Controllo Digitale

a.a. 2007-2008

Stabilità dei sistemi a tempo discreto

LT-Cap. 5

Ing. Federica Pascucci

Definizione di stabilità

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

- Il sistema è *asintoticamente stabile* se e solo se tutte le radici del polinomio D(z), cioè i poli del sistema, si trovano all'interno della circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine del piano Z
- Il sistema è *stabile semplicemente* se i poli del sistema si trovano all'interno della circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine del piano Z tranne al più uno con modulo pari ad 1

NB Dal momento che si tratta di sistemi lineari, tempo invarianti stabilità asintotica e stabilità BIBO coincidono.

Criteri per determinare la stabilità

- Calcolo delle radici di $D(z)$
- Analisi dei coefficienti
  - Passare nel dominio w
    Criterio di Routh-Hurwitz
  - Analizzare i coefficienti di $D(z)$
    Criterio di Jury

Criterio di Routh-Hurwitz

1. Si trasforma $D(z)$ sostituendo

$$z = \frac{1+w}{1-w}$$

2. Si analizza $D(w)$ costruendo la tabella di Routh

Trasformazione bilineare

Per la stabilità si ha

$$|z| < 1$$

$$\begin{aligned} |z| &= \left|\frac{1+w}{1-w}\right| \\ &= \left|\frac{1+\sigma+j\omega}{1-\sigma-j\omega}\right| \\ &= \frac{(1+\sigma)^2+\omega^2}{(1-\sigma)^2+\omega^2} < 1 \end{aligned}$$

Trasformazione bilineare

Dalla precedente si ottiene

$$
\begin{aligned}
(1+\sigma)^2+\omega^2 &< (1-\sigma)^2+\omega^2 \\
1+2\sigma+\sigma^2+\omega^2 &< 1-2\sigma+\sigma^2+\omega^2 \\
\sigma &< 0
\end{aligned}
$$

Criterio di Jury

- Si considera

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

  con $a_0 > 0$
- Si verificano le seguenti condizioni:
  1. $|a_n| < a_0$
  2. $D(z)|_{z=1} > 0$
  3. $D(z)|_{z=-1} \begin{cases} > & 0 & n \text{ pari} \\ < & 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$
  4. $\begin{array}{ccc} |b_{n-1}| & > & |b_0| \\ |c_{n-2}| & > & |c_0| \\ & \vdots & \\ |q_2| & > & |q_0| \end{array}$

Tabella di Jury

	z^0	z^1	z^2		$\dots$	z^{n-1}	z^n
1	a_n	a_{n-1}	$\dots$		a_2	a_1	a_0
2	a_0	a_1	a_2	$\dots$		a_{n-1}	a_n
3	b_{n-1}	$\dots$		b_2	b_1	b_0	
4	b_0	b_1	b_2		$\dots$	b_{n-1}	
5	c_{n-2}	$\dots$	c_1	c_0			
6	c_0	c_1	$\dots$	c_{n-2}			
$\vdots$							
$2n-5$	p_3	p_2	p_1	p_0			
$2n-4$	p_0	p_1	p_2	p_3			
$2n-3$	q_2	q_1	q_0				

Coefficienti di Jury

$$b_k = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-k-1} \\ a_0 & a_{k+1} \end{vmatrix} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-k-2} \\ b_0 & b_{k+1} \end{vmatrix} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-2$$

$$\vdots$$

$$q_k = \begin{vmatrix} p_3 & p_{2-k} \\ p_0 & p_{k+1} \end{vmatrix} \qquad k = 0, 1, 2$$