Controllo Digitale

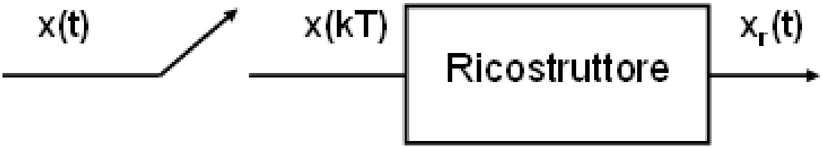
a.a. 2007-2008

Campionamento dei segnali

LT-Cap. 3

Ing. Federica Pascucci

Campionamento impulsivo



Se si considera lo ZOH (Zero Order Hold) come ricostruttore il segnale ricostruito $x_r(t)$ ha la forma

$$x_r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)[\delta_{-1}(t - kT) - \delta_{-1}(t - (k+1)T)]$$

Segnale ricostruito

La $\mathcal{L}$-trasformata di $x_r(t)$ è data da

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[x_r(t)] &= X_r(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\left[\frac{e^{-kTs} - e^{-(k+1)Ts}}{s}\right] = \\
&= \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs} = \\
&= H_0(s) X^*(s)
\end{aligned}$$

dove

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \qquad X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}$$

Segnale campionato

Il segnale campionato nel tempo ha la forma

$$
\begin{aligned}
x^*(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X^*(s)] = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)
\end{aligned}
$$

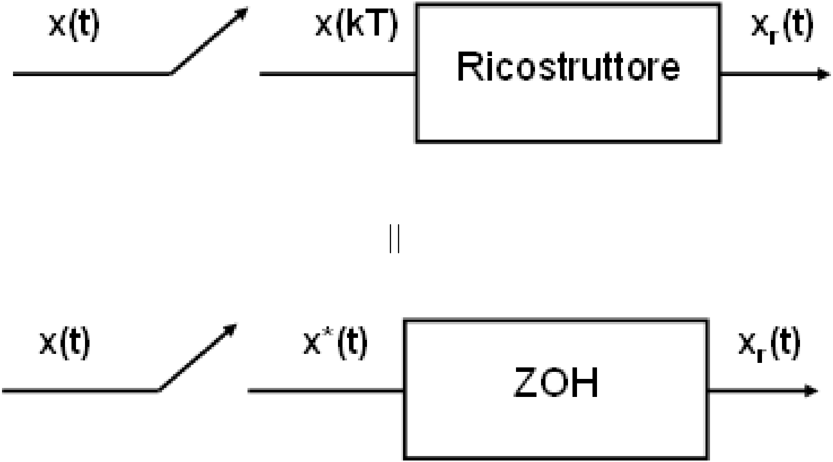
Definendo $\delta_T(t)$ la funzione treno di impulsi

$$\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT)$$

si può scrivere $x^*(t)$ come

$$x^*(t) = x(t)\delta_T(t)$$

Segnale campionato



Segnale campionato

Consideriamo la $\mathcal{L}$-trasformata del segnale $x^*(t)$

$$X^*(s) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}$$

sostituendo

$$z = e^{sT} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{T} \ln z$$

si ottiene la $\mathcal{Z}$-trasformata della $\{x(kT)\}$

$$X^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}lnz} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$$

Spettro del segnale $x^*(t)$

Dal momento che $x(t) = 0$ per $t \leq 0$ è possibile scrivere

$$x^*(t) = x(t)\delta_T(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT)$$

ed espandere in serie di Fourier il segnale $\delta(t)$

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_s t}, \qquad c_n = \int_0^T \delta_T(t)e^{-jn\omega_s t}dt = \frac{1}{T}$$

dove $\omega_s = 2\pi/T$ è la *pulsazione di campionamento*.
Il segnale $x^*(t)$ diventa

$$x^*(t) = x(t)\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)e^{jn\omega_s t}$$

Spettro del segnale $x^*(t)$

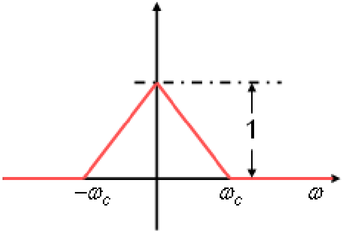
Passando nel dominio di Laplace

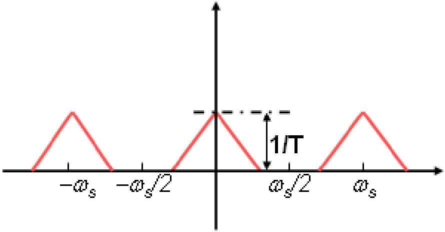
$$X^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{L}[x(t)e^{jn\omega_s t}] =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(s-jn\omega_s)$$

Risposta armonica

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(j\omega-jn\omega_s)$$





Teorema di Shannon

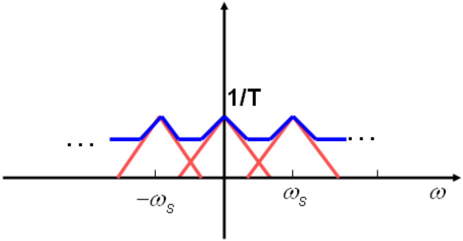
Sia $\omega_s = 2\pi/T$ la pulsazione di campionamento (o di Nyquist) ove T è il periodo di campionamento, e sia ω_c la più alta componente spettrale del segnale tempo-continuo $x(t)$. Il segnale $x(t)$ è completamente ricostruibile a partire dal segnale campionato $x^*(t)$ se e solo la pulsazione di campionamento è maggiore del doppio della pulsazione ω_c:

$$\omega_s \geq 2\omega_c$$

Aliasing

Fenomeno per cui, a causa del campionamento si generano armoniche alla stessa frequenza della componente di partenza.

- In frequenza



- Nel tempo: segnali diversi danno luogo alla stessa sequenza