (determinare **h** e $\mathbf{K_c}$) in modo tale che:

- il guadagno a ciclo chiuso sia uguale a **3**
- l'errore per ingresso a rampa **u(t)=0.1t** sia minore o uguale a **0.09**



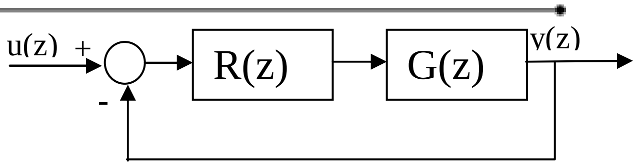
Scelto il valore **minimo** di $\mathbf{K_c}$ compatibile con le specifiche, tracciare i diagrammi di **BODE** e **NYQUIST** della funzione a ciclo aperto, e determinare su questi la pulsazione di attraversamento (ω_t) e, in caso di sistema stabile a ciclo chiuso, i margini di stabilità ($\mathbf{m_\phi}$ e $\mathbf{m_g}$).

5. Dato il sistema dinamico descritto dalla terna di matrici

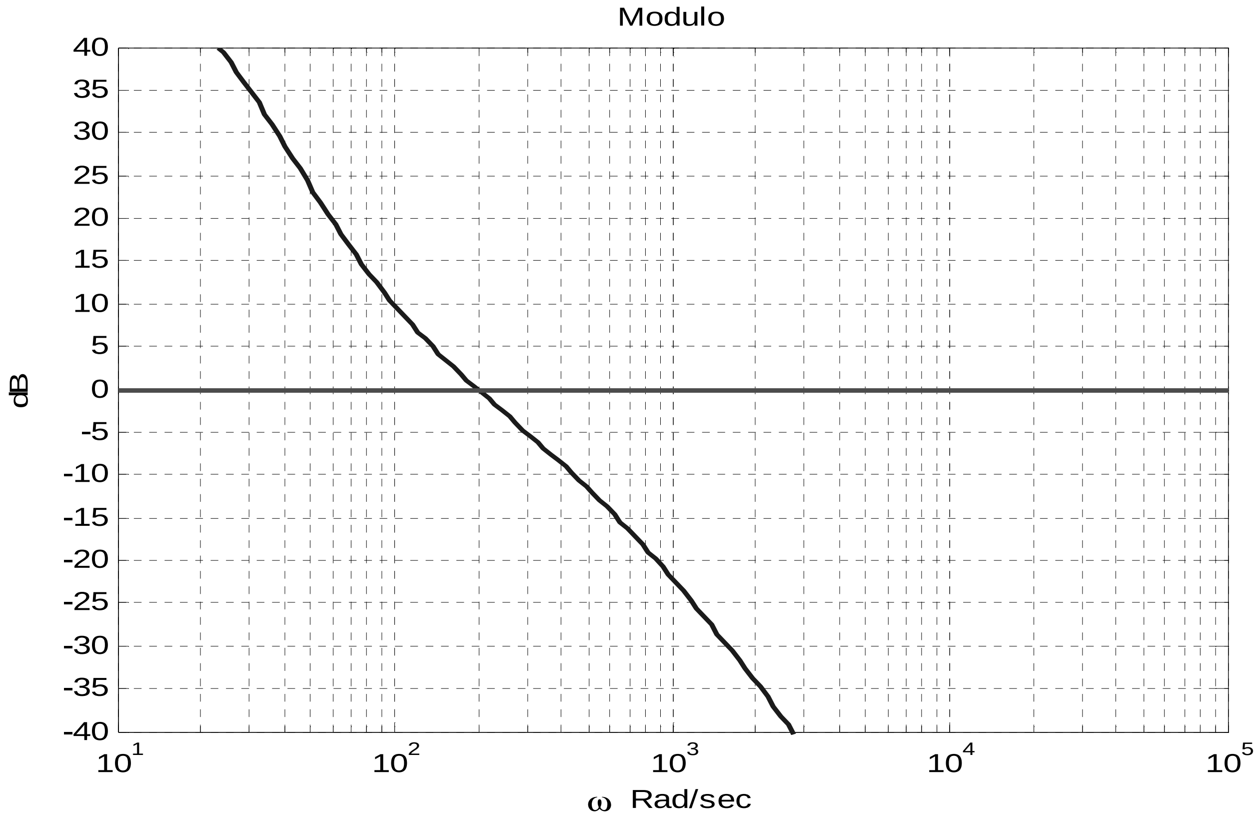
$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

