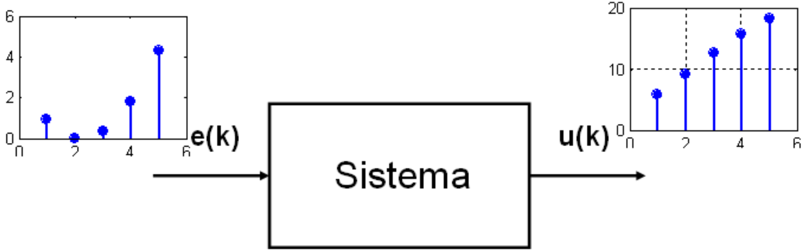
Controllo Digitale
a.a. 2007-2008

Strumenti matematici per l’analisi dei sistemi tempo discreto

LT-Cap. 2

Ing. Federica Pascucci

Equazioni alle differenze (ricorsive)



f legame tra le sequenze $\{e_k\}$ ed $\{u_k\}$

$$u_k = f(e_0, e_1, \ldots, e_k; u_0, u_1, \ldots, u_{k-1})$$

se f *lineare, tempo invariante, a memoria finita*

$$\begin{aligned} u_k &= -a_1 u_{k-1} - a_2 u_{k-2} - \cdots - a_n u_{k-n} + \\ &\quad + b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + \cdots + b_m e_{k-m} \end{aligned}$$

si ottengono *equazioni alle differenze ricorsive*

Equazioni alle differenze

Definiamo l'*operatore differenza*

$$
\begin{aligned}
\nabla u_k &= u_k - u_{k-1} \\
\nabla^2 u_k &= \nabla u_k - \nabla u_{k-1} \\
\nabla^3 u_k &= \nabla^2 u_k - \nabla^2 u_{k-1} \\
&\vdots \\
\nabla^n u_k &= \nabla^{n-1} u_k - \nabla^{n-1} u_{k-1}
\end{aligned}
$$

introducendo in un'equazione alle ricorrenze l'operatore ∇u_k si ottengono equazioni alle differenze.

Esempio

ES. Riscrivere l'equazione

$$u_k = -a_1 u_{k-1} - a_2 u_{k-2} + b_0 e_k$$

in termini di equazione alle differenze

SOL. Si sostituiscono i termini u_k, u_{k-1}, u_{k-2}

$$\begin{aligned} u_k &= u_k \\ u_{k-1} &= u_k - \nabla u_k \\ u_{k-2} &= u_k - 2\nabla u_k + \nabla^2 u_k \end{aligned}$$

si ottiene

$$a_2 \nabla^2 u_k - (a_1 + 2a_2)\nabla u_k + (a_2 + a_1 + 1) u_k = b_0 e_k$$

Soluzione di equazioni alle differenze

Si consideri l'equazione per $k = 2$, con $u_0 = u_1 = 1$

$$u_k = u_{k-1} + u_{k-2}$$

se si ipotizza una soluzione del tipo $u_k = cz^k$ si ottiene

$$cz^k = cz^{k-1} + cz^{k-2}$$

dividendo per cz^k

$$1 = z^{-1} + z^{-2}$$

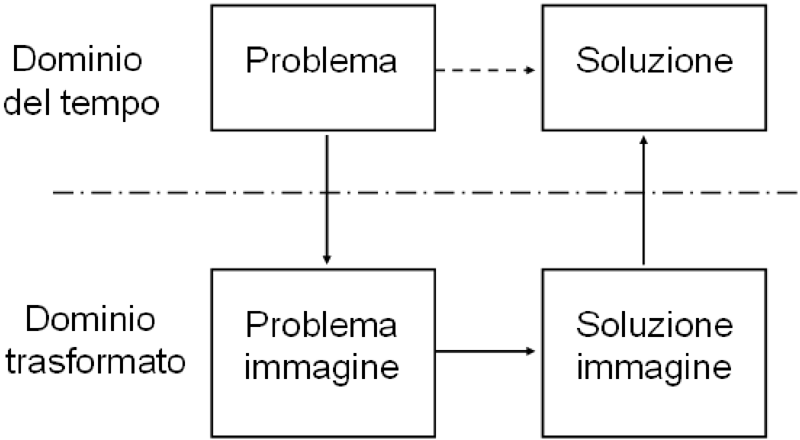
da cui si ottiene il *polinomio caratteristico*

$$z^2 - z^1 - 1 = 0$$

Le radici (z_1, z_2) del polinomio formano la soluzione dell'equazione alle differenze, (c_1, c_2) si trovano imponendo le condizioni iniziali

$$u_k = c_1 z_1^k + c_2 z_2^k$$

Trasformata Z



Definizione

Sia data una sequenza di valori $\{x_k\} \in \mathbb{R}$, definita per $k = 0, 1, 2, \ldots$ e nulla per $k < 0$. La $\mathcal{Z}$-trasformata (unilatera) della sequenza $\{x_k\}$ è la funzione di variabile complessa z definita come segue

