Controllo Digitale

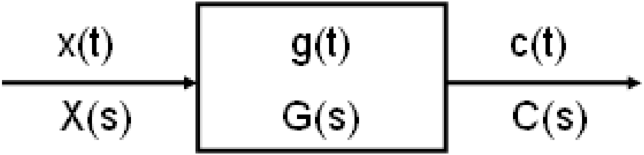
a.a. 2007-2008

Sistemi a tempo discreto

LT-Cap. 4

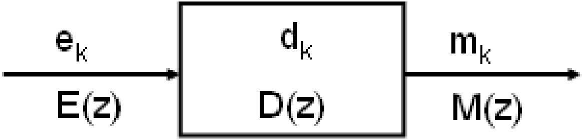
Ing. Federica Pascucci

Integrale di convoluzione



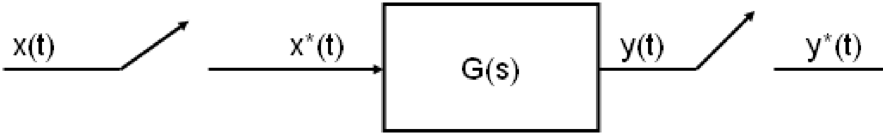
$$
\begin{aligned}
c(t) &= \int_0^t g(\tau)x(t-\tau)d\tau = \\
&= \int_0^t x(\tau)g(t-\tau)d\tau \\
C(s) &= X(s)G(s)
\end{aligned}
$$

Sommatoria di convoluzione



$$
\begin{aligned}
m_k &= \sum_{i=0}^{k} d_i e_{k-i} \\
&= \sum_{i=0}^{k} e_i d_{k-i} \\
M(z) &= D(z)E(z)
\end{aligned}
$$

Sistemi tc/td



$$y(t) = \begin{cases} g(t)x(0) & 0 \le t < T \\ g(t)x(0) + g(t-T)x(T) & T \le t < 2T \\ g(t)x(0) + g(t-T)x(T) + g(t-2T)x(2T) & 2T \le t < 3T \\ \vdots & \vdots \\ g(t)x(0) + g(t-T)x(T) + \cdots + g(t-kT)x(kT) & kT \le t < (k+1)T \end{cases}$$

Sistemi tc/td

In forma compatta

$$
\begin{aligned}
y(t) &= g(t)x(0) + g(t-T)x(T) + \cdots + g(t-kT)x(kT) \\
&= \sum_{h=0}^{k} g(t-hT)x(hT) \qquad 0 \leq t < (k+1)T
\end{aligned}
$$

campionando la sequenza ottenuta

$$
y(kT) = \sum_{h=0}^{k} g(kT-hT)x(hT) = \sum_{h=0}^{k} x(kT-hT)g(hT)
$$

ricordando che $x(t) = g(t) = 0$, per $t < 0$

$$
y(kT) = \sum_{h=0}^{\infty} g(kT-hT)x(hT) = \sum_{h=0}^{\infty} x(kT-hT)g(hT)
$$

FdT discreta

A partire dalla relazione trovata

$$y(kT) = \sum_{h=0}^{\infty} g(kT - hT)x(hT)$$

si può mostrare che

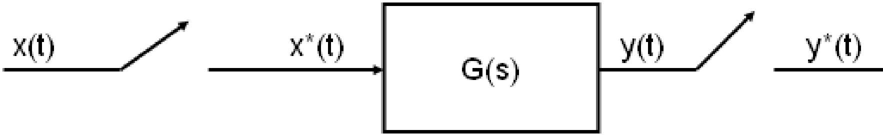
$$Y(z) = G(z)X(z)$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} g(kT - hT)x(hT)z^{-k} = \end{aligned}$$

FdT discreta

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} g(mT)x(hT)z^{-m-h} = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} g(mT)z^{-m} \sum_{h=0}^{\infty} x(hT)z^{-h} = \\
&= G(z)X(z)
\end{aligned}$$