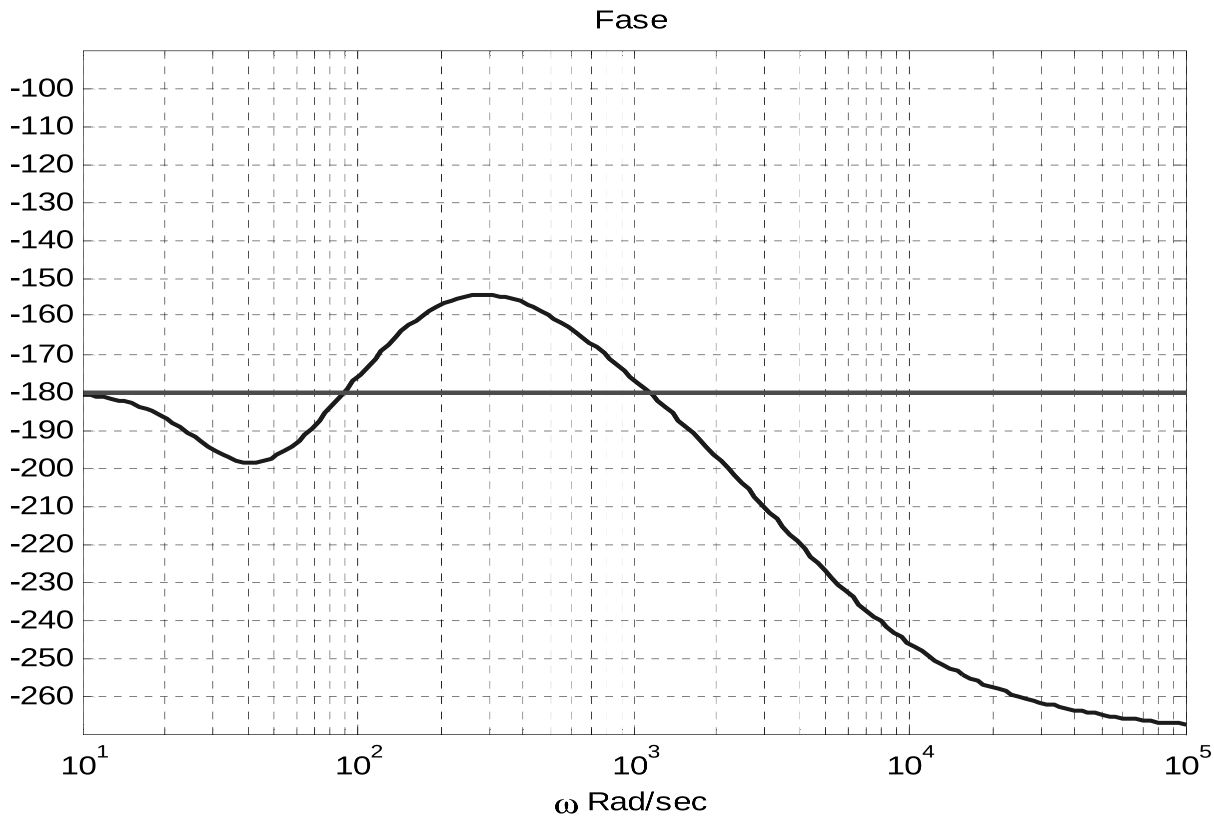
Determinare controllabilità ed osservabilità delle sue dinamiche, ricavare la sua funzione di trasferimento ed individuare uno schema di controllo con reazione statica dall'uscita tale da stabilizzare, se possibile, il sistema a ciclo chiuso.

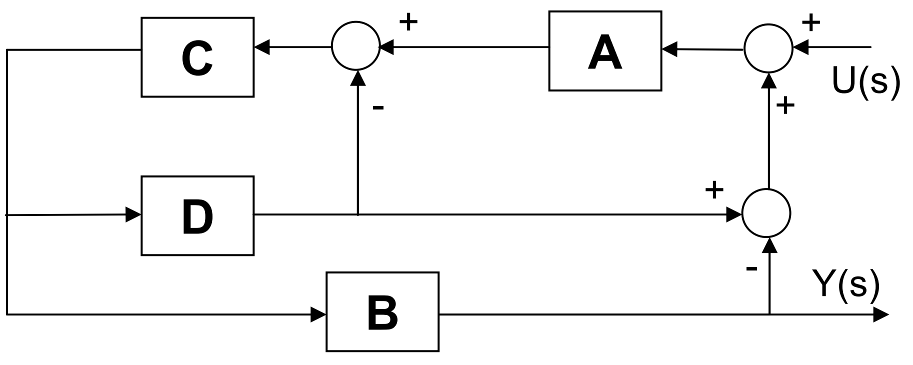
6. Dato il processo discreto **G(z)=(z+1)/((z+0.2)(z-0.3))**, determinare il controllore **R(z)** che assicuri una funzione di trasferimento a ciclo chiuso **W(z)** tale che, in risposta ad un gradino di ampiezza unitaria, fornisca in uscita la sequenza **{y**$_k$**}={0, 0, 0.25, 0.5, 0.5, …}.** Quindi, supposto di applicare quale ingresso la sequenza **{u**$_k$**}={1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, …}** si calcolino i primi **5** campioni dell'uscita



7. Dato il diagramma di **BODE** della funzione di trasferimento a ciclo aperto **F(s)** sotto riportata (non ci sono poli a parte reale positiva) determinare la rete compensatrice **R(s)** tale da assicurare ω_t**>200** rad/sec e **m**$_\phi$>40°. Tracciare quindi il diagramma di **NICHOLS** della funzione compensata **F'(s)=F(s)R(s)** e determinare su di esso il modulo alla risonanza **Mr** e la banda passante a –3 Decibel.







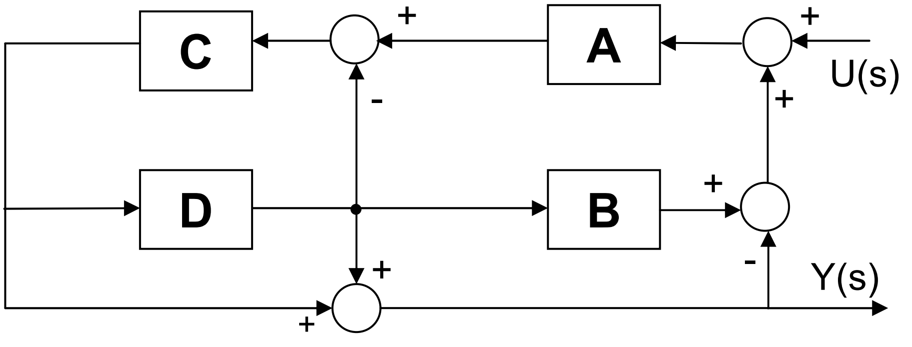
$$W(s) = \frac{ABC}{1 + ABC - CD(1 + A)}$$

$$W(s) := \frac{Kc}{4\,s^4 + s^3 + 2\,s^2 + s + 1 + Kc}$$

ponendo $s = s - 1$ abbiamo il nuovo polinomio caratteristico:

$$denW := 4\,s^4 - 15\,s^3 + 23\,s^2 - 16\,s + 5 + Kc$$

essendo alcuni coefficienti negativi non esiste alcun valore
di K che rende il sistema stabile con radici a sinistra del punto -1.