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[x_k] = \\ &= x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \cdots + x_k z^{-k} + \cdots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \end{aligned}$$

Se la sequenza x_k è ottenuta campionando uniformemente con periodo T il segnale $x(t)$ allora vale la notazione

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(t)] = \mathcal{Z}[x(kT)]$$

Osservazioni

1. Dominio di convergenza: zona esterna ad un cerchio di raggio R (raggio di convergenza) centrato nell'origine
2. $\mathcal{Z}[x(t)]$ implica un tempo di campionamento T

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[X(s)] \\ &= \mathcal{Z}[\mathcal{L}^{-1}[X(s)]_{t=kT}] \end{aligned}$$

3. Le funzioni considerate qui saranno del tipo razionale fratto

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} = \\ &= \frac{b_0 z^{-(n-m)} + b_1 z^{-(n-m+1)} + \cdots + b_m z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots a_n z^{-n}} \end{aligned}$$

Proprietà della Z-trasformata

- Linearità
- Traslazione nel tempo
- Teorema del valor iniziale
- Teorema del valor finale

Linearità

Siano date due sequenze $f(kT), g(kT)$, con $\mathcal{Z}$-trasformata $F(z), G(z)$ rispettivamente, e due costanti $a, b \in \mathbb{C}$, allora la sequenza $x(kT)$ ottenuta come

$$x(kT) = af(kT) + bg(kT)$$

ha $\mathcal{Z}$-trasformata pari a

$$X(z) = aF(z) + bG(z)$$

Dim.

$$\begin{aligned} X(z) &\triangleq \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} = \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} [af(kT) z^{-k} + bg(kT) z^{-k}] = \\ &= a \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} + b \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} g(kT) z^{-k} = \\ &= aF(z) + bG(z) \end{aligned}$$

Traslazione nel tempo

Sia data la funzione $x(t)$, nulla per $t < 0$, e sia $X(z)$ la $\mathcal{Z}$-trasformata della sequenza $x(kT)$, che si ottiene campionando $x(t)$ con periodo T, allora

- Ritardo temporale

$$\mathcal{Z}[x(t-nT)] = z^{-n}X(z)$$

- Anticipo temporale

$$\mathcal{Z}[x(t+nT)] = z^{n}\left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}\right]$$

con $n = 1, 2, \ldots$

Ritardo temporale

Sia data la funzione $x(t)$, nulla per $t < 0$, e sia $X(z)$ la $\mathcal{Z}$-trasformata della sequenza $x(kT)$, che si ottiene campionando $x(t)$ con periodo T, allora

$$\mathcal{Z}[x(t - nT)] = z^{-n}X(z)$$

Dim.

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[x(kT - nT)] &\triangleq \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} x(kT - nT)z^{-k} = \\
&= z^{-n}\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} x(kT - nT)z^{-(k-n)} = \\
&\quad \text{[si pone } m = k - n\text{]} \\
&= z^{-n}\textstyle\sum_{m=-n}^{\infty} x(mT)z^{-m} \\
&\quad \text{[poichè } x(-kT) = 0 \text{ per } k \geq 0\text{]} \\
&= z^{-n}\sum_{m=0}^{\infty} x(mT)z^{-m} = z^{-n}X(z)
\end{aligned}$$

Anticipo temporale

Sia data la funzione $x(t)$, nulla per $t < 0$, e sia $X(z)$ la $\mathcal{Z}$-trasformata della sequenza $x(kT)$, che si ottiene campionando $x(t)$ con periodo T, allora

$$\mathcal{Z}[x(t+nT)] = z^n \left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT) z^{-k} \right]$$

Dim.