Ingresso/uscita campionati



Nel caso di ingresso pari a $x^*(t)$, nel dominio di Laplace in uscita si avrà

$$Y(s) = G(s)X^*(s)$$

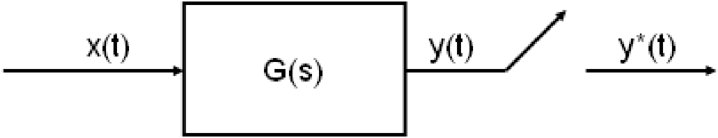
Campionando l'uscita si ottiene

$$Y^*(s) = [G(s)X^*(s)]^* = G^*(s)X^*(s)$$

Passando nel dominio della $\mathcal{Z}$-trasformata

$$Y(z) = G(z)X(z)$$

Ingresso continuo



Nel caso di ingresso pari a $x(t)$, nel dominio di Laplace in uscita si avrà

$$Y(s) = G(s)X(s)$$

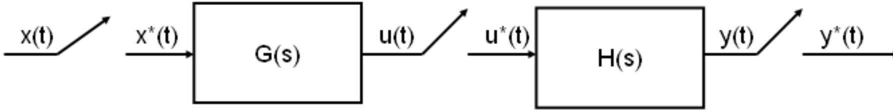
Campionando l'uscita si ottiene

$$Y^*(s) = [G(s)X(s)]^* \neq G^*(s)X^*(s)$$

Passando nel dominio della $\mathcal{Z}$-trasformata

$$Y(z) = GX(z) \neq G(z)X(z)$$

Blocchi in cascata



Nel dominio di Laplace

$$Y^*(s) = G^*(s)H^*(s)X^*(s)$$

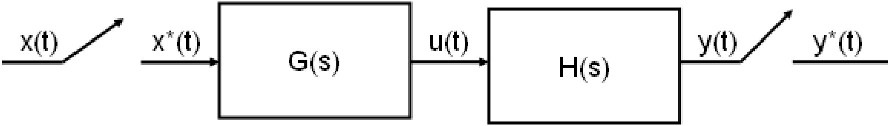
$\mathcal{Z}$-trasformata

$$Y(z) = G(z)H(z)X(z)$$

FdT

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z)H(z)$$

Blocchi in cascata



Nel dominio di Laplace

$$Y^*(s) = [G(s)H(s)]^* X^*(s)$$

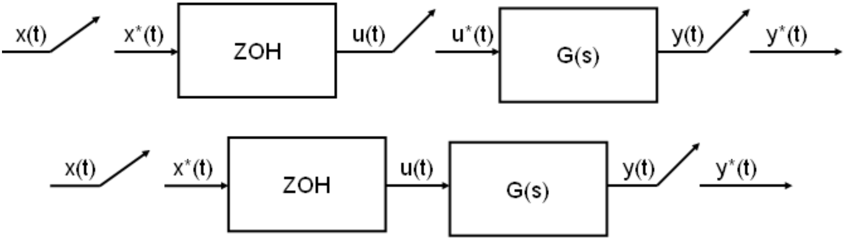
$\mathcal{Z}$-trasformata

$$Y(z) = GH(z)X(z)$$

FdT

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = GH(z)$$

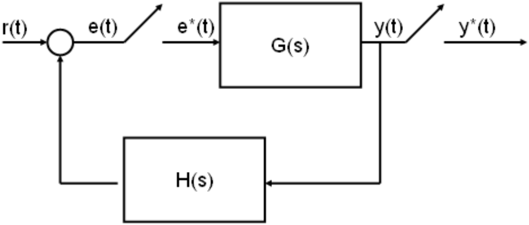
Esempio



$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H_0(z)G(z) = G(z) = \mathcal{Z}[G(s)]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H_0G(z) = \mathcal{Z}[H_0(s)G(s)] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

Controllo a retroazione



$$
\begin{aligned}
E(s) &= R(s) - H(s)Y(s) \\
Y(s) &= G(s)E^*(s)
\end{aligned}
$$

sostituendo si ottiene

$$E(s) = R(s) - H(s)G(s)E^*(s)$$

Controllo a retroazione

campionando le relazioni precedenti si ottiene

$$\begin{aligned} E(s) &= R^*(s) - GH^*(s)E^*(s) \\ Y(s) &= G^*(s)E^*(s) \end{aligned}$$

La FdT del sistema campionato nel dominio di Laplace risulta

$$Y^*(s) = \frac{G^*(s)R^*(s)}{1 + GH^*(s)}$$

nel dominio della $\mathcal{Z}$-trasformata

$$Y(z) = \frac{G(z)R(z)}{1 + GH(z)}$$

Risposta armonica discreta

La *risposta armonica* di $G(z)$ è definita come

$$G(e^{j\omega T}) \qquad 0 \leq \omega < \frac{\pi}{T}$$

1. La funzione è definita solo i $0 \leq \omega < \frac{\pi}{T}$ in quanto è periodica in ω_s

$$G(e^{j(\omega+\omega_s)T}) = G(e^{j(\omega T + \frac{2\pi}{T}T)}) = G(e^{j\omega T})$$

2. per $\omega \geq 0$ assume valori complessi coniugati rispetto al caso $\omega \leq 0$

$$G(e^{j(-\omega)T}) = G^*(e^{j\omega T})$$

Diagrammi di Bode

- Ha senso considerare solo il range di frequenze $\omega \in \left[0, \frac{\pi}{T}\right]$
- La funzione $G(e^{j\omega T})$ è trascendente e non valgono le regole per il tracciamento dei diagrammi di Bode asintotici
- I diagrammi di Bode vanno tracciati per punti (cioè con l'ausilio del calcolatore) o passando nel dominio w