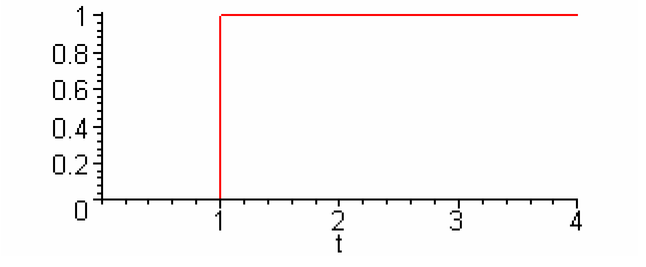
$$W(s) = \frac{AC(1+D)}{1 - CD(AB-1) + AC(1+D)}$$

$$W(s) := \frac{Kc}{5\,s^4 + s^3 + s^2 + s + 1 + Kc}$$

ponendo $s = s - 1$ abbiamo il nuovo polinomio caratteristico:

$$denW := 5\,s^4 - 19\,s^3 + 28\,s^2 - 18\,s + 5 + Kc$$

essendo alcuni coefficienti negativi non esiste alcun valore di K che rende il sistema stabile con radici a sinistra del punto -1.



$$U(s) := \frac{e^{(-s)}}{s}$$

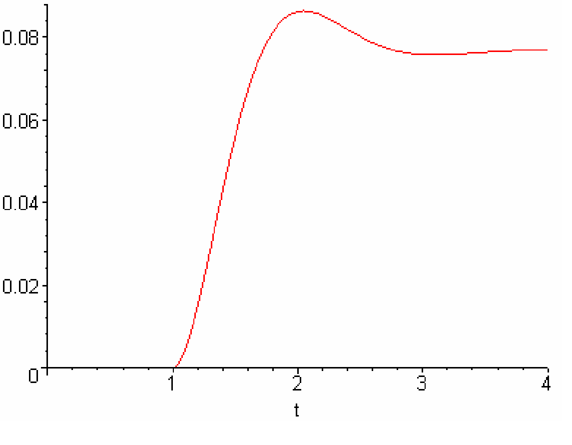
$$G(s) := \frac{1}{s^2 + 4s + 13} \qquad U1(s) := \frac{1}{s} \qquad Y1(s) := \frac{1}{(s^2 + 4s + 13)\, s}$$

$$Y1d(s) := -\frac{\frac{1}{26} + \frac{1}{39} I}{s + 2 + 3 I} - \frac{\frac{1}{26} - \frac{1}{39} I}{s + 2 - 3 I} + \frac{\frac{1}{13}}{s}$$

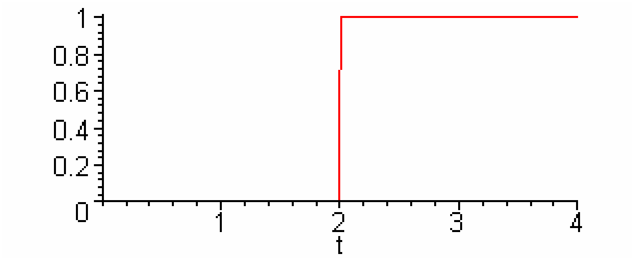
$$Y1d(s) := \frac{s + 4}{-13 s^2 - 52 s - 169} + \frac{\frac{1}{13}}{s}$$

$$y1(t) := -\frac{1}{13} e^{(-2t)} \cos(3t) - \frac{2}{39} e^{(-2t)} \sin(3t) + \frac{1}{13}$$

$$y(\infty) := \frac{1}{13}$$



$$y(t) := -\frac{1}{13} \delta_{-1}(t-1)\, e^{(-2t+2)} \cos(3t-3) - \frac{2}{39} \delta_{-1}(t-1)\, e^{(-2t+2)} \sin(3t-3) + \frac{1}{13} \delta_{-1}(t-1)$$



$$U(s) := \frac{e^{(-2\,s)}}{s}$$

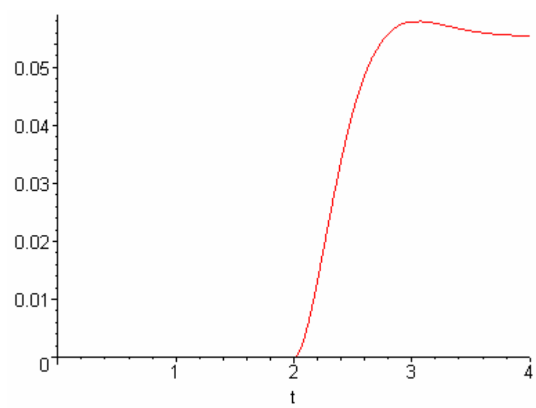
$$G(s) := \frac{1}{s^2 + 6\,s + 18} \qquad U1(s) := \frac{1}{s} \qquad Y1(s) := \frac{1}{(s^2 + 6\,s + 18)\,s}$$

$$Y1d(s) := -\frac{\frac{1}{36} + \frac{1}{36}I}{s + 3 + 3\,I} - \frac{\frac{1}{36} - \frac{1}{36}I}{s + 3 - 3\,I} + \frac{\frac{1}{18}}{s}$$

$$Y1d(s) := \frac{-s - 6}{18\,s^2 + 108\,s + 324} + \frac{\frac{1}{18}}{s}$$

$$y1(t) := -\frac{1}{18}\,\mathbf{e}^{(-3\,t)}\cos(3\,t) - \frac{1}{18}\,\mathbf{e}^{(-3\,t)}\sin(3\,t) + \frac{1}{18}$$