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[x(kT+nT)] &\triangleq \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} x(kT+nT) z^{-k} = \\
&= z^n \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} x(kT+nT) z^{-(k+n)} = \\
& \quad [\text{si pone } \alpha = \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} x(kT) z^{-k}] \\
&= z^n [\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} x(kT+nT) z^{-(k+n)} + \\
& \quad +\alpha - \alpha] = \\
&= z^n [\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-(k)} - \alpha] = \\
&= z^n [X(z) - \alpha]
\end{aligned}$$

Teorema del valor iniziale e finale

Sia data la funzione $x(t)$, nulla per $t < 0$, e sia $X(z)$ la $\mathcal{Z}$-trasformata della sequenza $x(kT)$, che si ottiene campionando $x(t)$ con periodo T, allora

- Teorema del valor iniziale (se esiste $x(0)$)

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

- Teorema del valor finale (se esiste il lim)

$$\lim_{k \to \infty} x(kT) = \lim_{z \to 1} [(1 - z^{-1})X(z)]$$

Teorema del valor iniziale

Sia data la funzione $x(t)$, nulla per $t < 0$, e sia $X(z)$ la $\mathcal{Z}$-trasformata della sequenza $x(kT)$, che si ottiene campionando $x(t)$ con periodo T, allora

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

Dim.

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to\infty} X(z) &= \lim_{z\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} = \\
&= \lim_{z\to\infty} [x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \ldots] = \\
&= x(0)
\end{aligned}$$

Teorema del valor finale

Sia data la funzione $x(t)$, nulla per $t < 0$, e sia $X(z)$ la $\mathcal{Z}$-trasformata della sequenza $x(kT)$, che si ottiene campionando $x(t)$ con periodo T, allora

$$\lim_{k\to\infty} x(kT) = \lim_{z\to 1}[(1 - z^{-1})X(z)]$$

Dim.

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 1}[(1 - z^{-1})X(z)] &= \lim_{z\to 1}[X(z) - z^{-1}X(z)] = \\
&= \lim_{z\to 1}[\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} + \\
&\quad - \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} x((k-1)T)z^{-k}] = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}[x(kT) - x((k-1)T)] = \\
&= \lim_{k\to\infty} x(kT)
\end{aligned}$$

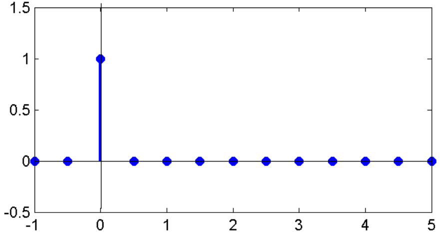
Trasformate notevoli

- Impulso di Kronecker
- Gradino unitario
- Rampa unitaria
- Funzione esponenziale
- Funzione sinusoidale

Impulso di Kronecker

$$\delta_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t = 0 \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

$$\delta_0(kT) = \{1, 0, 0, \dots\}$$

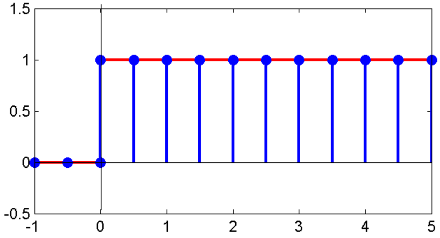


$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\delta_0(kT)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \delta_0(kT) z^{-k} = \\ &= 1 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + \cdots = \\ &= 1 \end{aligned}$$

Gradino unitario

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

$$\delta_{-1}(kT) = \{1, 1, \ldots\}$$

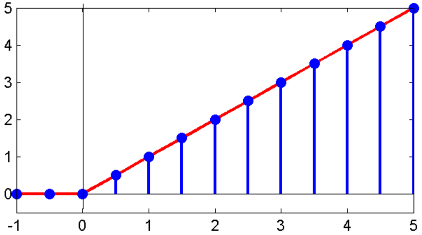


$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\delta_{-1}(kT)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{-1}(kT) z^{-k} = \\ &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots = \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \end{aligned}$$

Rampa unitaria

$$\delta_{-2}(t) = \begin{cases} t & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

$$\delta_{-2}(kT) = \{kT\}$$

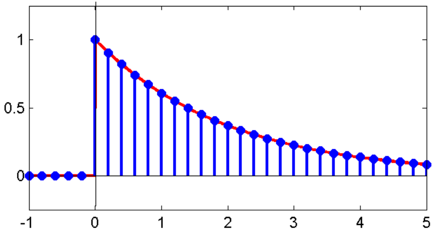


$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\delta_{-2}(kT)] &= T\sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} = \\ &= T(z^{-1} + 2z^{-2} + \dots) = \\ &= Tz^{-1}(1 + 2z^{-1} + \dots) = \\ &= T\frac{z}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