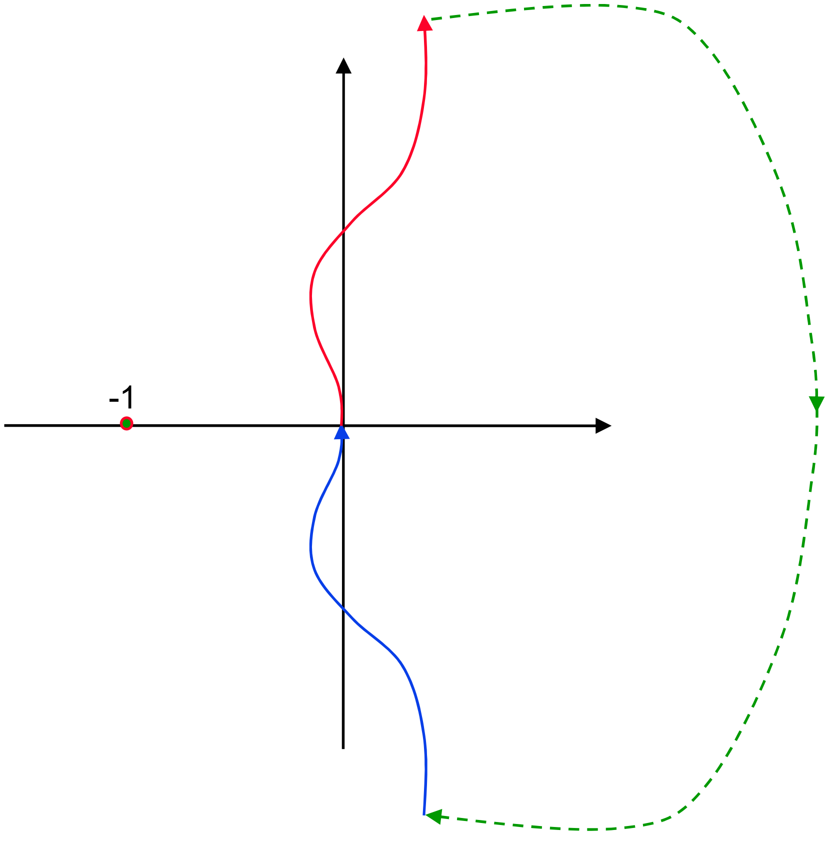
$$y(\infty) := \frac{1}{18}$$

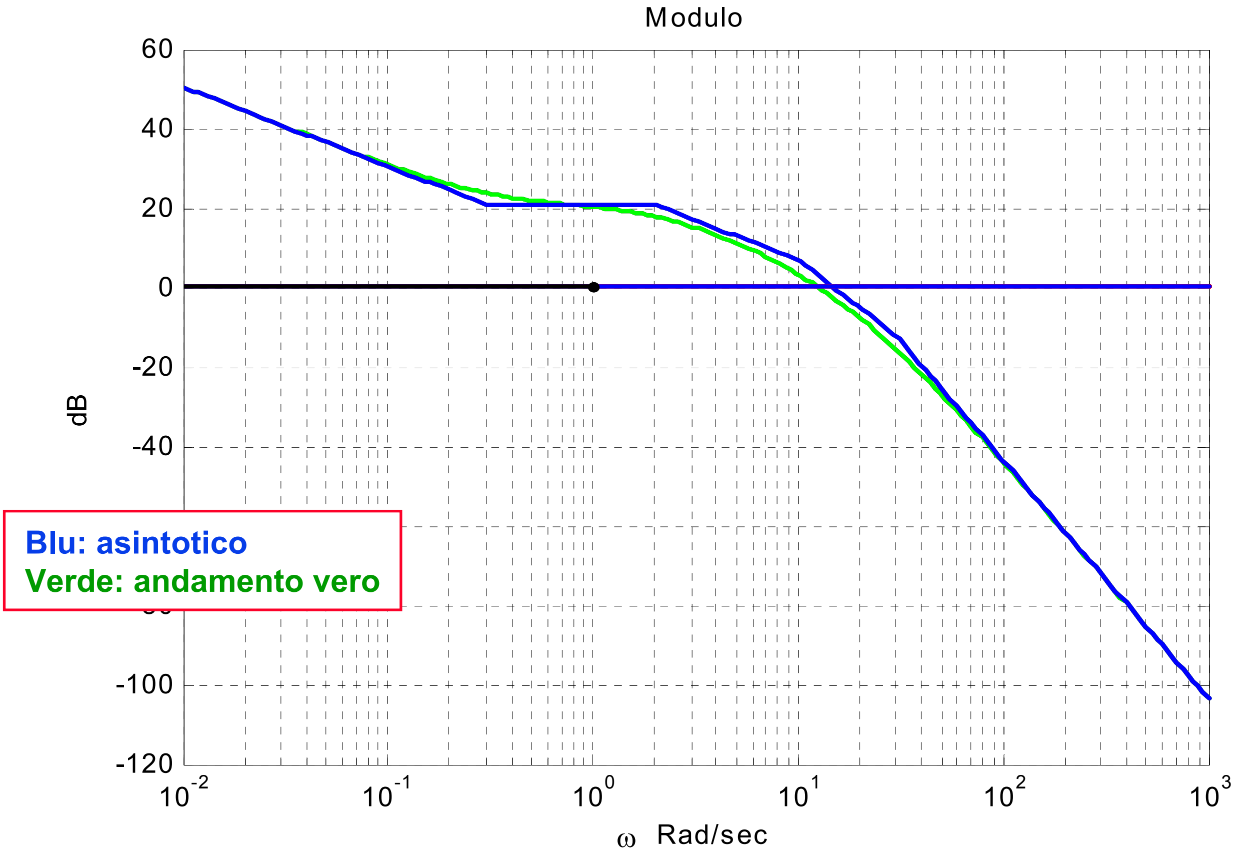


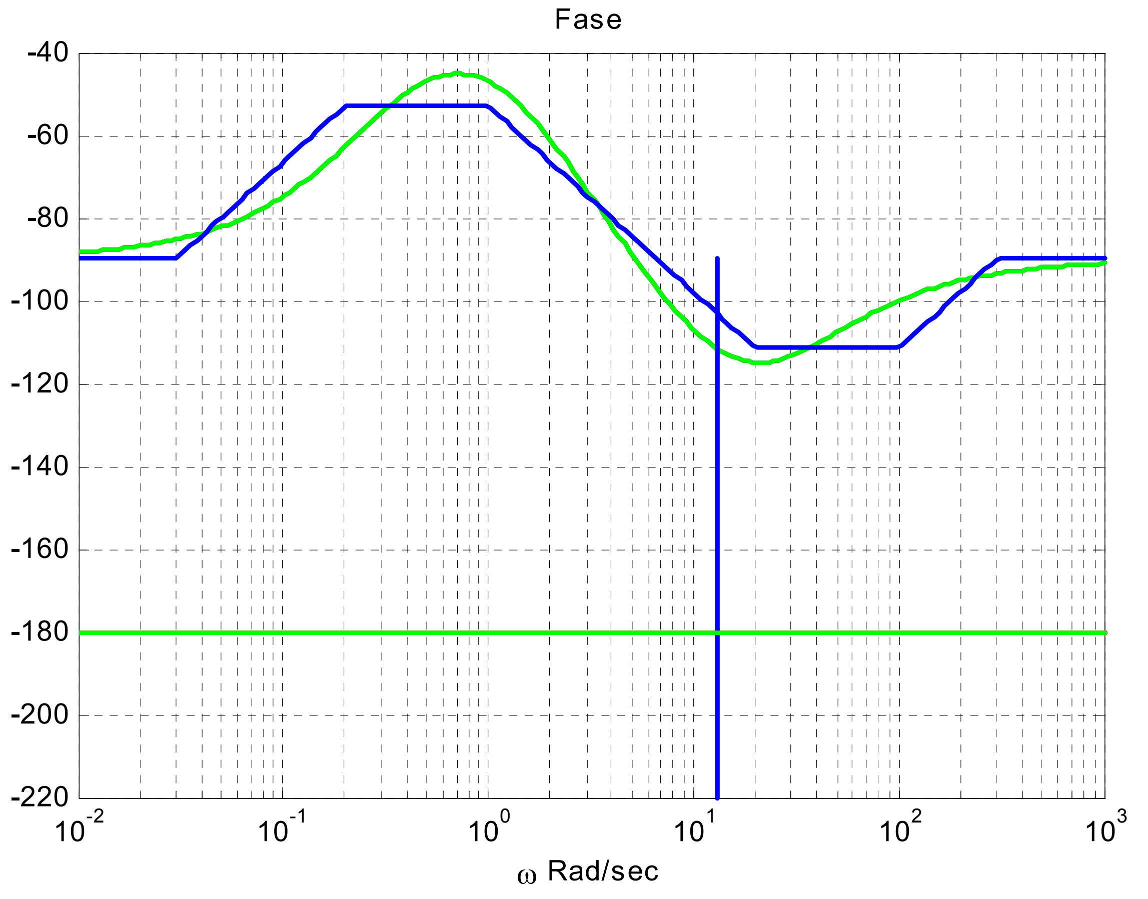
$$y(t) := -\frac{1}{18}\,\delta_{-1}(t-2)\,\mathbf{e}^{(-3\,t+6)}\cos(3\,t-6)$$
$$-\frac{1}{18}\,\delta_{-1}(t-2)\,\mathbf{e}^{(-3\,t+6)}\sin(3\,t-6) + \frac{1}{18}\,\delta_{-1}(t-2)$$

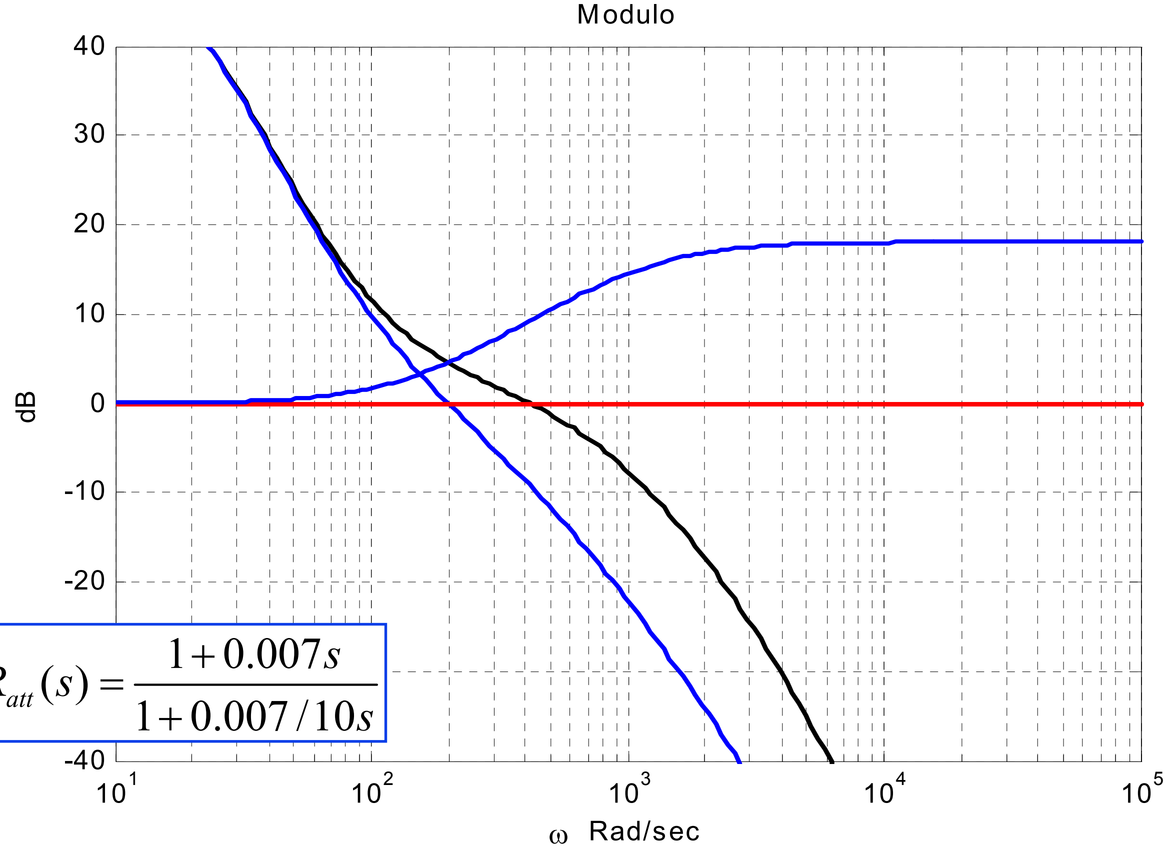
- Kd=3 per avere il guadagno a ciclo chiuso richiesto,
- h=1 per avere un sistema di controllo di tipo 1 (errore finito per ingresso a rampa)
- Kc>= 10 in conseguenza della specifica sull'errore.

Il sistema a ciclo aperto ha un polo a parte reale positiva ed il diagramma di Nyquist non gira intorno al punto -1. Ne segue che il sistema a ciclo chiuso NON è asintoticamente stabile e quindi non ha senso calcolarne i margini di stabilità.