Funzione esponenziale

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

$$x(kT) = \{e^{-akT}\}$$

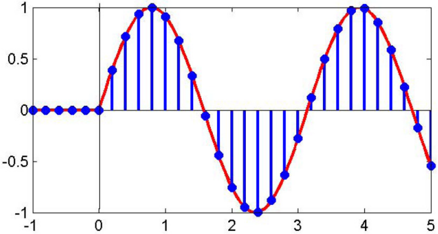


$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x(kT)] &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} = \\ &= 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + \cdots = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}} \end{aligned}$$

Funzione sinusoidale

$$x(t) = \begin{cases} \sin(\omega t) & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

$$x(kT) = \{\sin(\omega kT)\}$$



$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x(kT)] &= [\text{formule di Eulero}] \\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1-e^{j\omega T}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-j\omega T}z^{-1}}\right) = \\ &= \frac{1}{2j}\,\frac{(e^{j\omega T}-e^{-j\omega T})z^{-1}}{1-(e^{j\omega T}+e^{-j\omega T})z^{-1}+z^{-2}} = \\ &= \frac{z^{-1}\sin(\omega T)}{1-2z^{-1}cos\omega T+z^{-2}} = \frac{z\sin(\omega T)}{z^2-2zcos(\omega T)+1} \end{aligned}$$

Metodi per antitrasformare

1. Lunga divisione (successione)
2. Computazionale (successione)
3. Scomposizione in fratti semplici (forma chiusa)
4. Integrale di inversione (forma chiusa)

Metodo della lunga divisione

Consente di calcolare i valori della sequenza $\{x(kT)\}$

Ricordando che

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} \\ &= x(0) + \frac{x(1)}{z} + \frac{x(2)}{z^2} + \dots \end{aligned}$$

e che

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{N(z)}{D(z)} \\ &= c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots \end{aligned}$$

si ottiene che

$$\begin{aligned} c_0 &= x(0) \qquad & c_2 &= x(2) \\ c_1 &= x(1) & &\dots \end{aligned}$$

Osservazioni

1. Il metodo può essere applicato quando non è di interesse calcolare una forma chiusa per $x(kT)$, ma si vogliono conoscere solo alcuni campioni per caratterizzare la risposta di un sistema

2. Siano $m = deg(N(z))$ e $n = deg(D(z))$, allora si avrà

$$
\begin{aligned}
n - m &= 0 \quad \Rightarrow \quad c_0 \neq 0 \\
n - m &= k \quad \Rightarrow \quad c_0 = \cdots = c_{k-1} = 0
\end{aligned}
$$

Metodo computazionale

Consente di calcolare i valori della sequenza $\{x(kT)\}$

Ricordando che

$$X(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})}$$

dove $U(z) = \mathcal{Z}[\delta_0(kT)]$ si ottiene

$$X(z)D(z^{-1}) = U(z)N(z^{-1})$$

da cui (trasl. in avanti)

$$x_k + a_1 x_{k-1} + \cdots + a_n x_{k-n} =$$
$$b_0 u_{k-(n-m)} + b_1 u_{k-(n-m+1)} + \cdots + b_m u_{k-n}$$

Metodo per implementare eq. alle differenze

Scomposizione in fratti semplici

Consente di calcolare $\{x(kT)\}$ in forma chiusa

Si scompone $X(z)/z$ in termini di cui l'antitrasformata è nota

$$\frac{X(z)}{z} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{R_{i,j}}{(z - p_i)^j}$$

si antitrasformano i singoli termini (prop. linearità) dopo aver moltiplicato per z e calcolato $R_{i,j}$ con la formula per i residui

$$R_{i,j} = \frac{1}{(r_i - j)!} \lim_{z \to p_i} \left\{ \frac{d^{r_i - j}}{dz^{r_i - j}} [(z - p_i)^{r_i} R(z)] \right\}$$

NB La funzione deve essere strettamente propria

Metodo dell'integrale di inversione

Consente di calcolare $\{x(kT)\}$ in forma chiusa ed è il metodo più generale (vale anche con trasformate $\mathcal{Z}$ non razionali fratte)

Formula matematica

$$x(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$