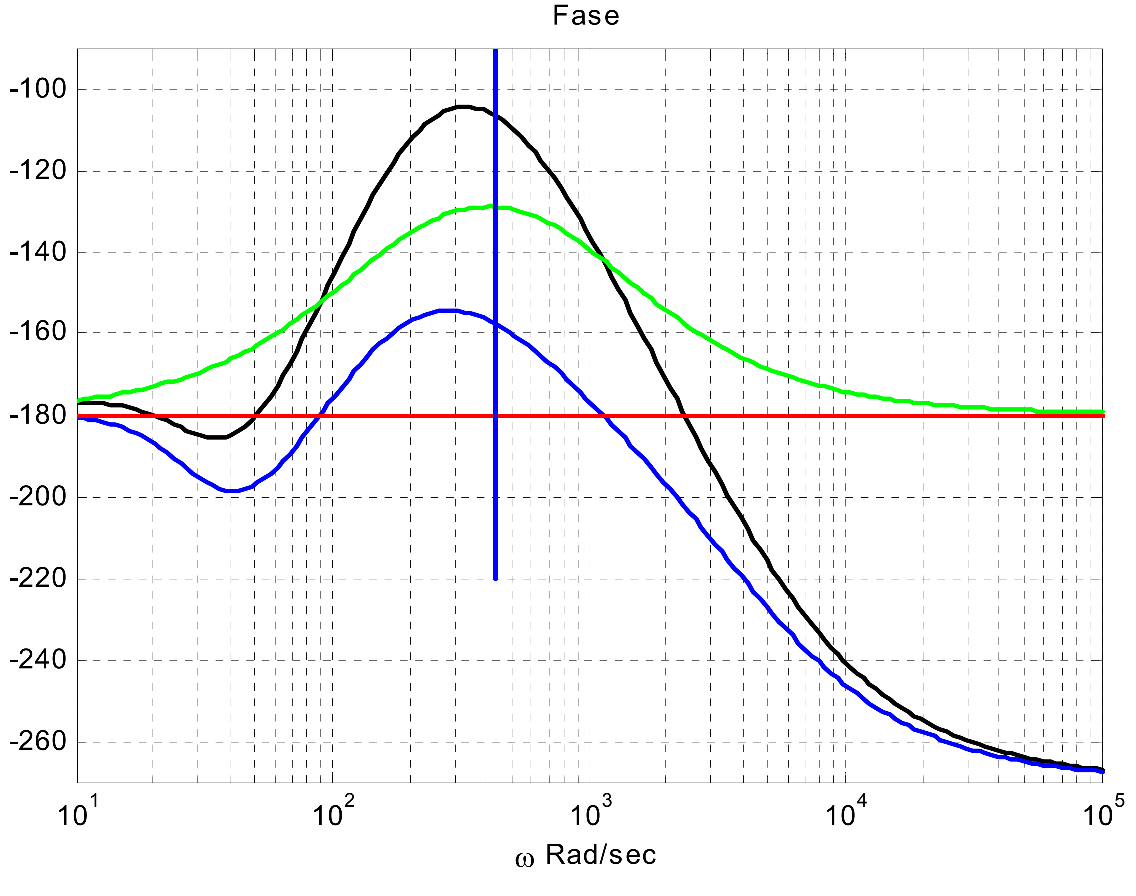


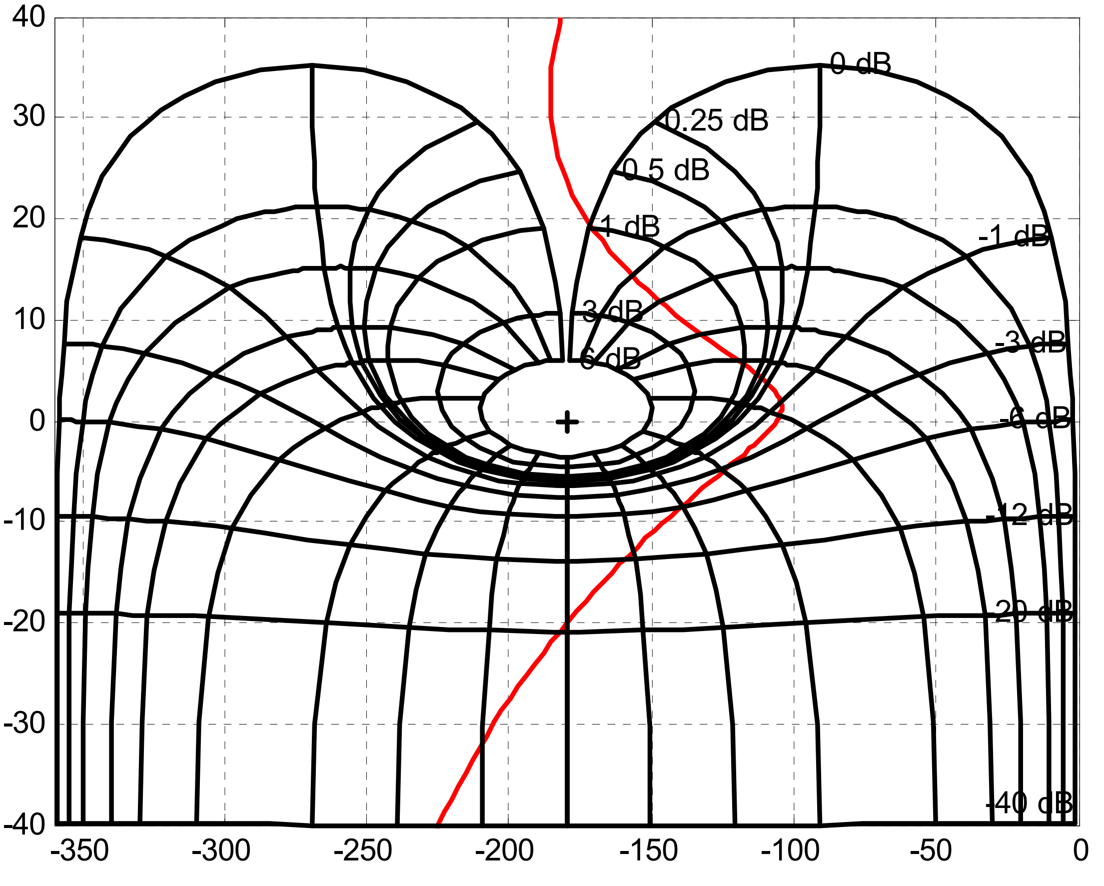

Modulo
60
40
20
0
-20
-40
-100
-120
dB
Blu: asintotico
Verde: andamento vero
10^{-2} 10^{-1} 10^{0} 10^{1} 10^{2} 10^{3}
ω Rad/sec

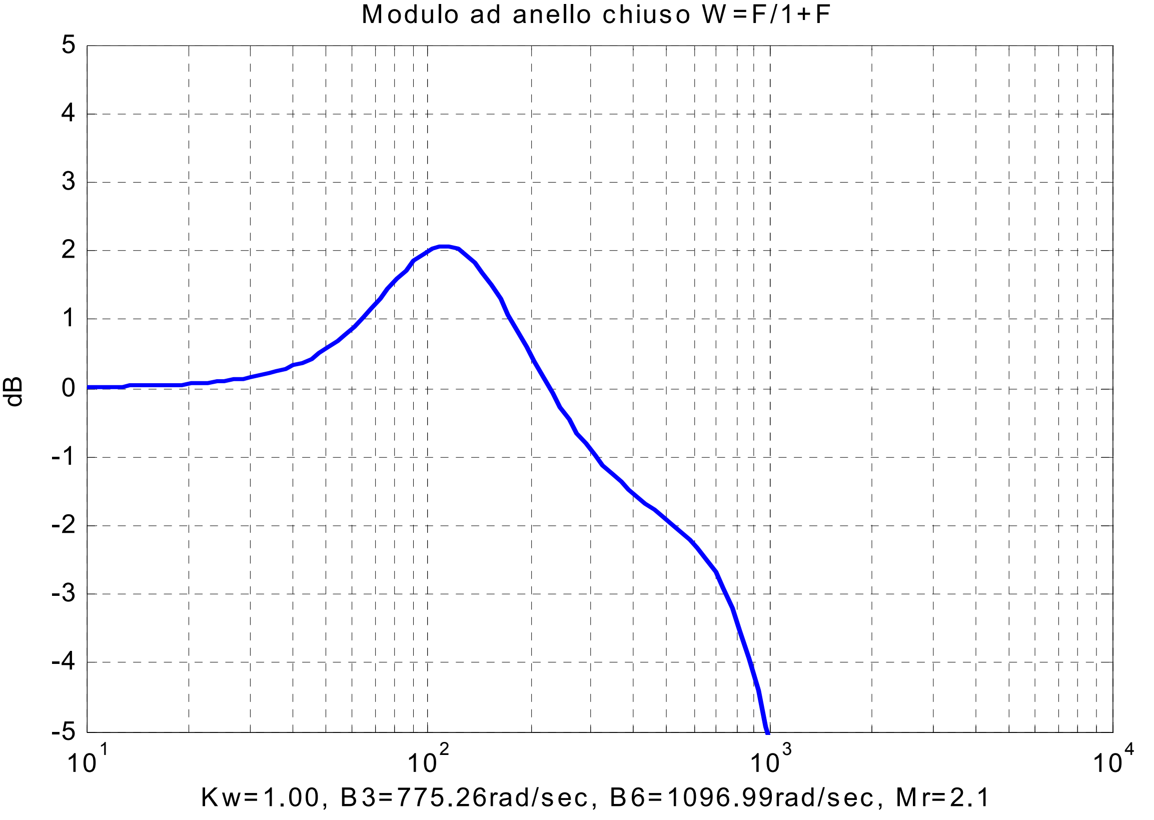

Fase
-40
-60
-80
-100
-120
-140
-160
-180
-200
-220
10^{-2} 10^{-1} 10^{0} 10^{1} 10^{2} 10^{3}
ω Rad/sec



$$R_{att}(s) = \frac{1+0.007s}{1+0.007/10s}$$




40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-350
-300
-250
-200
-150
-100
-50
0
0 dB
0.25 dB
0.5 dB
1 dB
-1 dB
3 dB
-3 dB
6 dB
-6 dB
-12 dB
-20 dB
-40 dB


Modulo ad anello chiuso W=F/1+F
dB
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
10^1
10^2
10^3
10^4
Kw=1.00, B3=775.26rad/sec, B6=1096.99rad/sec, Mr=2.1

L’uscita desiderata è

$$Y(z)=\frac{1}{4z^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{z^2}\frac{1}{z-1}=\frac{z+1}{2z^2(z-1)}$$

e tenuto conto che l’ingresso è un gradino unitario la cui Z-trasformata è

$$U(z)=\frac{z}{z-1}$$

si ha che

$$W(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{\dfrac{z+1}{4z^2(z-1)}}{\dfrac{z}{z-1}}=0.25\frac{z+1}{z^3}$$

Ora dato che tale W(z) rispetta le condizioni di fisica realizzabilità (ritardo intrinseco non inferiore a quello del processo) e che la G(z) non ha poli al di fuori del cerchio di raggio unitario e che l’unico zero di G(z) sul cerchio di raggio unitario è anche uno zero di W(z), è possibile applicare la tecnica di sintesi diretta. Per cui

$$R(z)=\frac{N_W\ \ D_G}{N_G\ \ (D_W+N_W)}=\frac{(z+0.2)(z-0.3)}{4z^3-z-1}$$

Per il calcolo dell’uscita, tenuto conto che il segnale di ingresso è pari a

$$\bar{U}(z)=1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3(z-1)}=\frac{z^4-z^3+z^2-z+1}{z^3(z-1)}$$

si ha che l’uscita è pari a

$$\bar{Y}(z)=W(z)\bar{U}(z)=\frac{z^5+1}{4z^6(z-1)}$$

da cui utilizzando il metodo della grande divisione si ricava che **$\{y_k\}=\{0, 0, 0.25, 0.25, 0.25\}$**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema è già in forma di Jordan per cui possiamo studiare separatamente le dinamiche associate ai singoli blocchi. L'autovalore in 3 è ovviamente controllabile (c'è il -1 in B) ed osservabile (c'è il 2 in C).

Gli autovalori in -2 sono controllabili (in B l'1 si trova sull'ultima equazione) ma solo in parte osservabile (l'1 della C è sulla terza equazione: la seconda variabile non si affaccia mai in uscita ne influenza le altre equazioni).

Il sistema sarebbe ancora stabilizzabile in quanto la dinamica non osservabile è comunque stabile.

Per verificare la stabilizzabilità del sistema con la reazione statica dall'uscita calcoliamo la F.d.T. del sistema che ovviamente, vista la forma di Jordan, sarà:

$$F(s) = \frac{-2}{s-3} + \frac{1}{s+2} = \frac{-2(s+2)+(s-3)}{s^2-s-6} = \frac{-s-7}{s^2-s-6}$$

con $u = Ky$, abbiamo a ciclo chiuso

$$\frac{K\dfrac{-s-7}{s^2-s-6}}{1-K\dfrac{-s-7}{s^2-s-6}} = \frac{K(-s-7)}{s^2+(K-1)s-6+7K}$$

per avere stabilità dovrebbe essere: ,

$$\begin{cases} K-1>0 \\ -6+7K>0 \end{cases}$$

che sono soddisfatte da: $K > 1$

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix};C=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

Il sistema è già in forma di Jordan per cui possiamo studiare separatamente le dinamiche associate ai singoli blocchi. L'autovalore in 4 è ovviamente controllabile (c'è l'1 in B) ed osservabile (c'è l'1 in C).

Gli autovalori in -3 non sono controllabili (in B l'1 si trova sulla prima equazione, la seconda non è mai raggiunta dall'ingresso u o influenzata da altre variabili di stato) e però completamente osservabile (l'1 della C è sulla terza equazione: la seconda variabile non si affaccia mai in uscita ne influenza le altre equazioni).

Il sistema sarebbe ancora stabilizzabile in quanto la dinamica non controllabile è comunque stabile.

Per verificare la stabilizzabilità con la reazione statica dall'uscita calcoliamo la F.d.T. del sistema che ovviamente, vista la forma di Jordan, sarà:

$$F(s)=\frac{1}{s-4}+\frac{1}{s+3}=\frac{(s+3)+(s-4)}{s^2-s-12}=\frac{2s-1}{s^2-s-12}$$

con $u = Ky$, abbiamo a ciclo chiuso

$$\frac{K\dfrac{2s-1}{s^2-s-12}}{1-K\dfrac{2s-1}{s^2-s-12}}=\frac{K(2s-1)}{s^2-(1+2K)s-12+K}$$

per avere stabilità dovrebbe essere:

$$\begin{cases}-(1+2K)>0\\ -12+K>0\end{cases}$$

che però NON ha soluzione: il sistema NON è stabilizzabile!!!!